

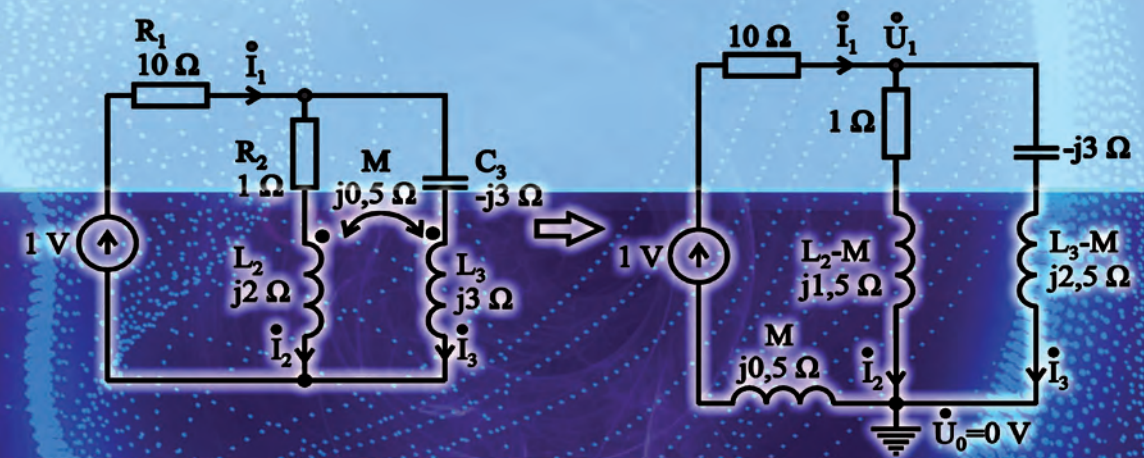
Борис Иванов Евстатиев

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

АКАДЕМИЧНО ИЗДАТЕЛСТВО
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ



ISBN 978-954-712-902-3



2023

доц. дн Борис Иванов Евстатиев

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

Учебник

АКАДЕМИЧНО ИЗДАТЕЛСТВО “РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ”

Русе, 2023 година

УДК: 621.31

Настоящият учебник е предназначен за студентите от Факултет „Електротехника, електроника и автоматика“ при Русенския университет „Ангел Кънчев“. Включеният в него материал е съобразен с утвърдените учебни програми по дисциплините „Теоретична електротехника“ и „Електротехника и електроника“ за студенти ОКС „бакалавър“ от специалности „Компютърни системи и технологии“, „Интернет и мобилни комуникации“ и „Информационни и комуникационни технологии“.

Учебникът по Теоретична електротехника е подходящ за дипломанти и специалисти от практиката, както и за студенти от други висши училища.

Авторът изказва благодарност на рецензента доц. д-р инж. Теодора Василева Христова за задълбочения прочит на ръкописа и направените ценни препоръки за подобряване съдържанието и стила на учебното пособие.

© доц. д-р инж. Борис Иванов Евстатиев, автор
доц. д-р инж. Теодора Василева Христова, рецензент
Академично издателство „Русенски университет“

ISBN: 978-954-712-902-3

Увод

Дисциплината „Теоретична електротехника“ е основополагаща за всички електротехнически специалности. В учебника се разглеждат основни концепции, теореми и закони в електрическите вериги.

В тема 1 са дефинирани основните понятия в електротехниката, техният физически смисъл, измервателни единици и взаимовръзки. В теми 2 и 3 са разгледани някои методи за анализ, съответно на линейни и нелинейни електрически вериги, при установен постоянен ток режим. В тема 4 са дефинирани реактивните елементи кондензатор и индуктивен елемент (бобина), след което е разгледано тяхното поведение в постоянноточови вериги.

В теми 5 и 6 са описани основните понятия, свързани със синусоидалните електрически вериги, поведението на пасивните елементи в тях, представянето на синусоидите като комплексни числа, основните закони, както и приложението на методите за анализ. Дефинирано е и понятието *индуктивно-свързани бобини* и са представени начините за техния анализ.

В тема 7 са разгледани честотните свойства на бобини и кондензатори, понятията *резонанс на напрежението* и *резонанс на токовете*. В тема 8 са представени поведението на основните пасивни елементи при установен несинусоиден режим, математическият апарат за тяхното описание, както и методите за анализ.

В тема 9 са разгледани преходните процеси, възникващи в електрически вериги за постоянен ток. Описани са процесите на енергообмен, възникващи във вериги от първи и втори ред, а също така класическият и операторният метод за техния анализ.

В тема 10 е представена теорията на четириполюсниците, различните видове матрици за описанието им, еквивалентни заместващи схеми, както и видовете съединения между тях. В тема 11 е представена теорията на веригите с разпределени параметри, разгледани са телеграфните уравнения в различните им форми, частните им случаи, както и възможностите за приложение на тази теория при анализ на вериги с предавателни линии.

Последната тема касае поведението на нелинейни резистивни елементи в променливоточови вериги. Анализирани са схемите на еднopolупериоден и двуполупериоден токоизправител, използвайки модела на идеален диод и праговия модел на диод.

При написването на учебника са използвани както класически литературни източници по Теоретични основи на електротехниката от България и Русия, така и алтернативни начини за представяне на теорията, налични в англоезичните курсове по Electric circuits.

Списък на често използвани съкращения

- ВАХ - Волт-амперна характеристика
- ВЗК - Втори закон на Кирхоф
- ПЗК - Първи закон на Кирхоф
- АС - променлив ток
- DC - постоянен или прав ток (според контекста)
- BW - широчина на честотната лента
- SWR - коефициент на стояща вълна

Тема 1. Въведение в електротехниката

1.1. Основни понятия

1.1.1. Електрически заредени частици

Елементарните частици на веществото могат да бъдат електрически неутрални или да притежават електрически заряд. Електрически заредените частици се наричат още *токоносители* и могат да бъдат:

- Отрицателно заредени (електрони, аниони);
- Положително заредени (протони, катиони).

Мерната единица за заряд е Кулон [C], а големината на един елементарен заряд е:

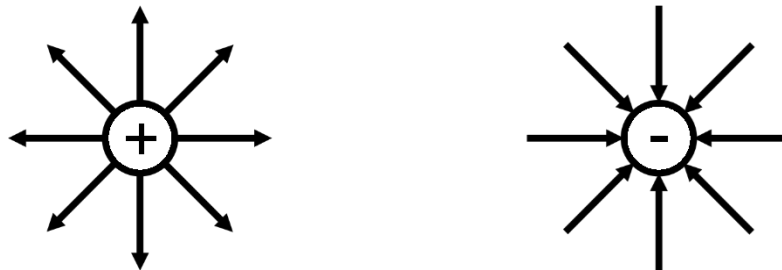
$$q_0 = 1,6021 \cdot 10^{-19} [C]. \quad (1.1)$$

Ако в дадено място от пространството са събрани множество елементарни заряди, общият им заряд Q ще бъде:

$$Q = \sum q^+ + \sum q^- [C], \quad (1.2)$$

където $\sum q^+$ е сумарният положителен заряд, а $\sum q^-$ - сумарният отрицателен заряд.

Около електрически заредените частици съществува електрическо поле. Условно е прието, че посоката на полето сочи навън от положително заредените частици и към отрицателно заредените (фиг. 1.1).

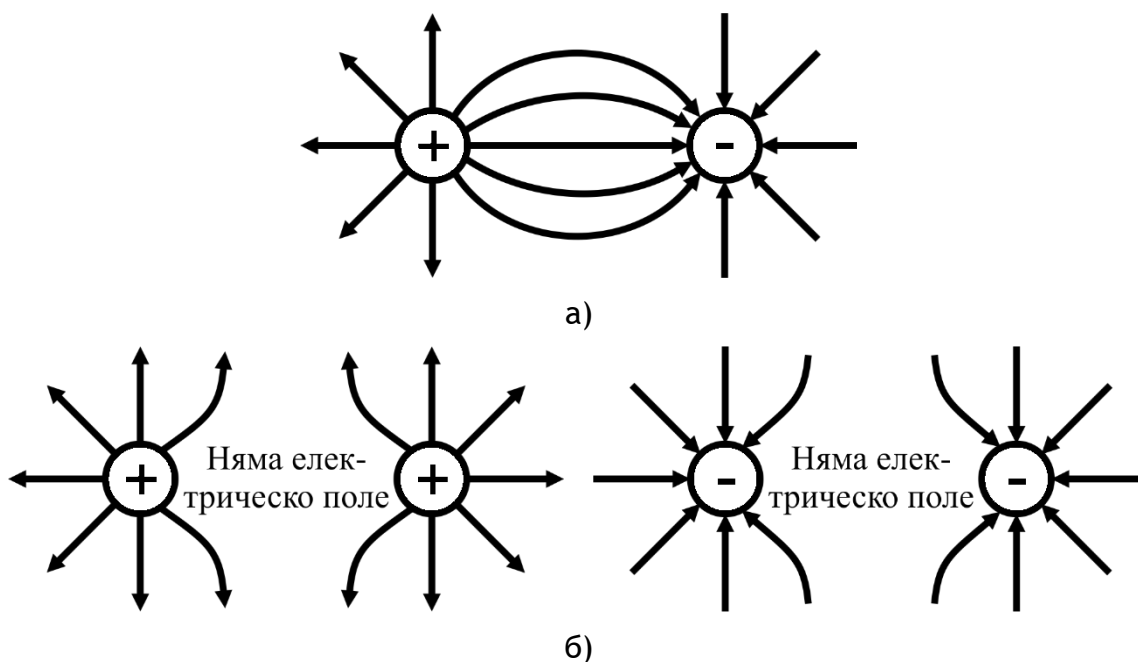


Фиг. 1.1. Електрическо поле около електрически заредени частици

Когато неподвижни заредени частици се намират в близост една до друга, са възможни два типа взаимодействия:

1. Между заредени частици с противоположен знак действат сили на привличане (фиг. 1.2а);

2. Между заредени частици с еднакъв знак действат сили на отблъскване (фиг. 1.2б)

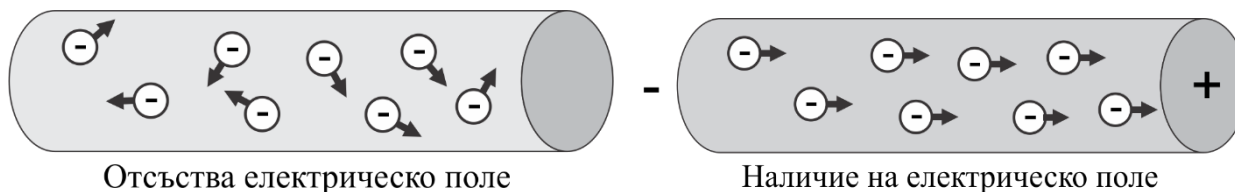


Фиг. 1.2. Сили на привличане (а) и сили на отблъскване (б) между заредени частици

Тъй като в диелектриците няма свободни токоносители, в тях електрическото поле, поне на теория, може да съществува безкрайно дълго време. От друга страна в проводниците съществуват свободни токоносители, на които оказва въздействие наличието на външно електрическо поле.

Например, известно е, че в металните проводници съществуват свободни електрони. В случай че отсъства електрическо поле, тези токоносители извършват хаотично топлинно движение, т.е. те се движат в случайна посока (фиг. 1.3а). Но ако към проводника бъде приложено външно електрическо поле, свободните електрони започват да се движат насочено в посока към плюса (+) на електрическото поле по следните причини:

- от една страна минусът на полето отблъсква отрицателно заредените частици;
- а от друга - плюсет на полето ги привлича.



Фиг. 1.3. Поведение на електроните в метален проводник:

а) хаотично топлинно движение, при отсъствие на външно електрическо поле; б) насочено движение на електрони при наличие на външно електрическо поле

1.1.2. Електрически ток

На база на горепосоченото може да се дефинира понятието *електрически ток*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Електрически ток се нарича всяко насочено движение на електрически заредени частици в пространството.

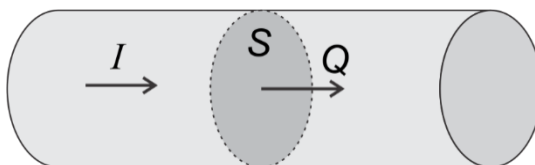
В проводниците съществува т.нар. ток на проводимост, като:

- в металите той се дължи на свободните електрони;
- в електролитите - на йоните;
- в газовете - на всички свободни заредени частици (електрони, протони, йони).

В диелектриците също е възможно протичане на ток, наричан *ток на разместване*, но той не е обект на разглеждане в този учебник.

Основната величина, използвана като количествена оценка на електрическия ток, се нарича *големина на тока*. Тя се дефинира като количеството заряд Q , минаващ през сечението S на проводник, за единица време t (фиг. 1.4):

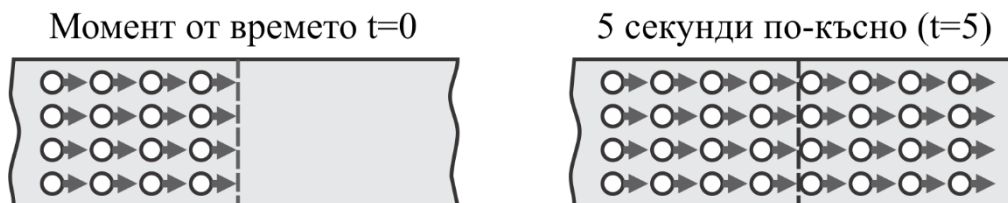
$$I = \frac{dQ}{dt} [A]. \quad (1.3)$$



Фиг. 1.4. Проводник със сечение S , през което минава заряд Q

Мерната единица за големина на електрическия ток е Ампер и се отбелязва с $[A]$.

Пример 1.1. Да се определи големината на протичащия по проводник ток, ако през сечението му за 5 секунди минават 16 електрически заредени частици.



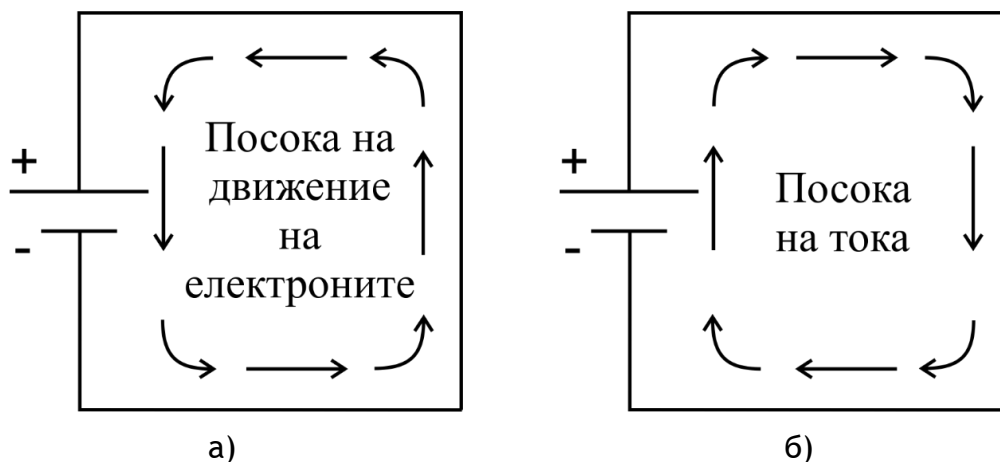
Фиг. 1.5. Пояснение към пример 1.1

Решение: За големината на тока се получава:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{16 \cdot q_0}{5} = \frac{16 \cdot 1,6021 \cdot 10^{-19}}{5} = 5,13 \cdot 10^{-19} [A]$$

Условно е прието, че посоката на тока съвпада с посоката на движение на положително заредените частици, т.е. от плюс (+) към минус (-). Това на практика означава, че електроните се движат в посока, обратна на тази на тока (фиг. 1.6). Освен това ако токът тече в електролит или газ, той се дължи както на

положително, така и на отрицателно заредени частици, т.е. в този случай токоносителите се движат едновременно и в двете посоки.

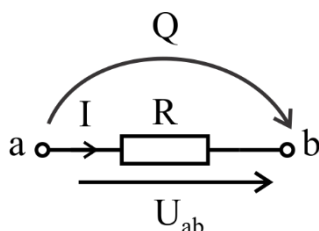


Фиг. 1.6. Посока на движение на електроните (а) и условно приета посока на движение на тока (б)

1.1.3. Електрическо напрежение и електрически потенциал

Нека в даден участък от верига (фиг. 1.7), под въздействието на външно електрическо поле, тече електрическият ток I , при което електрическият заряд Q се премества от т. a в т. b . Това означава, че електрическото поле извършва някаква работа, т.е. изразходва се някаква енергия A :

$$A = Q \cdot U_{ab} [J]. \quad (1.4)$$

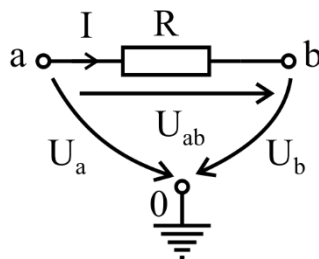


Фиг. 1.7. Участък от верига между точките a и b

Коефициентът U_{ab} се нарича **електрическо напрежение** (или **пад на напрежение**), като единицата за напрежение е **Волт [V]**. С други думи, напрежението се дефинира като:

$$U_{ab} = \frac{A}{Q} [V]. \quad (1.5)$$

Нека освен двете точки a и b съществува и трета точка, условно означена като 0 - земя (фиг. 1.8). И нека напрежението между т. a и 0 е U_a , а напрежението между т. b и 0 - U_b . В този случай величините U_a и U_b са **електрическият потенциал** на двете точки, чиято размерност също е **Волт [V]**. Прието е като обща точка да се използва земната повърхност, като условно се казва, че тя има потенциал $0 V$.



Фиг. 1.8. Електрическо напрежение и електрически потенциал

Електрическото напрежение между точките **a** и **b** може да бъде определено чрез електрическите потенциали както следва:

$$U_{ab} = U_a - U_b. \quad (1.6)$$

По аналогичен начин може да се намери и напрежението между **b** и **a**:

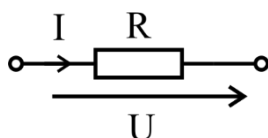
$$U_{ba} = U_b - U_a = -U_{ab}. \quad (1.7)$$

С други думи, напрежението може да бъде положително или отрицателно, като това е въпрос на гледна точка (от т. **a** към т. **b** или от т. **b** към т. **a**).

1.1.4. Електрическо съпротивление и електрическа проводимост

Нека в даден участък от електрическа верига тече токът **I** и има пад на напрежение **U**. Връзката между двете величини се дава с т.нар. Закон на Ом:

$$U = I \cdot R. \quad (1.8)$$



Фиг. 1.9. Участък от електрическа верига

Коефициентът **R** се нарича **електрическо съпротивление** и има размерност Ом [**Ω**]. Използва се също така и реципрочната стойност на съпротивлението:

$$G = \frac{1}{R}. \quad (1.9)$$

Величината **G** се нарича **електрическа проводимост**, като единицата за проводимост е Сименс [**S**].

1.2. Електрически вериги

Електрическата верига е устройство или съвкупност от устройства за преобразуване, разпределение и пренасяне на електромагнитна енергия или информация, с помощта на електрически ток.

Съществуват няколко основни класификации на електрическите вериги.

Класификация 1. Според нея веригите биват:

- **вериги със съсредоточени параметри** - характеристиките на веригата (съпротивление, индуктивност, капацитивност) са съсредоточени в определени нейни участъци;
- **вериги с разпределени параметри** - характеристиките на веригата са разпределени равномерно или неравномерно по цялата ѝ дължина.

Класификация 2. Според нея веригите биват:

- **постояннотокови (DC) вериги** - установените електрическите токове и напрежения са с постоянна във времето големина;
- **променливотокови (AC) вериги** - установените електрически токове и напрежения се изменят във времето.

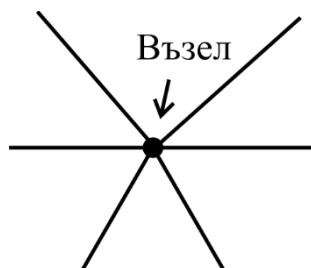
Класификация 3. Според нея веригите биват:

- **линейни вериги** - волт-амперните характеристики (ВАХ) на всички елементи във веригата са линейни;
- **нелинейни вериги** - поне един от елементите има нелинейна волт-амперна характеристика.

1.2.1. Възел, клон и затворен контур

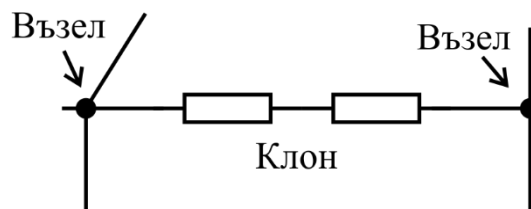
В една електрическа верига могат да се дефинират следните топологични елементи:

1. **Възел** - това е пресечната точка на поне 3 клона. Може да се направи аналогия с кръстовище на автомобилен път;



Фиг. 1.10. Възел в електрическа верига

2. **Клон** - това е участък между два съседни възела. Клонът също така може да се дефинира като участък от веригата, в който токът има една и съща големина;



Фиг. 1.11. Клон в електрическа верига

3. **Затворен контур** - това е затворен път в електрическата верига, който минава през един или повече неповтарящи се клона и възела.



Фиг. 1.12. Затворен контур в електрическа верига

В една електрическа верига също така могат да се дефинират следните структурни елементи:

1. Консуматори;
2. Източници (наричани още *генератори*);
3. Свързващите ги проводници (в реални ситуации също са консуматори).

1.2.2. Резистори

Резисторът е пасивен двуполусен елемент, който се използва за представяне на идеален приемник на енергия. Условното му означение е представено на фиг. 1.13а, като в някои държави (САЩ, Япония и др.) се използва означението от фиг. 1.13б.



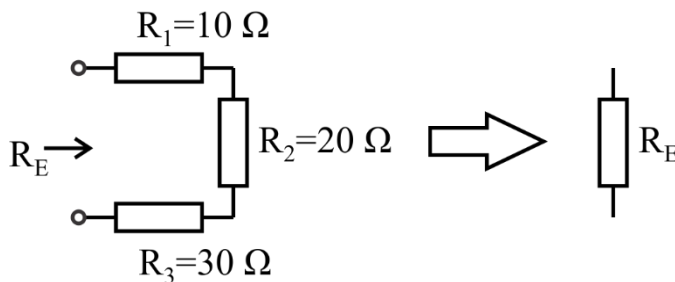
Фиг. 1.13. Условно означение на резистор в различните държави

Всеки резистор се характеризира и със съпротивление R в Омега или с проводимост G в Сименс.

При последователно свързани резистори, по тях тече един и същ ток, поради което еквивалентното им съпротивление се определя съгласно:

$$R_E = \sum R_i \text{ [}\Omega\text{]}. \quad (1.10)$$

Пример 1.2. За схемата от фиг. 1.14 да се определи еквивалентното съпротивление на трите резистора.



Фиг. 1.14. Схемa към пример 1.2

Решение: Тъй като трите резистора са свързани последователно, еквивалентното им съпротивление се определя съгласно:

$$R_E = R_1 + R_2 + R_3 = 10 + 20 + 30 = 60 [\Omega].$$

При паралелно свързване на резистори върху тях има един и същ пад на напрежение. Ето защо в тази ситуация могат да се сумират реципрочните стойности на съпротивленията им, т.е. техните проводимости:

$$\frac{1}{R_E} = \sum \frac{1}{R_i} [S], \quad (1.11)$$

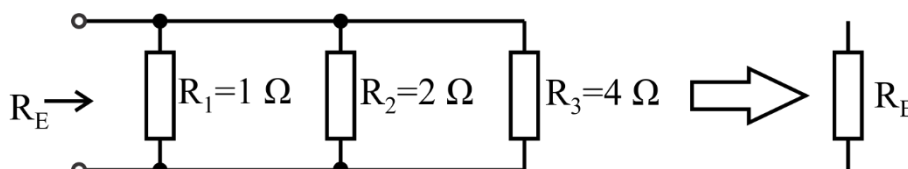
т.е. за еквивалентното им съпротивление се получава:

$$R_E = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} [\Omega]. \quad (1.12)$$

В случай че във веригата има само два паралелно свързани резистора, уравнение (1.12) добива следния вид:

$$R_E = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} [\Omega]. \quad (1.13)$$

Пример 1.3. За схемата от фиг. 1.15 да се определи еквивалентното съпротивление на резисторите.



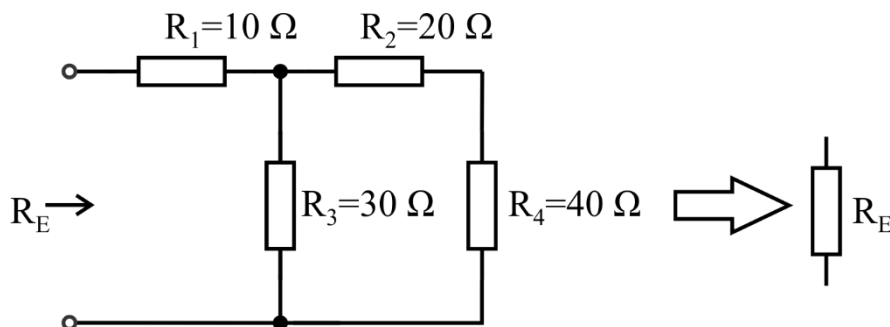
Фиг. 1.15. Схема към пример 1.3

Решение: Тъй като резисторите са свързани паралелно, за тях е в сила уравнение (1.12):

$$R_E = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 0,57 [\Omega].$$

В случай на по-сложни вериги, съдържащи както последователно, така и паралелно свързани резистори, елементите се обединяват стъпка по стъпка, докато накрая остане само един.

Пример 1.4. За схемата от фиг. 1.16 да се определи еквивалентното съпротивление на схемата.

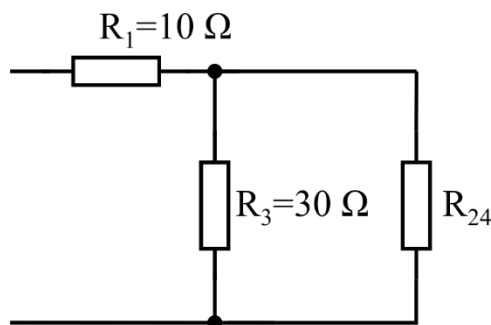


Фиг. 1.16. Схема към пример 1.4

Решение: В дадената схема резисторите R_2 и R_4 са свързани последователно, т.е. могат да бъдат заменени с еквивалентния резистор R_{24} :

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 20 + 40 = 60 \text{ [}\Omega\text{]}.$$

След заместване на R_2 и R_4 с R_{24} се получава нова еквивалентна схема (фиг. 1.17), в която R_3 и R_{24} са свързани паралелно.

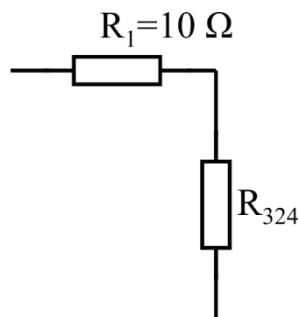


Фиг. 1.17. Първа еквивалентна схема към пример 1.4

Следователно еквивалентната им стойност е:

$$R_{324} = \frac{R_3 \cdot R_{24}}{R_3 + R_{24}} = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 20 \text{ [}\Omega\text{]}.$$

Получава се еквивалентната схема на фиг. 1.18.



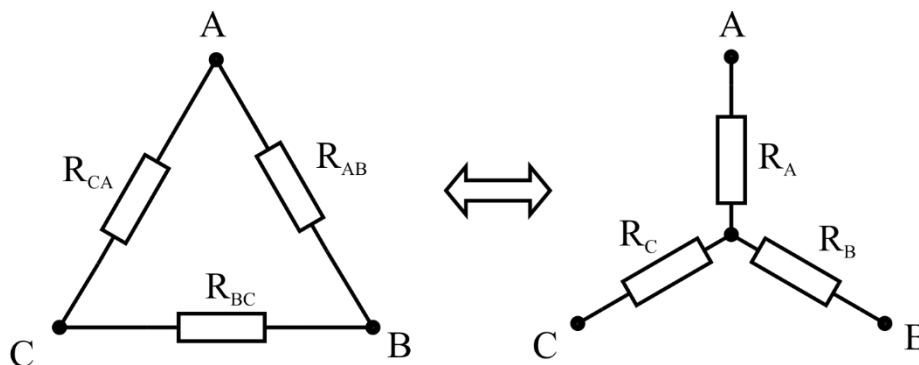
Фиг. 1.18. Втора еквивалентна схема към пример 1.4

В нея R_1 и R_{324} са свързани последователно, т.е. за R_E се получава:

$$R_E = R_1 + R_{324} = 10 + 20 = 30 \text{ [}\Omega\text{]}.$$

Съществуват още два типа съединения: **Звезда** и **Триъгълник** (фиг. 1.19). При преобразуване от звезда в триъгълник се използват следните зависимости:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}; \\ R_{BC} &= R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}; \\ R_{CA} &= R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}. \end{aligned} \quad (1.14)$$



Фиг. 1.19. Преобразувания Звезда-Триъгълник и Триъгълник-Звезда

Аналогично при преобразуване от триъгълник в звезда се използват:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \\ R_B &= \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \\ R_C &= \frac{R_{BC} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.2.3. Източници на електродвижещо напрежение

Източниците на напрежение преобразуват неелектрическа енергия в електрическа, като създават електродвижещо напрежение (е.д.н.). Могат да се разграничат два типа източници на напрежение.

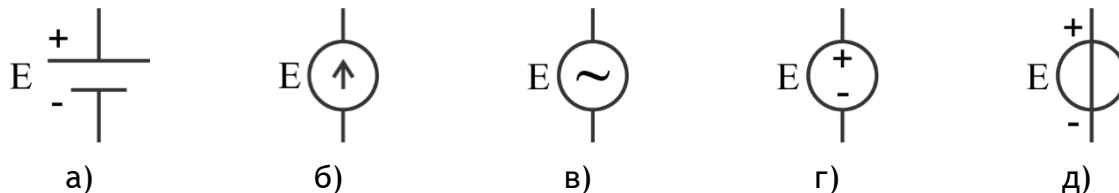
Идеален източник на напрежение

Идеалният източник на напрежение е теоретичен елемент, който се характеризира с **нулево собствено съпротивление**. Съществуват множество условни означения, използвани за обозначаване на идеален източник на напрежение:

- За обозначение на **батерия** (постояннотоков източник) се използва това, представено на фиг. 1.20а;
- По-**универсално означение** е представено на фиг. 1.20б, с което може да се обозначава както постояннотоков, така и променливотоков идеален източник;

- За обозначаване на **синусоидален източник на напрежение** е допустимо означението от фиг. 1.20в.

Съществуват и други означения (фиг. 1.20 г и д), но те не се използват в България.



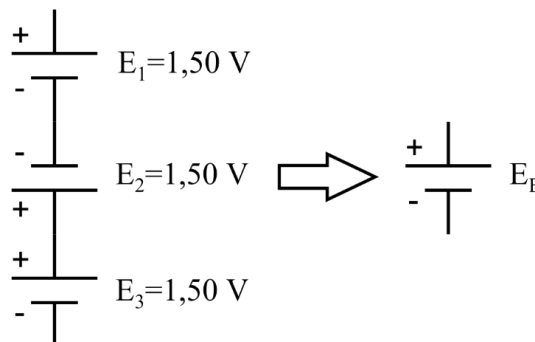
Фиг. 1.20. Условни означения на идеален източник на напрежение

Идеалните източници на напрежение могат да се свързват единствено последователно, като тяхното еквивалентно напрежение се определя като алгебрична сума от напреженията им:

$$E_E = \sum E_k. \quad (1.16)$$

Идеалните източници на напрежение не могат да се свързват паралелно, тъй като в това няма физически смисъл (паралелно свързаните елементи винаги имат едно и също напрежение).

Пример 1.5. За схемата от фиг. 1.21 да се определи големината на еквивалентния източник на е.д.н.



Фиг. 1.21. Схема към пример 1.5

Решение: Източниците на напрежение са свързани последователно, т.е. големината на еквивалентния източник е:

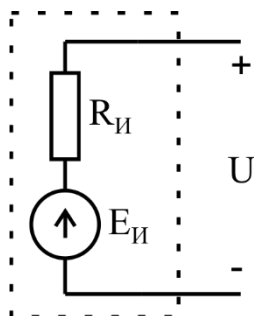
$$E_E = E_1 - E_2 + E_3 = 1,5 - 1,5 + 1,5 = 1,5 [V].$$

В случая E_1 и E_3 участват със знак плюс (+), тъй като тяхната посока съвпада с посоката на еквивалентния източник E_E , а E_2 участва със знак минус (-), тъй като неговата посока е противоположна на E_E .

Реален източник на напрежение

Реалният източник на напрежение има **ненулево собствено съпротивление**. По тази причина той се представя в заместваща схема с последователно свързани

идеален източник на напрежение $E_{И}$ и резистор със съпротивление $R_{И}$ (фиг. 1.22). В англоезичната литература реалният източник на напрежение често се нарича *еквивалентен източник на Тевенен*.



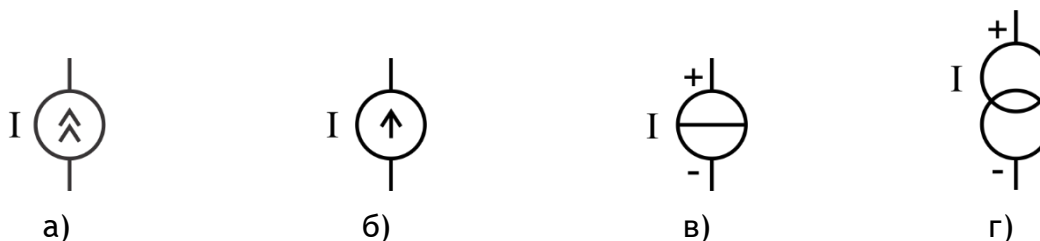
Фиг. 1.22. Еквивалентна заместваща схема на реален източник на напрежение

1.2.4. Източници на ток

Източниците на ток също преобразуват неелектрическа енергия в електрическа, но създават електрически ток. И в този случай могат да се разграничат два типа източници на ток.

Идеален източник на ток

Идеалният източник на ток е теоретичен елемент, който има **безкрайно-голямо собствено съпротивление**. Това означава, че големината на тока, минаващ през идеален източник на ток, не се влияе от други източници. Условното означение на идеален източник на ток, използвано в България, е представено на фиг. 1.23а. В други части на света също така се използват означенията от фиг. 1.23б, 1.23в и 1.23г.



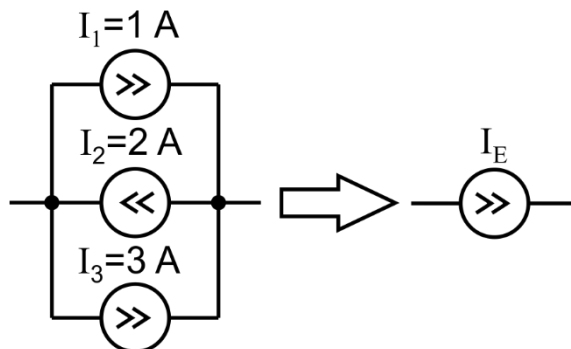
Фиг. 1.23. Условни означения на идеален източник на ток

Идеалните източници на ток могат да се свързват единствено **паралелно**, като големината на еквивалентния източник се определя като **алгебричната им сума**:

$$I_E = \sum I_k. \quad (1.17)$$

Идеалните източници на ток не могат да се свързват последователно, тъй като това е физически невъзможно (токът в последователно съединени елементи трябва да бъде един и същ).

Пример 1.6. За схемата от фиг. 1.6 да се определи големината на еквивалентния източник на ток.



Фиг. 1.24. Схема към пример 1.6

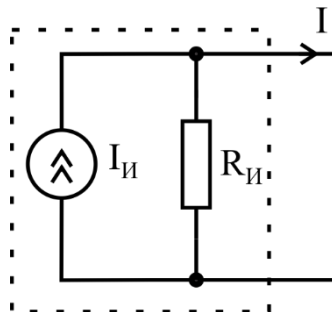
Решение: Източниците на ток са свързани паралелно, т.е. големината на еквивалентния източник е:

$$I_E = I_1 - I_2 + I_3 = 1 - 2 + 3 = 2\text{ [A]}.$$

В случая I_1 и I_3 участват със знак плюс (+), тъй като тяхната посока съвпада с посоката на еквивалентния източник I_E . От друга страна I_2 участва със знак минус (-), тъй като посоката му е противоположна на I_E .

Реален източник на ток

Реалният източник на ток има **съпротивление различно от безкрайност**. Той се представя в заместваща схема с **паралелно свързани** идеален източник на ток $I_{И}$ и резистор със съпротивление $R_{И}$. В англоезичната литература, реалният източник на ток често се нарича **еквивалентен източник на Нортън**.



Фиг. 1.25. Еквивалентна заместваща схема на реален източник на ток

1.2.5. Взаимозаменяемост

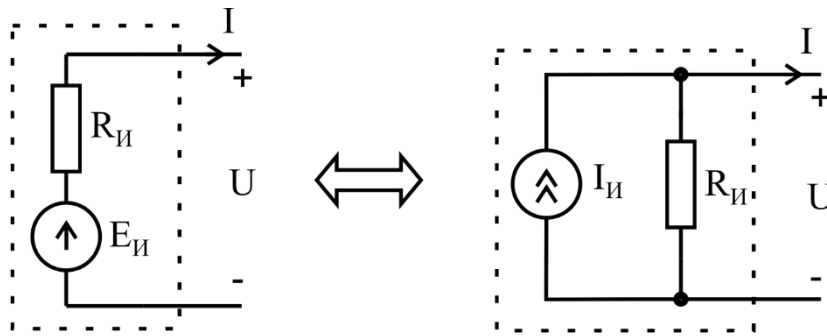
Реалните източници имат собствено съпротивление, поради което големината на създаваните от тях ток и напрежение зависят от веригата, към която са свързани. На практика всеки реален източник, захранващ някаква верига, създава едновременно ток и напрежение, съгласно Закона на Ом ($U = I \cdot R$). По тази причина схемите на реален източник на напрежение и реален източник на ток са взаимозаменяеми (фиг. 1.26). С други думи:

- Всеки **реален източник на ток** може да бъде заменен с **еквивалентен реален източник на напрежение**, като съпротивленията им са едни и същи, а големината на идеалния източник на е.д.н. се определя съгласно:

$$E_{И} = I_{И} \cdot R_{И}. \quad (1.18)$$

- Всеки реален източник на напрежение може да бъде заменен с еквивалентен реален източник на ток, като големината на идеалния източник на ток се определя с:

$$I_{И} = \frac{E_{И}}{R_{И}}. \quad (1.19)$$

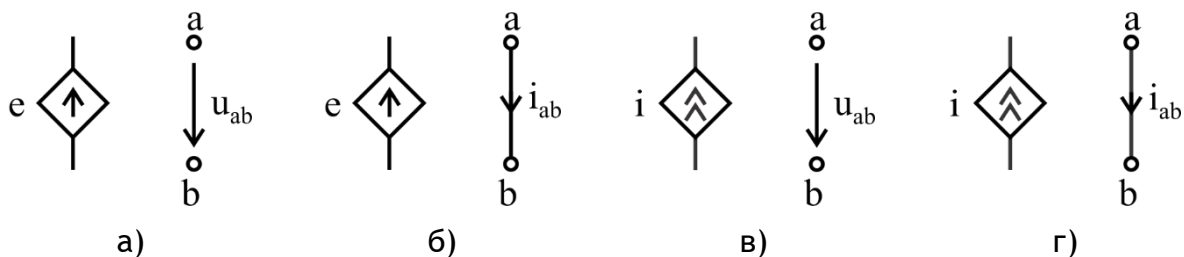


Фиг. 1.26. Еквивалентни схеми на реален източник

1.2.6. Зависими източници

В теорията съществуват и т.нар. зависими източници, чиито големина зависят от токовете или напреженията в други участъци от веригата. Те намират приложение при моделиране на различни електронни схеми и елементи, като например при анализ на вериги с индуктивно-свързани бобини, операционни усилватели, транзистори и др.

Зависимите източници могат да бъдат линейни или нелинейни и често се представят в ромб, вместо в кръг (фиг. 1.27).



Фиг. 1.27. Условни означения на линейни зависими източници

Съществуват четири типа линейни зависими източници:

- **Зависим източник на напрежение, управляван с напрежение** - условното му означение е показано на фиг. 1.27а, а големината на източника се определя съгласно:

$$e = A_U \cdot u_{ab}, \quad (1.20)$$

където u_{ab} е напрежението между точките a и b (намиращи се някъде във веригата) във $[V]$, а A_U - безразмерен коефициент.

- **Зависим източник на напрежение, управляван с ток** - условното му означение е показано на фиг. 1.27б, а големината на източника се определя съгласно:

$$e = A_R \cdot i_{ab}, \quad (1.21)$$

където i_{ab} е големината на тока, течащ между точките a и b в $[A]$, а A_R - коефициент с размерност в $[\Omega]$.

- **Зависим източник на ток, управляван с напрежение** - условното му означение е показано на фиг. 1.27в, а големината на източника се определя съгласно:

$$i = A_G \cdot u_{ab}, \quad (1.22)$$

където A_G е коефициент с размерност в $[S]$.

- **Зависим източник на ток, управляван с ток** - условното му означение е представено на фиг. 1.27г, а големината му се определя съгласно:

$$i = A_I \cdot i_{ab}, \quad (1.23)$$

където A_I е безразмерен коефициент.

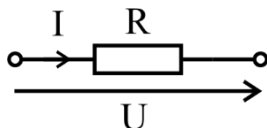
1.3. Основни закони в електрическите вериги

1.3.1. Закон на Ом

Законът на Ом може да се дефинира за два случая:

Закон на Ом за пасивен участък

Един участък от верига е пасивен, ако не съдържа източници (фиг. 1.28), като в посочената схема посоката на тока и напрежението по правило съвпадат.



Фиг. 1.28. Пасивен участък от верига

Законът на Ом за пасивен участък гласи, че ако върху участък от верига със съпротивление R се приложи напрежение U , през него протича ток с големина I :

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1.24)$$

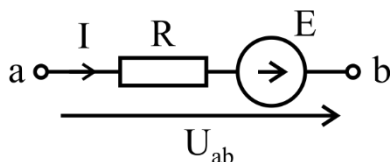
Закон на Ом за активен участък

Един участък от верига се нарича *активен*, ако съдържа източник. Законът на Ом за активен участък може да се дефинира за клон, съдържащ последователно съединени източник на напрежение с големина E и резистор със съпротивление R .

Ако към такава верига се приложи напрежение U_{ab} , то големината на тока I се определя съгласно:

$$I = \frac{U_a - U_b \pm E}{R} = \frac{U_{ab} \pm E}{R}, \quad (1.25)$$

където U_a и U_b са потенциалите във [V], съответно на т. a и т. b . Знакът пред E е плюс (+), когато посоката на източника съвпада с посоката на тока и минус (-) - когато не съвпада.



Фиг. 1.29. Активен участък от верига

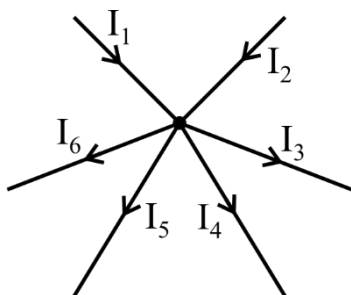
1.3.2. Първи закон на Кирхоф

Първият закон на Кирхоф (ПЗК) се отнася за възел от електрическа верига. Той гласи, че сумата от влизащите в един възел токове $\sum I_{\text{вл}}$ е равна на сумата от излизащите $\sum I_{\text{изл}}$:

$$\sum I_{\text{вл}} = \sum I_{\text{изл}}. \quad (1.26)$$

Един ток се смята за влизащ, ако посоката му сочи към възела, а за излизащ - ако посока му е (навън) от възела. Ето защо в английската литература този закон се нарича *Закон на Кирхоф за токовете*.

Пример 1.7. За схемата от фиг. 1.30 да се запише уравнение по ПЗК.



Фиг. 1.30. Схема към пример 1.7

Решение: За дадения възел токовете I_1 и I_2 са влизащи, а I_3 , I_4 , I_5 и I_6 - излизащи. Следователно може да се запише следното уравнение по ПЗК:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5 + I_6.$$

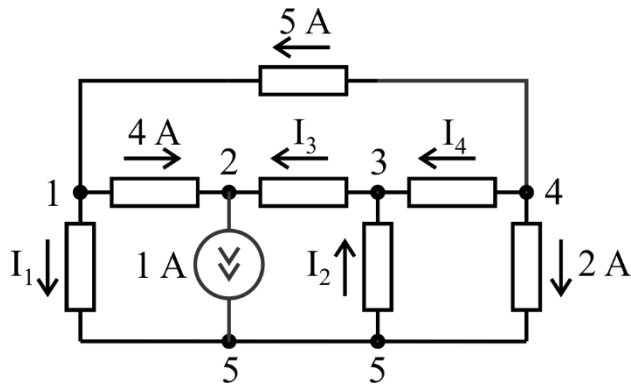
Пример 1.8. За веригата от фиг. 1.31 да се определят неизвестните токове.

Решение: За възел 1 може да се запише следното уравнение по ПЗК:

$$5 = I_1 + 4 \rightarrow I_1 = 1 \text{ A.}$$

За възел 4 може да се запише следното уравнение по ПЗК:

$$I_4 + 5 + 2 = 0 \rightarrow I_4 = -7 \text{ A.}$$



Фиг. 1.31. Схема към пример 1.8

От възел 2 може да се изрази токът I_3 :

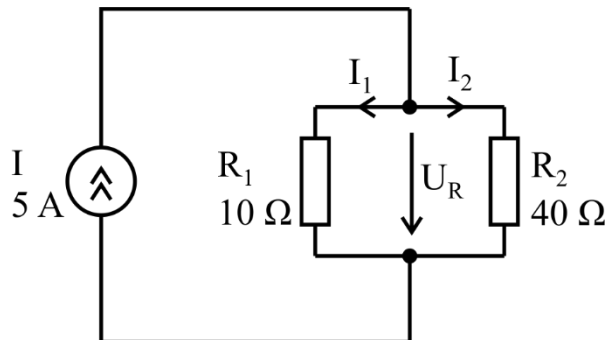
$$I_3 + 4 = 1 \rightarrow I_3 = -3 \text{ A.}$$

Аналогично от възел 3 може да се изрази токът I_2 :

$$I_2 + I_4 = I_3 \rightarrow I_2 = I_3 - I_4 = -3 - (-7) = 4 \text{ A.}$$

Забележка: Второто уравнение ($I_4 + 5 + 2 = 0$) от последния пример може да изглежда грешно, тъй като всички токове влизат и нито един не излиза, но това не е така. Посоките на токовете се избират напълно случайно и не винаги означената посока съвпада с реалната. Ситуациите, при които даден ток се получи отрицателен, показват, че реалната му посока е противоположна на избраната. Именно това означава и отрицателната големина на токовете I_3 и I_4 от пример 1.8.

Пример 1.9. Делител на ток (фиг. 1.32).



Фиг. 1.32. Схема към пример 1.9

Решение: За схемата от фиг. 1.32 двата резистора са свързани паралелно, т.е. тяхното напрежение U_R е едно и също. Това позволява токовете им да бъдат изразени чрез Закона на Ом:

$$I_1 = \frac{U_R}{R_1} \quad I_2 = \frac{U_R}{R_2}.$$

Може да се запише и едно уравнение по ПЗК:

$$I = I_1 + I_2.$$

Съотношението между I_1 и I става:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{U_R}{R_1}}{\frac{U_R}{R_1} + \frac{U_R}{R_2}} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Следователно за тока през резистор R_1 се получава:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5 \frac{40}{10 + 40} = 4 \text{ A}.$$

По аналогичен начин може да се определи токът през резистор R_2 :

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 5 \frac{10}{10 + 40} = 1 \text{ A}.$$

Вижда се, че входният ток I се разделя между двата резистора в съотношение, обратнопропорционално на техните съпротивления:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \rightarrow \quad \frac{4 \text{ V}}{1 \text{ V}} = \frac{40 \Omega}{10 \Omega}.$$

3.2.1. Втори закон на Кирхоф

Вторият закон на Кирхоф (ВЗК) се отнася за затворен контур от електрическа верига. В най-общия случай той гласи, че алгебричната сума от падовете на напреженията в един затворен контур е нула.

$$\sum U_k = 0. \quad (1.27)$$

Но в рамките на този учебник ще се използва друга формулировка, която гласи: в един затворен контур, алгебричната сума от големините на източниците на напрежение $\sum E_k$ е равна на алгебричната сума от падовете на напрежения върху консуматорите $\sum U_k$:

$$\sum E_k = \sum U_k. \quad (1.28)$$

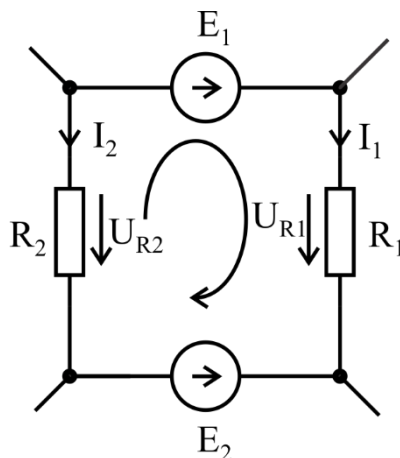
При записване на уравнение по ВЗК се вземат предвид следните особености:

- посоката на затворения контур се избира случайно;
- посоките на падовете на напреженията на консуматорите (резисторите) съвпадат с избраните посоки на токовете;
- ако посоката на даден източник на напрежение съвпада с посоката на контура, той участва със знак плюс (+), а ако не съвпада - със знак минус (-);
- ако посоката на тока на даден резистор съвпада с посоката на контура, то неговото напрежение участва със знак плюс (+), а в противен случай - със знак минус (-).

Пример 1.10. За схемата от фиг. 1.33 да се запише уравнение по ВЗК.

Решение: За дадената верига се вижда, че затвореният контур минава през 4 елемента: два източника и два резистора. Посоката на източника E_1 съвпада с

посоката на контура, а посоката на E_2 - не съвпада. По аналогичен начин се вижда, че посоката на тока I_1 съвпада с посоката на контура, а посоката на тока I_2 - не съвпада.



Фиг. 1.33. Схема към пример 1.10

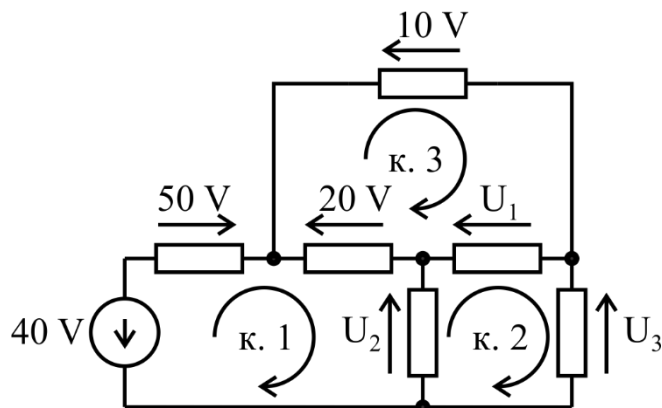
Следователно може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$\sum E_k = \sum U_k \quad \rightarrow \quad E_1 - E_2 = U_{R1} - U_{R2}.$$

Ако в горното уравнение се приложи и Законът на Ом, се получава:

$$E_1 - E_2 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2.$$

Пример 1.11. За схемата от фиг. 1.34 са дадени напреженията на някои от елементите. Използвайки Втория закон на Кирхоф, да се определят неизвестните падове на напрежения върху резисторите.



Фиг. 1.34. Схема към пример 1.11

Решение: За затворен контур к. 1, в който има един източник и три резистора, може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$\sum E_k = \sum U_k \quad \rightarrow \quad -40 = 50 - 20 - U_2.$$

Следователно за пада на напрежение U_2 се получава:

$$\rightarrow U_2 = 70 \text{ V}.$$

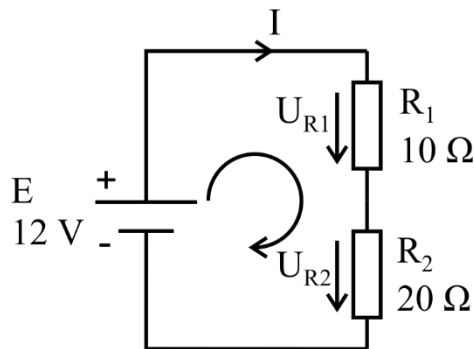
По аналогичен начин може да се запише уравнение за контур к.3, в който има три резистора и няма източници:

$$\sum E_k = \sum U_k \quad \rightarrow \quad 0 = U_1 + 20 - 10 \\ \rightarrow U_1 = -10 \text{ V.}$$

В контур к3 има три резистора, съответно уравнението по ВЗК добива следния вид:

$$\sum E_k = \sum U_k \quad \rightarrow \quad 0 = U_2 - U_1 - U_3 \\ \rightarrow U_3 = U_2 - U_1 = 70 - (-10) = 80 \text{ V.}$$

Пример 1.12. Делител на напрежение (фиг. 1.12)



Фиг. 1.35. Схема към пример 1.12

Решение: За дадената схема могат да се определят напреженията върху резисторите, съгласно Закона на Ом (през двата резистора тече един и същ ток I):

$$U_{R1} = I \cdot R_1;$$

$$U_{R2} = I \cdot R_2.$$

Също така може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$E = U_{R1} + U_{R2}.$$

Следователно за отношението между U_{R1} и E се получава:

$$\frac{U_{R1}}{E} = \frac{U_{R1}}{U_{R1} + U_{R2}} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_1 + I \cdot R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

а падът на напрежение върху резистор R_1 е:

$$U_{R1} = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{10}{10 + 20} = 4 \text{ V.}$$

Аналогично може да се изведе, че падът на напрежение върху R_2 е:

$$U_{R2} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{20}{10 + 20} = 8 \text{ V.}$$

Вижда се, че захранващото напрежение E се разделя между двата резистора в същото съотношение като съотношението на техните съпротивления:

$$\frac{U_{R1}}{U_{R2}} = \frac{R_1}{R_2} \rightarrow \frac{4 \text{ V}}{8 \text{ V}} = \frac{10 \Omega}{20 \Omega}.$$

Делителите на напрежение намират широко приложение в практиката, когато е нужно дадено относително по-високо напрежение да бъде понижено до по-ниско.

1.3.3. Енергия и мощност

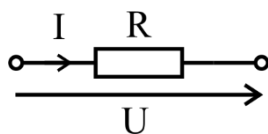
По-рано стана ясно, че когато върху свободен токоносител (заряд) действа електрическо поле, това води до неговото изместване в пространството, т.е. полето изразходва някаква енергия за преместването на заряда. Енергията се измерва в **Джаули [J]**, но тази величина не винаги е удобна за работа, тъй като не става ясно колко време отнема изразходването ѝ.

Ето защо е въведена величината **мощност**, чиято измервателна единица е **Ват [W]**. Тя показва каква енергия се изразходва за единица време (за 1 секунда), т.е.:

$$1 [W] = \frac{1 [J]}{1 [s]}. \quad (1.29)$$

Съгласно Закона за мощността (още известен като Закон на Джаул-Ленц), ако върху даден участък от верига има пад на напрежение U , в резултат на което тече ток I (фиг. 1.36), разсейваната в този участък мощност е:

$$P = U \cdot I. \quad (1.30)$$



Фиг. 1.36. Участък от електрическа верига с напрежение U и ток I

Ако в уравнение (1.30) се положи Законът на Ом ($U = I \cdot R$ или $I = \frac{U}{R}$), се получават още две разновидности на Закона за мощността:

$$P = U \cdot I = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R; \quad (1.31)$$

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}. \quad (1.32)$$

Пример 1.13. Да се определи каква енергия консумира крушка с мощност 100 W , ако работи в продължение на 1 час.

Решение: Един час има 3600 секунди. Отчитайки връзката между енергия и мощност ($1 [W] = \frac{1 [J]}{1 [s]}$), за да се определи консумираната енергия, е необходимо да се умножат мощността по времето:

$$A = P \cdot 3600 = 100 \cdot 3600 = 360000 \text{ J}.$$

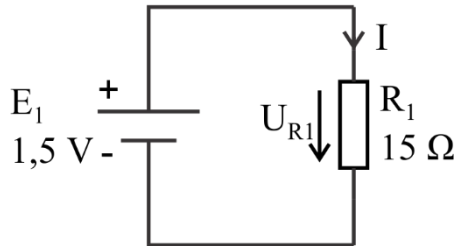
В практиката по-често се използва единицата Киловатчас [$kW \cdot h$], която има следния смисъл:

$$1 \text{ kW} \cdot h = 1000 \text{ W} \cdot 1 \text{ h} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Следователно енергията, изразходвана от крушката, може да се изрази и в киловатчаса:

$$A = 360000 \text{ J} = 0,1 \text{ kW} \cdot h.$$

Пример 1.14. За схемата от фиг. 1.37 да се определи разсейваната мощност в резистора.



Фиг. 1.37. Схема към пример 1.14

Решение: За дадената схема може да се запише уравнение по ВЗК (или по Закона на Ом), откъдето да се изрази токът във веригата:

$$E_1 = U_{R1} = I \cdot R_1 \quad \rightarrow \quad I = \frac{E_1}{R_1} = \frac{1,5}{15} = 0,1 \text{ A}.$$

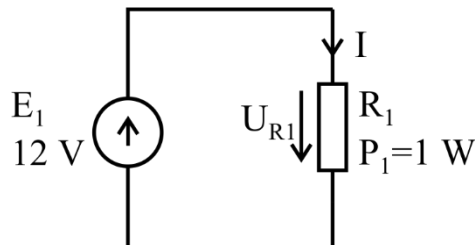
От ВЗК се вижда, че напрежението на резистора е равно на напрежението на източника ($U_{R1} = E_1$). Следователната разсейваната мощност в резистора е:

$$P_1 = U_{R1} \cdot I = 1,5 \cdot 0,1 = 0,15 \text{ W} = 150 \text{ mW}.$$

Същата мощност може да се определи и като се използва една от разновидностите на Закона на Джаул-Ленц:

$$P_1 = \frac{U_{R1}^2}{R_1} = \frac{1,5^2}{15} = 0,15 \text{ W}.$$

Пример 1.15. За схемата от фиг. 1.38 да се определят съпротивлението и токът на LED лампа, разсейваща 1 W мощност при напрежение 12 V .



Фиг. 1.38. Схема към пример 1.15

Решение: Съпротивлението на LED-а може да се определи чрез една от разновидностите на Закона на Джаул-Ленц:

$$P_1 = \frac{U_{R1}^2}{R_1} \quad \rightarrow \quad R_1 = \frac{U_{R1}^2}{P_1} = \frac{12^2}{1} = 144 \Omega.$$

Токът във веригата може да бъде определен по два начин:

- чрез Закона на Джаул-Ленц:

$$P_1 = I \cdot U_{R1} \rightarrow I = \frac{P_1}{U_{R1}} = \frac{1}{12} = 0,083 \text{ A} = 83 \text{ mA};$$

- чрез Закона на Ом:

$$I = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{12}{144} = 83 \text{ mA}.$$

Баланс на мощностите

Природният Закон за запазване на енергията е в сила и за електрическите вериги, като в случая той се нарича **баланс на мощностите**. Балансът на мощностите гласи, че сумата от консумираните (разсейваните) мощности в една електрическа верига е равна на сумата от отделяните мощности от източниците:

$$\sum P_{\text{КОНС}} = \sum P_{\text{ИЗТ}} \quad (1.33)$$

Консумираната мощността $P_{\text{КОНС}}$ от резистор R , по който тече ток I , може да се определи съгласно:

$$P_{\text{КОНС}} = I^2 \cdot R, \quad (1.34)$$

а отделяната от източниците мощност $P_{\text{ИЗТ}}$, е:

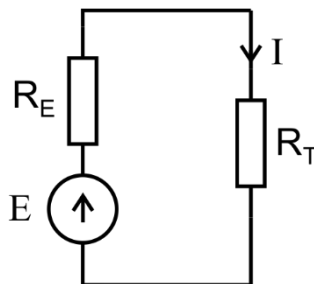
$$P_{\text{ИЗТ}} = U_{\text{ИЗТ}} \cdot I_{\text{ИЗТ}}, \quad (1.35)$$

където $U_{\text{ИЗТ}}$ и $I_{\text{ИЗТ}}$ са съответно напрежението и токът на източника.

Теорема за предаване на максимална мощност

Една много важна теорема, свързана с мощността, е т.нар. Теорема за предаване на максимална мощност. Тя има следната постановка:

- **Даден е** реален източник с напрежение E с вътрешно съпротивление R_E , чиито стойности са константи (фиг. 1.39).
- **Целта е** да се определи при каква големина на товарното съпротивление R_T до него ще достига максимална мощност.



Фиг. 1.39. Схема към Теоремата за предаване на максимална мощност

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 1. Въведение в електротехниката

За решението на тази теорема първо се определя токът във веригата (например, чрез ВЗК):

$$E = I \cdot R_E + I \cdot R_T \quad \rightarrow \quad I = \frac{E}{R_E + R_T}. \quad (1.36)$$

Следователно разсейваната в товара R_T мощност е:

$$P_T = I^2 R_T = \frac{E^2}{(R_E + R_T)^2} R_T = \frac{E^2}{\frac{(R_E + R_T)^2}{R_T}} = \frac{E^2}{\frac{R_E^2}{R_T} + 2R_E + R_T}. \quad (1.37)$$

Тъй като E и R_E са константи, мощността P_T ще бъде максимална тогава и само тогава, когато знаменателят $\frac{R_E^2}{R_T} + 2R_E + R_T$ е минимален. За да бъде определено условието за минималност е необходимо знаменателят да се диференцира спрямо R_T , т.е.:

$$\frac{d\left(\frac{R_E^2}{R_T} + 2R_E + R_T\right)}{dR_T} = 0. \quad (1.38)$$

Решението на уравнение (1.38) е:

$$-\frac{R_E^2}{R_T^2} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad R_T = R_E. \quad (1.39)$$

Следователно източникът ще предава максимална мощност към товара тогава и само тогава, когато съпротивлението на товара е равно на това на източника:

$$R_T = R_E. \quad (1.40)$$

Тема 2. Анализ на линейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

В практиката е изключително важно да се знае какви токове текат във веригите и каква мощност се разсейва в нейните елементи. Това позволява правилното им оразмеряване и повишаването на надеждността на електрообзавеждането.

Например, ако към тонколона с максимална мощност 100 W се подаде аудио сигнал с мощност 250 W , това неминуемо ще доведе до нейното повреждане. Аналогично, ако към даден източник се свърже товар, който консумира твърде голяма мощност, източникът няма да е в състояние да я осигури, което може да доведе до дефект и в двата уреда.

Ето защо една от най-важните задачи в електротехниката е анализът на електрически вериги, като обикновено са известни следните входни данни:

- Електрическата схема на веригата;
- Големините на токовете/напряженията на източниците;
- Съпротивленията и/или мощностите на консуматорите.

Анализът се свежда до две основни стъпки:

1. Определяне на токовете във веригата;
2. Определяне на мощностите във веригата.

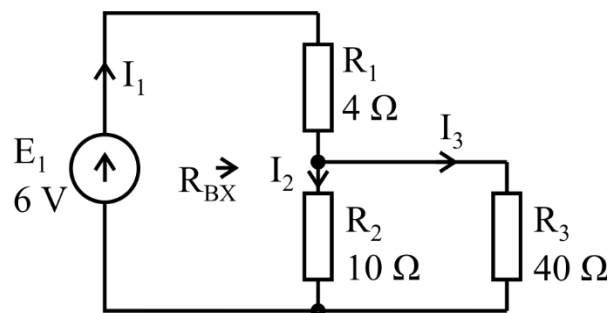
В тази тема ще бъдат разгледани редица методи за анализ на линейни електрически вериги за постоянен ток.

2.1. Анализ чрез Закона на Ом

Сравнително прости вериги, съдържащи само един източник, могат да бъдат анализирани използвайки Закона на Ом. Анализът по този метод включва следните основни стъпки:

1. Определя се еквивалентното съпротивление на веригата;
2. Създава се еквивалентна заместваща схема и се определя токът през източника;
3. Определят се останалите токове, напряжения и мощности във веригата.

Пример 2.1. За схемата от фиг. 2.1 да се определят токовете във веригата (чрез Закона на Ом) и да се провери балансът на мощностите.

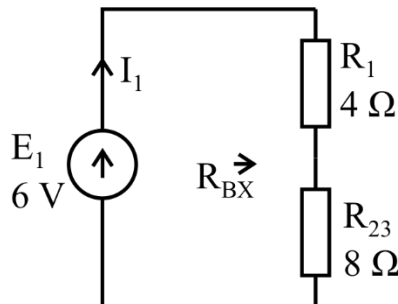


Фиг. 2.1. Схема към пример 2.1

Решение: Необходимо е да се определи входното съпротивление R_{BX} на резисторите, гледани от към източника. В случая R_2 и R_3 са свързани паралелно, т.е. могат да бъдат заменени с еквивалентния резистор R_{23} :

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \Omega.$$

Това позволява да се създаде еквивалентна заместваща схема, както е показано на фиг. 2.2, в която резисторите R_2 и R_3 са заменени от R_{23} .

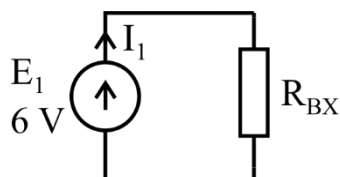


Фиг. 2.2. Еквивалентна заместваща схема 1

Резисторите R_1 и R_{23} са свързани последователно, т.е. входното съпротивление R_{BX} може да се определи с:

$$R_{BX} = R_1 + R_{23} = 4 + 8 = 12 \Omega.$$

Вече може да се създаде еквивалентната заместваща схема от фиг. 2.3, в която всички резистори са заменени с еквивалентния R_{BX} .



Фиг. 2.3. Еквивалентна заместваща схема 2

От фиг. 2.3 лесно може да се определи токът I_1 във веригата, използвайки Закона на Ом:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_{BX}} = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ A}.$$

Тъй като токът I_1 , протичащ през еквивалентното съпротивление отфиг. 2.3 е същият, който тече във фиг. 2.2, напрежението на еквивалентният резистор U_{R23} може да се определи съгласно Закона на Ом:

$$U_{R23} = I_1 \cdot R_{23} = 0,5 \cdot 8 = 4 \text{ V}.$$

Тъй като R_2 и R_3 (от фиг. 2.1) са свързани паралелно, напрежението върху тях е едно и също:

$$U_{R2} = U_{R3} = U_{R23} = 4 \text{ V}.$$

Това позволява да се определят и другите два тока (от фиг. 2.1), отново прилагайки Закона на Ом:

$$I_2 = \frac{U_{R23}}{R_2} = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{U_{R23}}{R_3} = \frac{4}{40} = 0,1 \text{ A}.$$

Знаейки токовете във веригата, лесно може да се определят мощностите, разсейвани в елементите на веригата:

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 0,5^2 \cdot 4 = 1 \text{ W};$$

$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 0,4^2 \cdot 10 = 1,6 \text{ W};$$

$$P_{R3} = I_3^2 \cdot R_3 = 0,1^2 \cdot 40 = 0,4 \text{ W}.$$

Отделяната от източника мощност е:

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_1 = 6,0,5 = 3 \text{ W}.$$

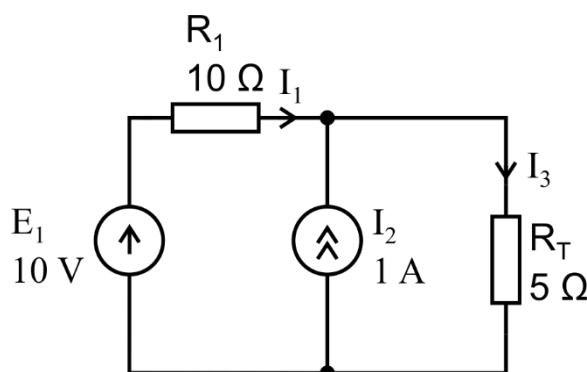
Вижда се, че балансът на мощностите излиза, т.е. задачата е решена правилно:

$$\sum P_{\text{ИЗТ}} = \sum P_{\text{КОНС}} \rightarrow P_{E1} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 3 \text{ W}.$$

2.2. Анализ чрез използване на еквивалентни източници

Съществуват много ситуации, при които схемата може значително да се опрости, ако реален източник на ток се замени с еквивалентен реален източник на напрежение или обратното.

Пример 2.2. За схемата от фиг. 2.4 да се определи мощността на товара R_T .



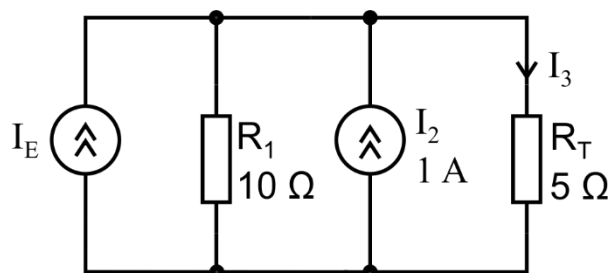
Фиг. 2.4. Схема към пример 2.2

Решение: В случая реалният източник на напрежение (включващ E_1 и R_1) може да бъде заменен с еквивалентен реален източник на ток (включващ I_E и R_1), както е показано на фиг. 2.5. Големината на еквивалентния източник на ток I_E е:

$$I_E = \frac{E_1}{R_1} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A}.$$

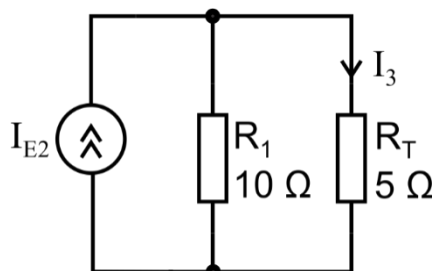
В последната схема съществуват два източника на ток, които са свързани паралелно и съпосочно (с една и съща посока). Това позволява те да бъдат заменени с един еквивалентен източник I_{E2} , чиято големина е:

$$I_{E2} = I_E + I_2 = 1 + 1 = 2 \text{ A}.$$



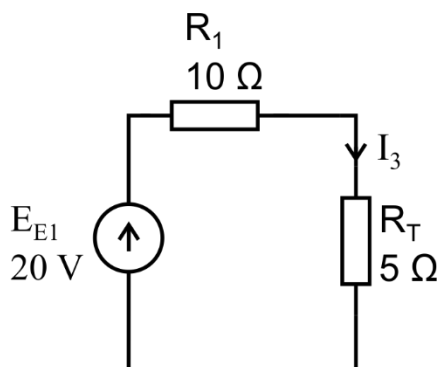
Фиг. 2.5. Първа еквивалентна заместваща схема към пример 2.2

Получава се нова еквивалентна заместваща схема (фиг. 2.6).



Фиг. 2.6. Втора еквивалентна заместваща схема към пример 2.2

Тя може да се опрости още повече, като реалният източник на ток (включващ I_{E2} и R_1) се замени с еквивалентен реален източник на напрежение (включващ E_{E1} и R_1), както е показано на фиг.3.7.



Фиг. 2.7. Трета еквивалентна заместваща схема към пример 2.2

От нея може лесно да се определи токът I_3 във веригата, използвайки Закона на Ом (резисторите R_1 и R_T са свързани последователно, т.е. еквивалентната им стойност е $R_1 + R_T$) или Втория закон на Кирхоф:

$$I_3 = \frac{E_{E1}}{R_1 + R_T} = \frac{20}{10 + 5} = 1,33 \text{ A.}$$

Следователно разсейваната в товара мощност е:

$$P_{RT} = I_3^2 \cdot R_T = 1,33^2 \cdot 5 = 8,88 \text{ W.}$$

2.3. Теорема за суперпозицията

Една много важна теорема в електрическите вериги е т.н. Теорема за суперпозицията, известна още като **Принцип на наслагването**.

Тема 2. Анализ на линейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

Теоремата гласи, че токовете и напреженията в една линейна електрическа верига, съдържаща повече от един източник на ток/напрежение, се формират като алгебрична сума от въздействията на всеки източник по отделно.

Тази теорема позволява да се анализират сложни електрически вериги (с повече от един източници) прилагайки следните правила:

1. Веригата се анализира за всеки източник по отделно, като всички останали източници се премахват:

- Източниците на напрежение се заменят с късо съединение;
- Източниците на ток се заменят с прекъсната верига (празен ход).

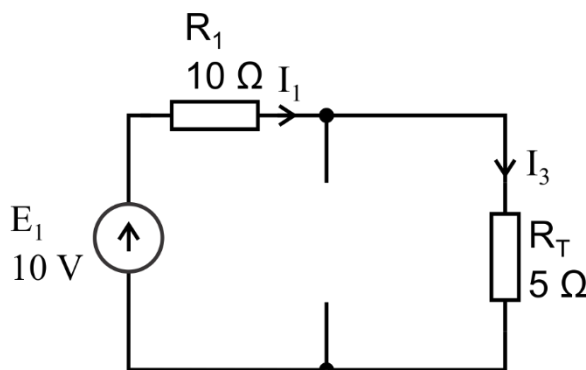
2. Токовете и напреженията във веригата се определят като алгебрична сума от въздействията на отделните източници.

Пример 2.3. Да се анализира схемата от предходния пример (фиг. 2.4) чрез прилагане на Принципа на наслагването и да се определят токът и мощността на товара R_T .

Решение: Схемата съдържа два източника, така че може да се анализира за всеки от тях по отделно.

Действа само E_1

Източникът на ток се заменя с прекъсната верига, както е показано на фиг. 2.8.



Фиг. 2.8. Първа междинна схема към пример 2.3

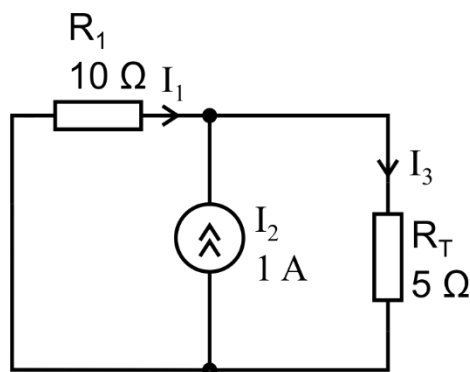
Получава се едноконтурна верига, т.е. токът през товара, дължащ се на източникът E_1 , е:

$$I_3^{(E1)} = \frac{E_1}{R_1 + R_T} = \frac{10}{10 + 5} = 0,667 \text{ A.}$$

Действа само I_2

Източникът на напрежение E_1 се заменя с късо съединение, както е показано на фиг. 2.9. Схемата се явява делител на ток и следователно токът през товара, дължащ се на източника I_2 , може да се определи както е показано в пример 1.9:

$$I_3^{(I2)} = I_2 \frac{R_1}{R_1 + R_T} = 1 \frac{10}{10 + 5} = 0,667 \text{ A.}$$



Фиг. 2.9. Втора междинна схема към пример 2.3

Общият ток през товара се формира като се сумират съставките, дължащи се на двата източника:

$$I_3 = I_3^{(E1)} + I_3^{(I2)} = 0,667 + 0,667 = 1,33 \text{ A},$$

а за мощността, разсейвана от товара, отново се получава:

$$P_{RT} = I_3^2 \cdot R_T = 1,33^2 \cdot 5 = 8,88 \text{ W}.$$

2.4. Метод със законите на Кирхоф

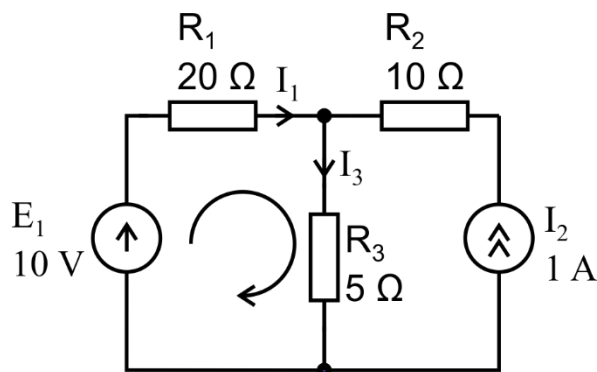
Методът със законите на Кирхоф е базиран на директно приложение на законите на Кирхоф. При него целта е да се състави система от уравнения, в която неизвестните величини са неизвестните клонови токове във веригата. Основните правила при този метод са:

1. Броят на уравненията в системата е равен на броя на неизвестните клонови токове;
2. Ако клон съдържа източник на ток, неговият ток е известен;
3. Ако N_B е броят на възлите във веригата, записват се $N_B - 1$ уравнения по ПЗК;
4. Недостигащите уравнения се записват по ВЗК като посоките на затворените контури се избират случайно;
5. По този метод не бива да се затваря контур през източник на ток, тъй като неговото напрежение не е известно;
6. След решаване на системата се определят токовете, напреженията и мощностите във веригата.

Пример 2.4. За схемата от фиг. 2.10 да се определят токовете и мощностите на резисторите, използвайки метода със законите на Кирхоф.

Решение: Схемата съдържа един източник на ток (I_2), т.е. има два неизвестни тока (I_1 и I_3), което означава, че е нужна система с две уравнения. В схемата има два възела, т.е. може да се запише само едно уравнение по ПЗК за един от тях. Например, токовете I_1 и I_2 влизат в горния възел, а I_3 излиза от него, т.е.:

$$I_1 + I_2 = I_3.$$



Фиг. 2.10. Схема към пример 2.4

Второто уравнение следва да се запише по ВЗК. Тъй като по този метод не е допустимо да се затваря контур през източник на ток, има само един възможен път на обхождане (посочен на схемата). Вижда се, че посоката на източника E_1 съвпада с тази на контура. Аналогично посоката на токовете I_1 и I_3 също съвпадат с посоката на контура. Следователно уравнението по ВЗК е:

$$E_1 = I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3.$$

Двете уравнения се решават в система:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 = I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = -I_1 + I_3 \\ 10 = 20I_1 + 5I_3 \end{cases}$$

Системата се записва в матрична форма:

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \end{vmatrix}.$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \text{Det} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = -1.5 - 1.20 = -25;$$

$$\Delta_1 = \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 1.10 - 1.5 = 5;$$

$$\Delta_3 = \text{Det} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 20 & 10 \end{vmatrix} = -1.10 - 1.20 = -30.$$

Следователно неизвестните клонови токове във веригата са:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-25} = -0,2 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-30}{-25} = 1,2 \text{ A}.$$

Мощностите, разсейвани от резисторите, са:

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = (-0,2)^2 \cdot 20 = 0,8 \text{ W};$$

$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 1^2 \cdot 10 = 10 \text{ W};$$

$$P_{R3} = I_3^2 \cdot R_3 = 1,2^2 \cdot 5 = 7,2 \text{ W}.$$

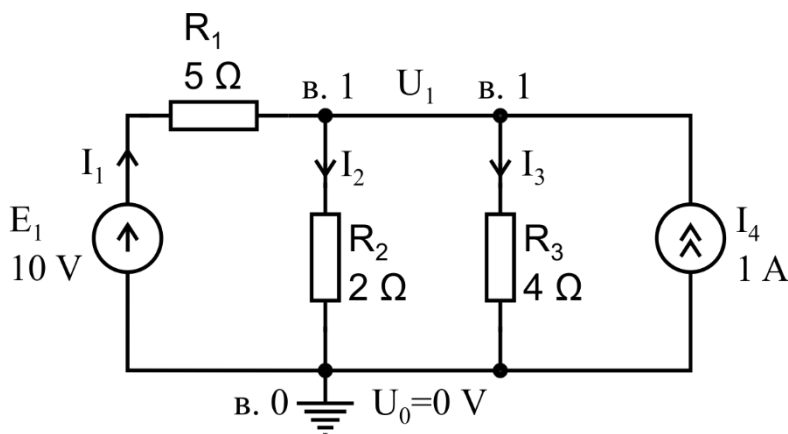
2.5. Метод с възловите потенциали

Методът с възловите потенциали е базиран на ПЗК и Закона на Ом. При него целта е да се състави система от уравнения, в която неизвестните величини са възловите потенциали във веригата. Основните правила при този метод са:

1. Единият от възлите (кой да е) във веригата се заземява, т.е. приема се, че неговият потенциал е равен на 0 V ;
2. Ако N_B е броят на възлите във веригата, се записват $N_B - 1$ уравнения по ПЗК;
3. Всеки от неизвестните токове във веригата се изразява чрез възловите потенциали и Закона на Ом, след което се заместват в уравненията по ПЗК;
4. Ако някой от клоновете съдържа източник на ток, неговата големина е известна;
5. Системата се решава и се определят възловите потенциали;
6. Определят се клоновите токове, използвайки уравненията по Закона на Ом от т. 3.

Пример 2.5. За схемата от фиг. 2.11 да се определят токовете и мощностите на резисторите, използвайки метода с възловите потенциали.

Решение: На пръв поглед веригата съдържа 4 възела, но между горните два възела няма никакви елементи, т.е. двата възела имат един и същ потенциал. Аналогично долните два възела също имат един и същ потенциал (защото между тях няма елемент). По тази причина схемата има само 2 възела - възел 0 (долу) и възел 1 (горе).



Фиг. 2.11. Схема към пример 2.5

Заземява се един от двата възела (например долния), както е показано на фигурата. Това означава, че потенциалът на възел 0 е $U_0 = 0\text{ V}$. Остава един единствен неизвестен възлов потенциал (U_1), т.е. необходимо е само едно уравнение по ПЗК.

Токовете I_1 и I_4 влизат в горния възел, а токовете I_2 и I_3 - излизат. Следователно уравнението по ПЗК е:

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3 \quad \rightarrow \quad I_1 + 1 = I_2 + I_3.$$

Трите неизвестни тока се изразяват чрез Закона на Ом, използвайки следната логика:

- Токът I_1 започва във възел 0 и свършва във възел 1, като минава през източника E_1 (чиято посока съвпада с посоката на тока) и резистора R_1 . Следователно може да се запише:

$$I_1 = \frac{U_0 - U_1 + E_1}{R_1} = \frac{0 - U_1 + 10}{5} = 2 - 0,2U_1.$$

- Токът I_2 започва от възел 1 и свършва във възел 0, като минава през резистора R_2 , т.е. може да се запише:

$$I_2 = \frac{U_1 - U_0}{R_2} = \frac{U_1 - 0}{2} = 0,5U_1.$$

- Токът I_3 започва от възел 1 и свършва във възел 0, като минава през резистора R_3 , т.е. може да се запише:

$$I_3 = \frac{U_1 - U_0}{R_3} = \frac{U_1 - 0}{4} = 0,25U_1.$$

Трите тока се заместват в уравнението по ПЗК:

$$I_1 + 1 = I_2 + I_3 \rightarrow 2 - 0,2U_1 + 1 = 0,5U_1 + 0,25U_1,$$

откъдето се определя потенциала на възел 1:

$$3 = 0,95U_1 \rightarrow U_1 = 3,16 \text{ V}.$$

Последният се замества в получените уравнения по закона на Ом, за да се определят клоновите токове:

$$I_1 = 2 - 0,2U_1 = 2 - 0,2 \cdot 3,16 = 1,37 \text{ A};$$

$$I_2 = 0,5U_1 = 1,58 \text{ A};$$

$$I_3 = 0,25U_1 = 0,79 \text{ A}.$$

Следователно разсейваните мощности във веригата са:

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 1,37^2 \cdot 5 = 9,39 \text{ W};$$

$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 1,58^2 \cdot 2 = 4,99 \text{ W};$$

$$P_{R3} = I_3^2 \cdot R_3 = 0,79^2 \cdot 4 = 2,50 \text{ W}.$$

2.6. Метод с контурните токове

Методът с контурните токове е базиран на ВЗК. При него целта е да се състави система от уравнения, в която неизвестните величини са контурните токове във веригата. Основните правила при този метод са:

1. Избират се достатъчен брой затворени контури, така че да се обходят всички елементи във веригата. Прието е всички контури да се въртят по часовниковата стрелка;

2. По всеки затворен контур тече контурен ток $I_n^{(k)}$;

3. Ако някой от контурните токове минава през източник на ток, неговата големина е равна на тази на източника;

Забележка: Един контурен ток не може да минава през повече от един източник на ток.

4. За всеки от неизвестните контурни токове се записва уравнение по ВЗК, като от падовете на напрежение, дължащи се на контурен ток $I_n^{(k)}$, се изваждат падовете на напрежение, дължащи се на други контурни токове, минаващи през същите резистори;

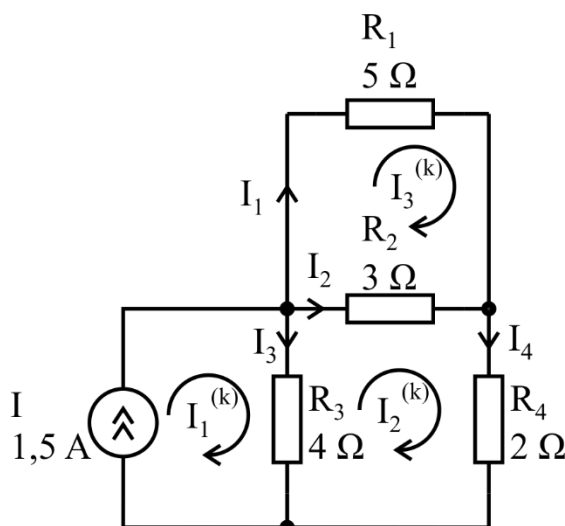
5. Решава се системата и се определят контурните токове $I_m^{(k)}$;

6. Клоновите токове се изразяват като алгебрична сума от минаващите през тях контурни токове:

$$I_n = \sum I_m^{(k)}. \quad (2.1)$$

Забележка: Този метод е приложим единствено в линейни електрически вериги.

Пример 2.6. За схемата от фиг. 2.12 да се определят токовете и мощностите на резисторите, използвайки метода с контурните токове.



Фиг. 2.12. Схема към пример 2.6

Решение: Елементите на веригата могат да се обходят с три контурни тока, както е показано на фиг. 2.12. Един от тях ($I_1^{(k)}$) минава през източник на ток, като посоките им съвпадат, т.е. големината му е известна:

$$I_1^{(k)} = 1,5 \text{ A.}$$

Записва се уравнение за контур $I_3^{(k)}$, както следва:

- контурът минава през резисторите R_1 и R_2 , т.е. се записва:

$$0 = I_3^{(k)}(R_1 + R_2),$$

- но през R_2 също така минава контур $I_2^{(k)}$, при това с противоположна посока, т.е. необходимо е да се извади въздействието на $I_2^{(k)}$:

$$0 = I_3^{(k)}(R_1 + R_2) - I_2^{(k)} \cdot R_2.$$

По аналогичен начин се записва уравнение за контур $I_2^{(k)}$:

- контурът минава през резисторите R_2 , R_3 и R_4 , т.е.:

$$0 = I_2^{(k)}(R_2 + R_3 + R_4),$$

- но през R_2 също така минава $I_3^{(k)}$ с противоположна посока, а през R_3 - $I_1^{(k)}$ с противоположна посока. С други думи, трябва да се извадят и техните въздействия:

$$0 = I_2^{(k)}(R_2 + R_3 + R_4) - I_1^{(k)} \cdot R_3 - I_3^{(k)} \cdot R_2.$$

Като резултат се получава следната система от уравнения:

$$\begin{cases} 0 = I_3^{(k)}(R_1 + R_2) - I_2^{(k)} \cdot R_2 \\ 0 = I_2^{(k)}(R_2 + R_3 + R_4) - I_1^{(k)} \cdot R_3 - I_3^{(k)} \cdot R_2 \end{cases}.$$

Системата се преобразува в матричен вид:

$$\begin{cases} 0 = 8I_3^k - 3I_2^k \\ 0 = 9I_2^k - 4.1,5 - 3I_3^k \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} I_2^k & I_3^k \\ -3 & 8 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Определят се детерминантите:

$$\Delta = \text{Det} \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 72 = -63;$$

$$\Delta_2 = \text{Det} \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -48;$$

$$\Delta_3 = \text{Det} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = -18.$$

Следователно контурните токове във веригата са:

$$I_2^k = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-48}{-63} = 0,76 \text{ A};$$

$$I_3^k = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{-63} = 0,29 \text{ A}.$$

Клоновете токове се изразяват чрез контурните, съгласно уравнение (2.1). Например, през I_1 минава единствено контурният ток I_3^k със същата посока. Следователно:

$$I_1 = I_3^k = 0,29 \text{ A}.$$

През I_2 минават два контурни тока - I_2^k със същата посока и I_3^k с противоположна посока, т.е.:

$$I_2 = I_2^k - I_3^k = 0,76 - 0,29 = 0,47 \text{ A}.$$

През I_3 минава I_1^k със същата посока и I_2^k с противоположна посока:

$$I_3 = I_1^k - I_2^k = 1,5 - 0,76 = 0,74 \text{ A}.$$

През I_4 минава единствено I_2^k със същата посока:

$$I_4 = I_2^k = 0,76 \text{ A}.$$

Следователно разсейваните в резисторите мощности са:

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 0,29^2 \cdot 5 = 0,42 \text{ W};$$

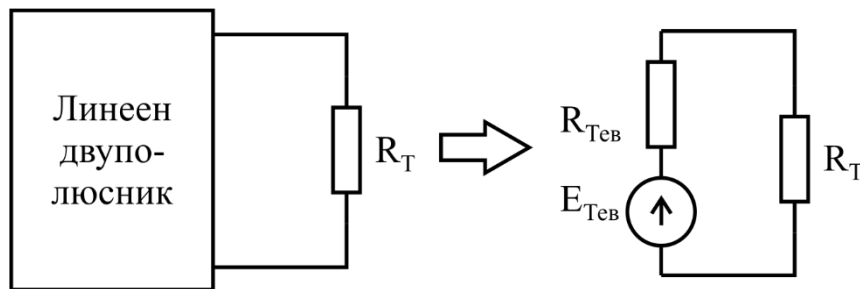
$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 0,47^2 \cdot 3 = 0,66 \text{ W};$$

$$P_{R3} = I_3^2 \cdot R_3 = 0,74^2 \cdot 4 = 2,20 \text{ W};$$

$$P_{R4} = I_4^2 \cdot R_4 = 0,76^2 \cdot 2 = 1,16 \text{ W}.$$

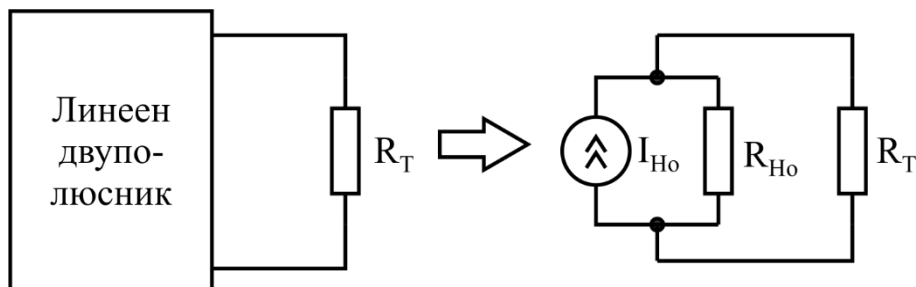
2.7. Теорема на Тевенен и Нортън

Теоремата на Тевенен гласи, че всеки линейен активен двуполусник, храняващ товар R_T , може да бъде заменен с еквивалентен реален източник на напрежение с големина $E_{Тев}$ и съпротивление $R_{Тев}$ (фиг. 2.13).



Фиг. 2.13. Смисъл на Теоремата на Тевенен

Аналогична е теоремата на Нортън, която гласи че всеки линейен активен двуполусник, храняващ товар R_T , може да бъде заменен с еквивалентен реален източник на ток, с големина $I_{Нo}$ и съпротивление $R_{Нo}$ (фиг. 2.14).



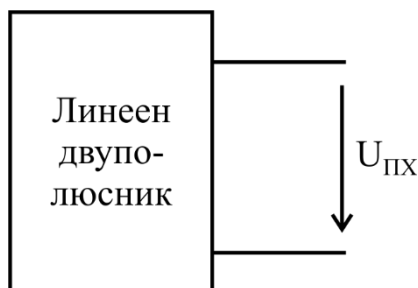
Фиг. 2.14. Смисъл на Теоремата на Нортън

Тези две теорема се наричат обобщено като **Теорема за активния двуполусник**, като както бе указано в Тема 1, двете схеми са еквивалентни и взаимозаменяеми.

Определяне параметрите на еквивалентния реален източник на напрежение

Приложението на Теоремата на Тевенен се свежда до следните няколко стъпки:

1. Товарът R_T се премахва и се определя напрежението на празен ход $U_{ПХ}$ на активния двуполусник (фиг. 2.15);



Фиг. 2.15. Определяне напрежението на празен ход на активен двуполуосник

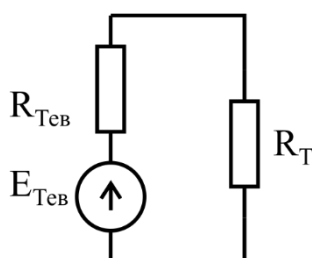
2. Активният двуполуосник се пасивира (източниците на ЕДН се заменят с късо съединение, а източниците на ток - с прекъсната верига) и се определя неговото входно съпротивление $R_{ВХ}$ (фиг. 2.16);



Фиг. 2.16. Определяне входното съпротивления на пасивния двуполуосник

3. Активният двуполуосник се заменя с еквивалентен реален източник на напрежение, чието напрежение и съпротивление са:

$$\begin{aligned} E_{Тев} &= U_{ПХ}; \\ R_{Тев} &= R_{ВХ}. \end{aligned} \quad (2.2)$$



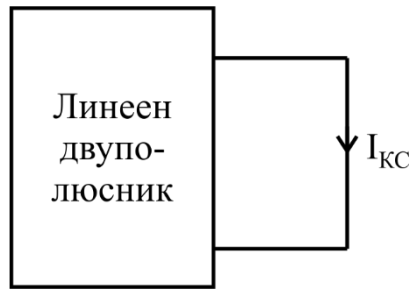
Фиг. 2.17. Схема с еквивалентен източник на напрежение

Определяне параметрите на еквивалентния реален източник на ток

Приложението на Теоремата на Нортън включва следните няколко стъпки:

1. Товарът R_T се премахва, клемите на източника се дават на късо и се определя токът на късото съединение $I_{КС}$ (фиг. 2.18);

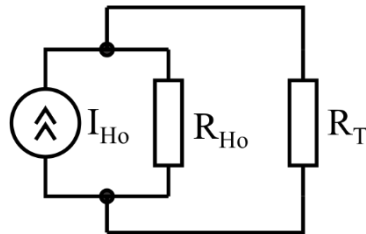
2. Активният двуполуосник се пасивира и се определя неговото входно съпротивление $R_{ВХ}$, аналогично на Теоремата на Тевенен (фиг. 2.18);



Фиг. 2.18. Определяне токът на късо съединение на активния двуполусник

3. Активният двуполусник се заменя с еквивалентен реален източник на ток, чиито ток и съпротивление са (фиг. 2.19):

$$\begin{aligned} I_{\text{Ho}} &= I_{\text{КС}}; \\ R_{\text{Ho}} &= R_{\text{ВХ}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$



Фиг. 2.19. Схема с еквивалентен източник на ток

Хибридно определяне параметрите на еквивалентен източник

Параметрите на еквивалентния източник могат да бъдат определени и по хибриден начин, както следва:

1. Товара R_T се премахва и се определя напрежението на празен ход $U_{\text{ПХ}}$ (фиг. 2.15);
2. Товарът R_T се премахва, източникът се дава на късо и се определя токът на късото съединение $I_{\text{КС}}$ (фиг. 2.18);
3. Активния двуполусник се заменя с еквивалентен източник на напрежение или ток, чието съпротивление се определя съгласно:

$$R_{\text{Тев}} = R_{\text{Ho}} = \frac{U_{\text{ПХ}}}{I_{\text{КС}}}. \quad (2.4)$$

От казаното дотук се вижда, че за да се замени един активен двуполусник с еквивалентен източник е достатъчно да се определят 2 (от общо 3) негови параметъра:

- Напрежението на празен ход $U_{\text{ПХ}}$;
- Токът на късо съединение $I_{\text{КС}}$;
- Входното напрежение $R_{\text{ВХ}}$.

Това е така, тъй като трите параметъра са свързани съгласно:

$$R_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ПХ}}}{I_{\text{КС}}}. \quad (2.5)$$

От уравнение (3.4) също така се вижда, че ако активният двуполюсник съществува реално, неговото съпротивление може да бъде експериментално определено, като се измерят $U_{\text{ПХ}}$ и $I_{\text{КС}}$.

ЗАБЕЛЕЖКА: Теоремата за еквивалентния двуполюсник е изключително важна по няколко причини:

1. На практика всеки реален източник представлява сложен електрически уред (или съвкупност от уреди), но анализът на токовете и напреженията на товарите, свързани към него, може значително да се опрости чрез използване на еквивалентна схема;

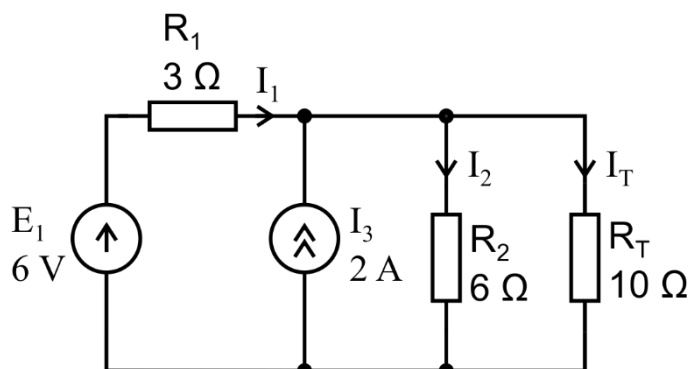
Например, една телевизионна антена с вграден усилвател се явява източник за телевизора, който е товар. В много от случаите не е важно какво е устройството на усилвателя/антената, а единствено как те се „виждат“, гледани от към телевизора, т.е. какви са параметрите на еквивалентния източник.

По аналогичен начин в много от случаи не е важно какво е устройството на телевизора, а единствено как се „вижда“, гледан от към източника, т.е. какво е неговото входно съпротивление.

2. Ако източникът е реално устройство, в много от случаите неговите напрежение на празен ход $U_{\text{ПХ}}$ и ток на късо съединение $I_{\text{КС}}$ могат да бъдат измерени експериментално, откъдето може да се определи и еквивалентното съпротивление $R_{\text{ВХ}}$.

Ето защо Теоремата на Тевенен и Нортън спомагат за анализа на сложни вериги, като сложната част се обособява в активния двуполюсник, а се анализира единствено разглеждания клон.

Пример 2.7. За схемата от фиг. 2.20 да се определят токът и мощността на товара R_{T} .



Фиг. 2.20. Схема към пример 2.7

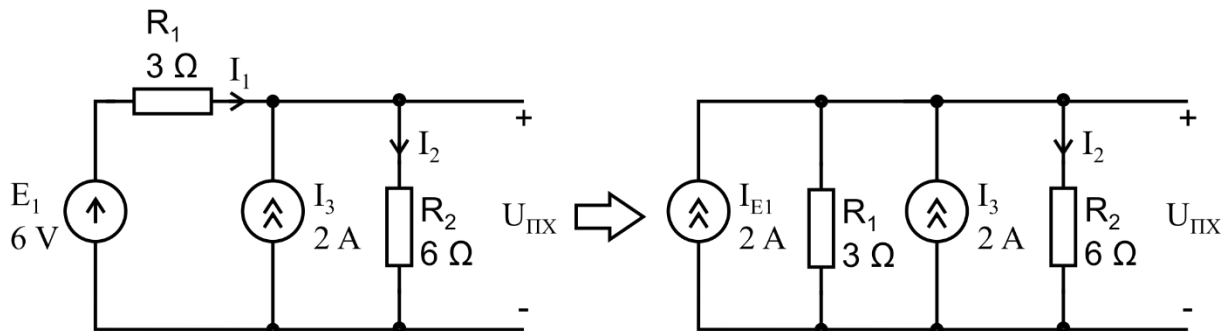
Решение чрез еквивалентен източник на напрежение (Тевенен)

Първо трябва да се определи напрежението на празен ход на двуполюсника след премахване на товара R_{T} . Получава се схемата на фиг. 2.21 (ляво), от която

Тема 2. Анализ на линейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

трябва да се определи напрежението $U_{ПХ}$. Анализът може да се реализира по който да е от изучените методи, но в случая се прилага методът с еквивалентните източници. Еквивалентният източник на напрежение (E_1, R_1) се заменя с еквивалентен източник на ток (I_{E1}, R_1), чиято големина е:

$$I_{E1} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{6}{3} = 2 \text{ A.}$$



Фиг. 2.21. Еквивалентни схеми към пример 2.7 при решаване с Теоремата на Тевенен

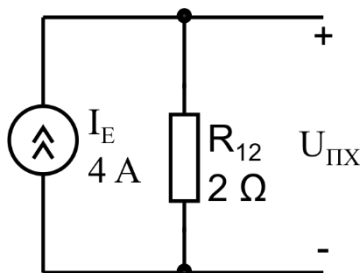
Получава се еквивалентната схема от фиг. 2.21 (дясно). Вижда се, че тя включва два паралелно свързани източника на ток и два паралелно свързани резистора, които могат да бъдат обединени, съответно с:

$$I_E = I_{E1} + I_3 = 2 + 2 = 4 \text{ A};$$

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega.$$

Създава се нова еквивалентна схема (фиг. 2.22). Тъй като напрежението $U_{ПХ}$ всъщност е равно на напрежението на резистор R_{12} , за $U_{ПХ}$ се получава:

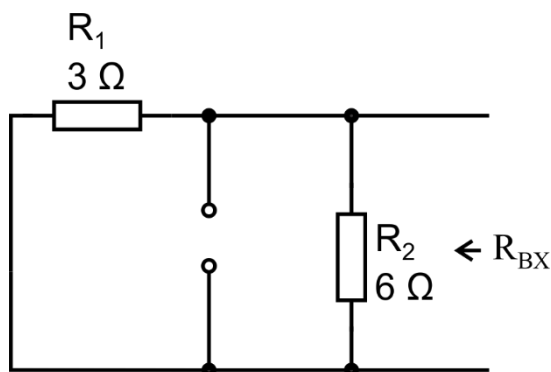
$$U_{ПХ} = U_{R12} = I_E \cdot R_{12} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ V.}$$



Фиг. 2.22. Еквивалентна схема към пример 2.7 при решаване с Теоремата на Тевенен

Следващата стъпка е да се определи входното съпротивление на пасивния двуполусник, като от фиг. 2.21 (ляво) се премахнат двата източника (фиг. 2.23) - източникът на е.д.н. се заменя с късо съединение, а източникът на ток - прекъснатата верига. Тъй като двата резистора са свързани паралелно, еквивалентното им съпротивление е:

$$R_{ВХ} = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 + R_1} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2 \Omega.$$

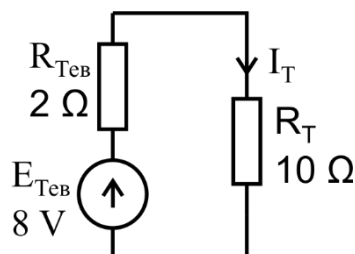


Фиг. 2.23. Еквивалентна схема за определяне на входното съпротивление

Последната стъпка е да се замени активният двуполусник с еквивалентен източник на напрежение (фиг. 2.24), чиито параметри са:

$$E_{\text{Тев}} = U_{\text{ПХ}} = 8 \text{ V};$$

$$R_{\text{Тев}} = R_{\text{ВХ}} = 2 \Omega.$$



Фиг. 2.24. Схема с еквивалентен източник на напрежение

Схемата е едноконтурна и следователно токът и мощността на товара могат да се определят съгласно:

$$I_T = \frac{E_{\text{Тев}}}{R_{\text{Тев}} + R_T} = \frac{8}{2 + 10} = 0,667 \text{ A};$$

$$P_{RT} = I_T^2 \cdot R_T = 0,67^2 \cdot 10 = 4,44 \text{ W}.$$

Решение чрез еквивалентен източник на ток (Нортън)

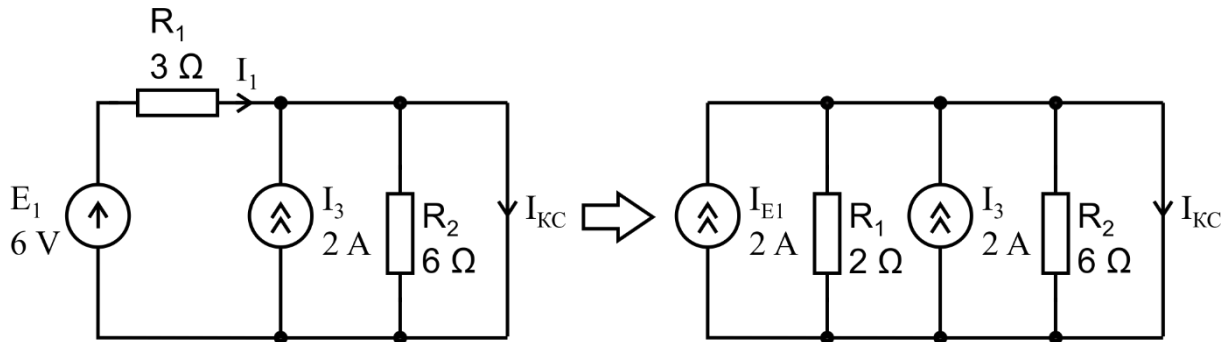
В случая целта е да се определи токът на късо съединение на източника. За целта товарът се премахва и на негово място схемата се дава на късо, както е показано на фиг. 2.25 (ляво). Отново може да се замени реалният източник на напрежение (E_1 и R_1) с еквивалентен източник на ток (I_{E1} , R_1), както е показано на фиг. 2.25 (дясно). За големината на еквивалентния източник на ток се получава:

$$I_{E1} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{6}{3} = 2 \text{ A}.$$

В получената схема може да се извършат две опростявания:

1. Двата източника на ток I_{E1} и I_3 са свързани паралелно, т.е. големината на еквивалентния източник ще бъде сумата от техните големина;
2. Двата резистора R_1 и R_2 са свързани паралелно на късото съединение, т.е. те биват шунтирани от него. Това означава, че еквивалентното им съпротивление е 0Ω .

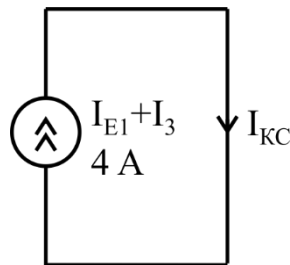
Тема 2. Анализ на линейни електрически вериги при установен постоянен ток режим



Фиг. 2.25. Еквивалентни схеми при определяне тока на късо съединение на активния двуполусник

Получава се еквивалентната схема от фиг. 2.26. От нея се вижда, че големината на тока I_{KC} се задава от източника на ток, т.е.:

$$I_{KC} = I_{E1} + I_3 = 4 \text{ A.}$$



Фиг. 2.26. Еквивалентна схема за определяне на тока на късо съединение

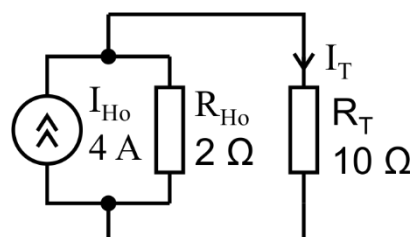
Входното съпротивление на активния двуполусник се определя по същия начин, както при еквивалентния източник на напрежение:

$$R_{BX} = 2 \Omega.$$

Следователно еквивалентният източник на ток ще има следните параметри (фиг. 2.27):

$$I_{Ho} = I_{KC} = 4 \text{ A};$$

$$R_{Ho} = R_{BX} = 2 \Omega.$$



Фиг. 2.27. Еквивалентна схема с източник на ток

Тази схема се явява делител на ток, т.е. за I_T се получава:

$$I_T = I_{Ho} \cdot \frac{R_{Ho}}{R_{Ho} + R_T} = 4 \cdot \frac{2}{2 + 10} = 0,667 \text{ A.}$$

Хибридно решение

Хибридното решение на горната задача включва определяне на $U_{ПХ}$ и $I_{КС}$. След това съпротивлението на еквивалентния източник се определя съгласно:

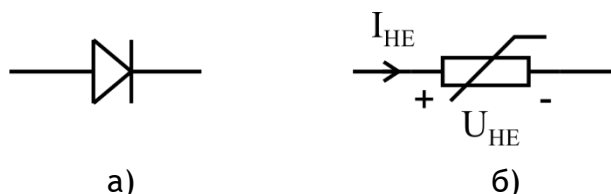
$$R_{Тев} = R_{Но} = \frac{U_{ПХ}}{I_{КС}} = \frac{8}{4} = 2 \Omega.$$

След това активният двуполусник се заменя с еквивалентен източник на напрежение или ток.

Тема 3. Анализ на нелинейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

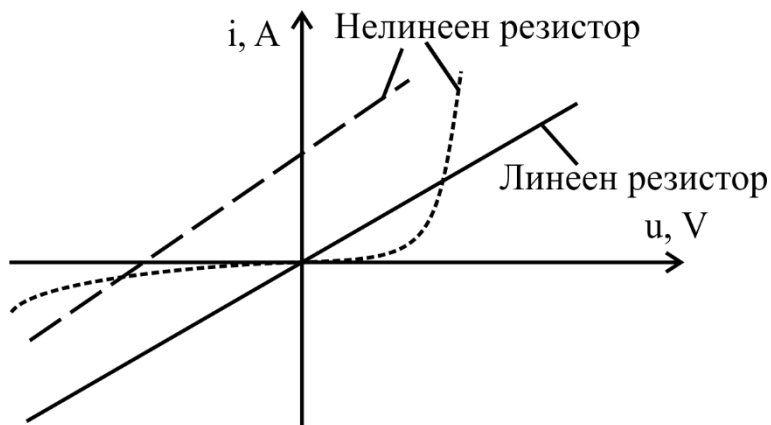
3.1. Нелинейни резистори

Нелинейните резистори са неизменно използвани в съвременната електронна техника, като един от най-известните е полупроводниковият диод (фиг. 3.1а). Други нелинейни резистори са динисторите, стабилитроните и т.н., като всеки се характеризира със свое собствено условно означение. Ето защо в рамките на този учебник ще се използва по-общото означение, представено на фиг. 3.1б.



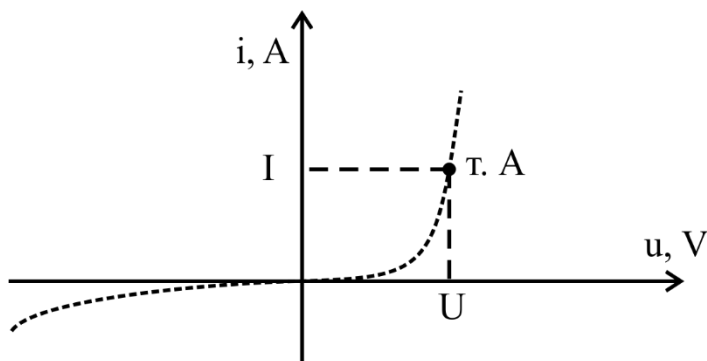
Фиг. 3.1. Условни означения на някои нелинейни резистори

Нелинейните елементи се наричат нелинейни, защото тяхната волт-амперна характеристика (ВАХ) не е права линия, минаваща през центъра на координатната система. Например, на фиг. 3.2 са представени ВАХ на три резистора (1 линеен и 2 нелинейни). За да се осмисли разликата между линеен и нелинеен резистор се разглежда ВАХ на нелинейния елемент от фиг. 3.3.



Фиг. 3.2. Волт-амперна характеристики на резистори

Ако през нелинейния елемент тече токът I , той пресича ВАХ на нелинейния резистор в т. А, т.е. неговият пад на напрежение е U . В този случай т. А се нарича **работна точка**, като тя зависи от тока/напрежението на нелинейния елемент.



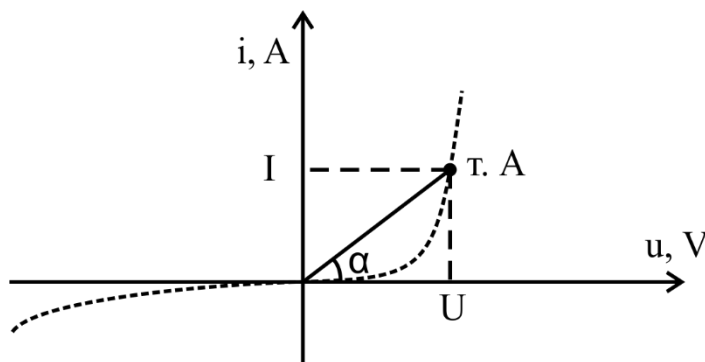
Фиг. 3.3. Примерна волт-амперна характеристика на нелинеен резистор

Тема 3. Анализ на нелинейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

За дадена работна точка могат да се дефинират два вида съпротивления (статично и динамично), като първото има смисъл в постоянен ток вериги, а второто - в променливотокови.

Статичното съпротивление на нелинейния елемент се дефинира за определена работна точка, като котангенс на ъгъла α , в получените правоъгълни триъгълници (фиг. 3.4).

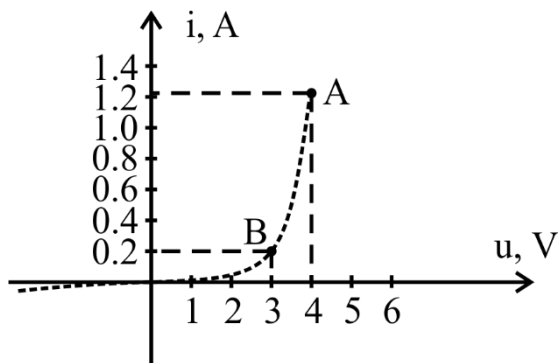
$$R_{ST} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha. \quad (3.1)$$



Фиг. 3.4. Дефиниране на понятието статично съпротивление

Пример 3.1. Да се определи статичното съпротивление на нелинейния елемент от фиг. 3.5 за следните работни точки:

- при напрежение $U = 4 \text{ V}$;
- при напрежение $U = 3 \text{ V}$.



Фиг. 3.5. Схема към пример 3.1

Решение: Статичните съпротивления за двете точки са:

$$R_A = \frac{U_A}{I_A} = \frac{4}{1,2} = 3,33 \Omega;$$

$$R_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{3}{0,2} = 15 \Omega.$$

Вижда се, че съпротивлението на нелинейния елемент се различава за различните работни точки.

Тема 3. Анализ на нелинейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

Последният пример нагледно показва разликата между нелинеен и линеен резистор:

- съпротивлението на линейния резистор е винаги едно и също;
- съпротивлението на нелинейния резистор зависи от приложеното напрежение.

3.2. Графични методи за анализ на нелинейни вериги

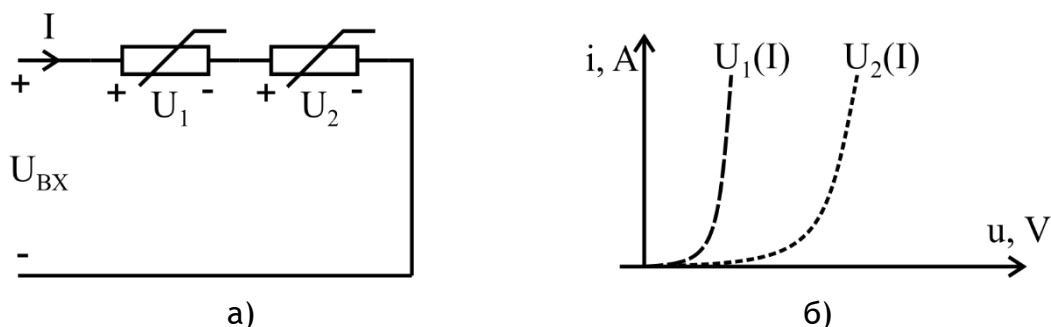
Въпреки че графичният анализ има ограничено практическо приложение, той много нагледно представя как функционират нелинейните елементи.

3.2.1. Последователно съединение на нелинейни резистори

Нека са дадени два последователно съединени нелинейни резистора (фиг. 3.6а), чиито ВАХ са представени на фиг. 3.6б. За веригата може да се запише следното уравнение по ВЗК:

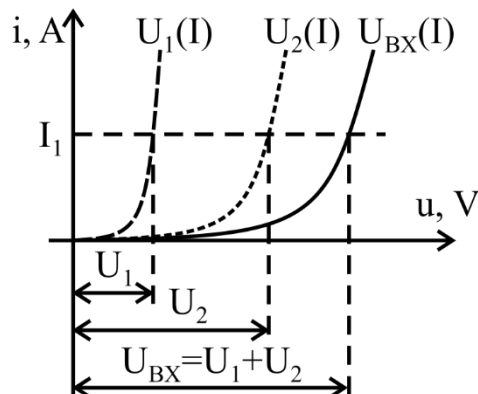
$$U_{ВХ} = U_1 + U_2. \quad (3.2)$$

Това уравнение е изпълнено винаги и за всяка стойност на входните напрежение и ток. Също така, тъй като елементите са последователно съединени, през двата нелинейни резистора винаги протича един и същ ток.



Фиг. 3.6. Последователно съединени нелинейни елементи (а) и техните волт-амперни характеристики (б)

Като се имат предвид горепосочените твърдения, лесно може да се построи общата ВАХ на двата елемента $U_{ВХ}(I)$. За целта за всяка стойност на тока I се извършва графично събиране на напреженията $U_1(I) + U_2(I)$, както е показано на фиг. 3.7.



Фиг. 3.7. Графичен анализ на схемата от фиг. 3.6а

Тема 3. Анализ на нелинейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

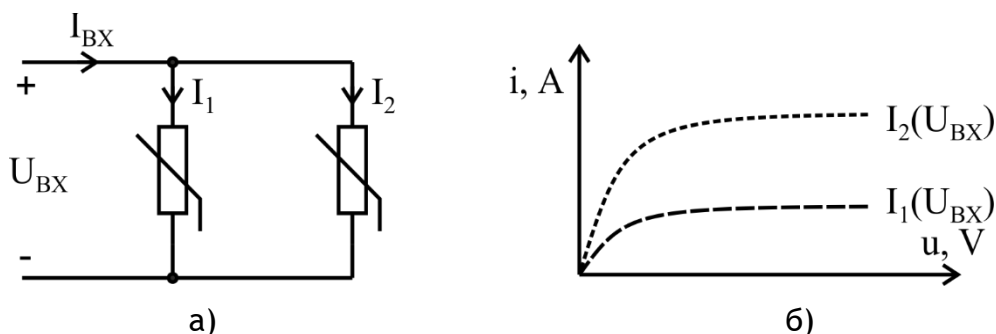
По аналогичен начин може да се събере ВАХ на последователно съединени нелинеен и линеен резистор.

3.2.2. Паралелно съединение на нелинейни елементи

Нека са дадени два паралелно съединени нелинейни резистора (фиг. 3.8а), чиито ВАХ са представени на фиг. 3.8б. За схемата е в сила следното уравнение по ПЗК:

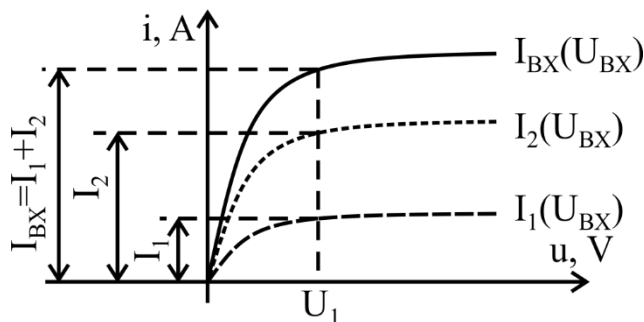
$$I_{BX} = I_1 + I_2, \quad (3.3)$$

като то е изпълнено за всяка стойност на входното напрежение U_{BX} . Също така, тъй като двата елемента са свързани паралелно, техните напрежения са винаги равни на U_{BX} .



Фиг. 3.8. Паралелно съединени нелинейни елементи (а) и техните волт-амперни характеристики (б)

Отчитайки тези твърдения лесно може да се построи общата ВАХ на двата елемента $I_{BX}(U_{BX})$, като за всяка стойност на U_{BX} се извърши графично сумиране на токовете $I_1 + I_2$ (фиг. 3.9).



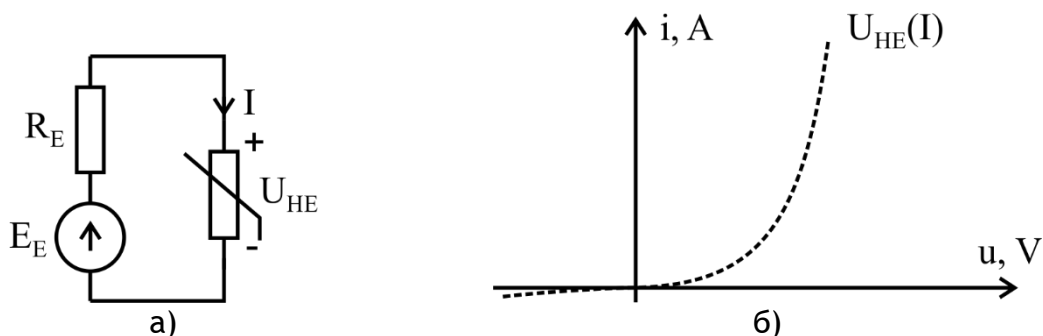
Фиг. 3.9. Графичен анализ на схемата от фиг. 3.8а

3.2.3. Метод с товарната права

Сравнително често използван метод за графичен анализ на нелинейни вериги (например при диоди) е така наречената товарна права по постоянен ток. Нека нелинеен елемент, чиято ВАХ е представена на фиг. 3.10б, се захранва от еквивалентен генератор на напрежение (фиг. 3.10а).

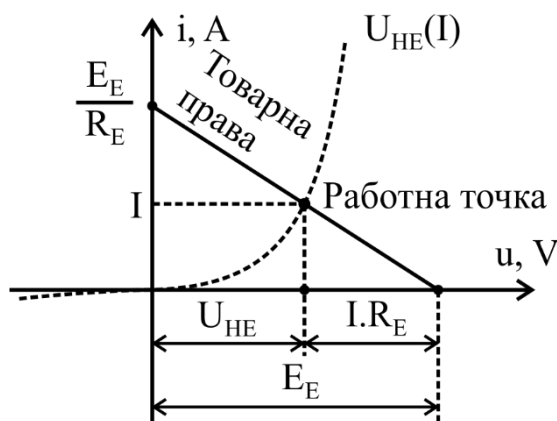
За схемата може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$E_E = I \cdot R_E + U_{HE}. \quad (3.4)$$



Фиг. 3.10. Нелинеен резистор, захранван от реален източник на напрежение (а) и неговата волт-амперна характеристика (б)

Методът с товарната права позволява да се определи работната точка на нелинейния елемент. За целта върху графиката с неговата ВАХ се построява т.нар. товарна права, която свързва напрежението на празен ход E_E върху абсцисната ос с тока на късо съединение $\frac{E_E}{R_E}$ върху ординатната ос. Работната точка се определя като пресечната точка на товарната права и ВАХ на нелинейния елемент (фиг. 3.11).



Фиг. 3.11. Приложение на метода с товарната права

Може да се види, че товарната права не зависи от ВАХ на нелинейния елемент, а единствено от параметрите на захранващия източник - неговите напрежение E_E и съпротивление R_E .

3.3. Числени методи за анализ на нелинейни вериги

Нелинейните вериги могат да бъдат анализирани, използвайки числени методи, в случаите когато ВАХ на нелинейните елементи може да бъде апроксимирана с някаква зависимост (уравнение).

ВАХ може да бъде дефинирана с един или повече участъка. Например ВАХ с три участъка, изглежда по следния начин:

$$U_{HE} = \begin{cases} U_{HE} = f_1(I_{HE}); & I_{HE} < c \\ U_{HE} = f_2(I_{HE}); & c \leq I_{HE} \leq d, \\ U_{HE} = f_3(I_{HE}); & I_{HE} > d \end{cases} \quad (3.5)$$

където $f_1(I_{HE})$, $f_2(I_{HE})$ и $f_3(I_{HE})$ могат да бъдат линейни или нелинейни функции на тока I_{HE} , а c и d са константи.

Тема 3. Анализ на нелинейни електрически вериги при установен постоянен ток режим

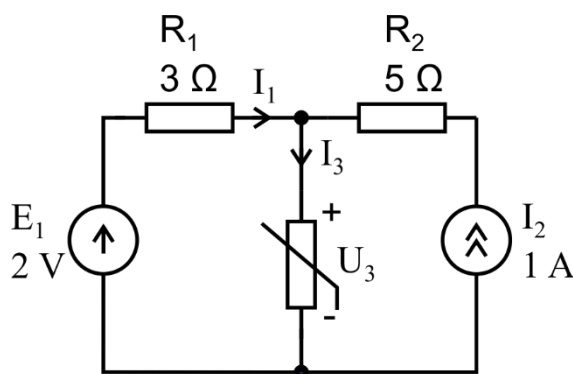
Може да се използва и обратната зависимост - токът да се изрази като функция на напрежението: $I_{HE} = f(U_{HE})$.

3.3.1. Метод със законите на Кирхоф

Анализ на нелинейни вериги по метода със законите на Кирхоф е напълно приложим, като методиката е същата като при постоянен ток вериги и целта е да се запише система от уравнения, в която броят на неизвестните е равен на броя на клоновете токове.

Пример 3.2. За схемата от фиг. 3.12 да се определят токът I_3 , напрежението U_3 и мощността P_3 на нелинейния елемент, ако неговата ВАХ е дефинирана с:

$$U_3 = \begin{cases} 3 \cdot I_3^2, & I_3 \geq 0 \\ 0, & I_3 < 0 \end{cases}$$



Фиг. 3.12. Схема към пример 3.2

Решение: В схемата има два неизвестни тока (I_1 и I_3), поради което е необходима система с две уравнения - едно по ПЗК и едно по ВЗК.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 = I_1 \cdot R_1 + U_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + U_3 \end{cases}$$

Тъй като ВАХ на нелинейния елемент е дефинирана с 2 секции ($I_3 \geq 0$ и $I_3 < 0$) е необходимо системата да се анализира за всяка една от тях.

I. Допуска се, че токът $I_3 < 0$, т.е. че $U_3 = 0 V$. Системата става:

$$\begin{cases} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + U_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + 0 \end{cases}$$

Тя може да бъде лесно решена чрез преобразуване в матричен вид, при което се получават следните решения:

$$I_1 = 0,667 \text{ A}, \quad I_3 = 1,667 \text{ A}.$$

Вижда се, че се получава несъответствие. Токът $I_3 = 1,667 \text{ A}$ е положителен, а съгласно направеното предположение, той трябва да бъде отрицателен. Следователно това не може да бъде решение на задачата.

II. Следователно задачата се решава за $I_3 \geq 0$, при което ВАХ на нелинейния елемент е $U_3 = 3 \cdot I_3^2$. Системата става:

$$\begin{cases} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + U_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + 3I_3^2 \end{cases}$$

В случая системата е нелинейна, поради което не може да се приложи матричния метод. Токът I_1 може да се изрази от първото уравнение и да се замести във второто:

$$I_1 = I_3 - 1$$

$$2 = 3 \cdot I_1 + 3 \cdot I_3^2 \rightarrow 2 = 3(I_3 - 1) + 3 \cdot I_3^2 \rightarrow 3 \cdot I_3^2 + 3 \cdot I_3 - 5 = 0.$$

Полученото квадратно уравнение има две решения:

$$I_3 = \frac{-3 + \sqrt{3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = 0,884 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{-3 - \sqrt{3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = -1,88 \text{ A}.$$

Очевидно е, че $I_3 = -1,88 < 0$ не може да бъде решение на системата, тъй като I_3 трябва да е положителен или равен на нула ($I_3 \geq 0$). Следователно токът през нелинейния елемент е:

$$I_3 = 0,884 \text{ A}.$$

Вече може да се изразят напрежението и мощността на нелинейния елемент:

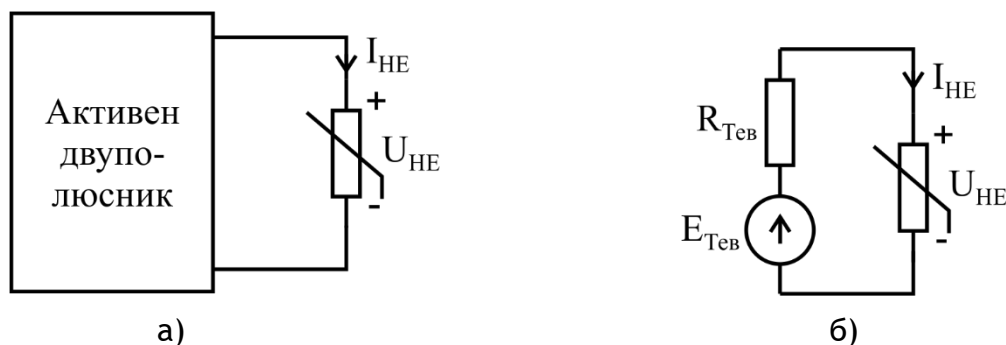
$$U_3 = 3 \cdot I_3^2 = 3 \cdot 0,884^2 = 2,34 \text{ V};$$

$$P_3 = U_3 \cdot I_3 = 3 I_3^3 = 2,07 \text{ W}.$$

Забележка: Вижда се, че ако задачата беше решена първо за $I_3 \geq 0$, нямаше да има смисъл да се решава за $I_3 < 0$. В общия случай задачата се решава последователно за всички възможни секции на ВАХ, докато се получи решение без противоречия.

3.3.2. Метод с Теорема на Тевенен

Нека нелинеен елемент се захранва от линеен активен двуполусник, както е показано на фиг. 3.13а. В случая е удобно да се приложи Теоремата на Тевенен и активния двуполусник да се замени с еквивалентен източник на напрежение (фиг. 3.13б).



Фиг. 3.13. Нелинеен елемент, захранван от линеен активен двуполусник (а) и еквивалентна заместваща схема (б)

След определяне на E_E и R_E на еквивалентния източник, за веригата може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$E_E = U_{HE} + I_{HE} \cdot R_E. \quad (3.6)$$

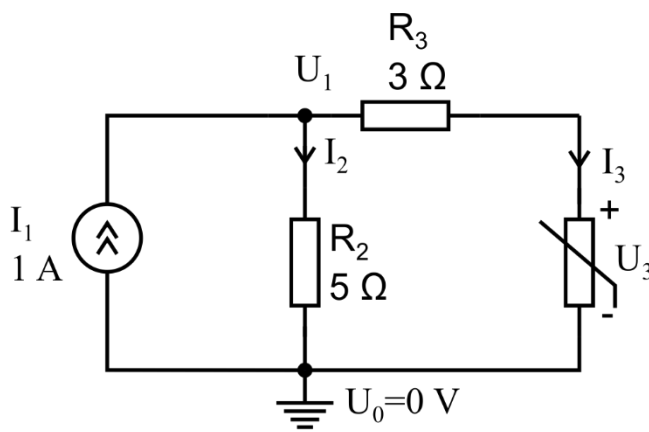
3.3.3. Метод с възловите потенциали

Методът с възловите потенциали също е приложим при анализ на нелинейни вериги, но е необходима модификация:

1. Ако веригата съдържа n възела се записват $n - 1$ уравнения по ПЗК, като единият от възлите се заземява;
2. Ако даден клон не съдържа нелинеен елемент, големината на тока му се определя чрез възловите потенциали във веригата, съгласно закона на Ом;
3. Ако даден клон съдържа нелинеен елемент, за него се записва уравнение по Втория закон на Кирхоф.

Пример 3.4. За схемата от фиг. 3.14 да се определят токът I_3 , напрежението U_3 и мощността P_3 на нелинейния елемент, ако неговата ВАХ е дефинирана с:

$$U_3 = 2I_3^2 - I_3; I_3 \geq 0.$$



Фиг. 3.14. Схема към пример 3.4

Решение: Веригата съдържа два възела. Единият от тях се заземява ($U_0 = 0 V$), а вторият възел потенциал (U_1) е неизвестен.

Записва се едно уравнение по ПЗК:

$$I_1 = I_2 + I_3 \rightarrow 1 = I_2 + I_3.$$

Токът I_2 се изразява съгласно Закона на Ом:

$$I_2 = \frac{U_1 - U_0}{R_2} = \frac{U_1}{5} = 0,2 \cdot U_1.$$

Той може да бъде заместен в уравнението по ПЗК:

$$1 = I_2 + I_3 \rightarrow 1 = 0,2 \cdot U_1 + I_3.$$

Клонът с индекс 3 съдържа нелинеен елемент, поради което следва да се изрази по ВЗК, използвайки двата възлови потенциала:

$$0 = I_3 \cdot R_3 + U_3 + U_0 - U_1 \rightarrow 0 = 3 \cdot I_3 + U_3 - U_1.$$

В горното уравнение се замества $U_3 = 2I_3^2 - I_3$ и се получава:

$$0 = 3 \cdot I_3 + U_3 - U_1 \rightarrow 0 = 3 \cdot I_3 + 2 \cdot I_3^2 - I_3 - U_1,$$

откъдето за потенциала U_1 се получава:

$$U_1 = 2I_3^2 + 2I_3.$$

В случая е най-удобно изразеният потенциал U_1 да се замести в уравнението по ПЗК:

$$1 = 0,2 \cdot U_1 + I_3 \rightarrow 1 = 0,2 \cdot (2 \cdot I_3^2 + 2 \cdot I_3) + I_3 \rightarrow 0,4 \cdot I_3^2 + 1,4 \cdot I_3 - 1 = 0.$$

Решенията на квадратното уравнение са:

$$I_3 = \frac{-1,4 + \sqrt{1,4^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 0,4} = 0,609 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{-1,4 - \sqrt{1,4^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 0,4} = -4,11 \text{ A}.$$

Поради условието $I_3 \geq 0$, отрицателният корен не може да бъде решение. Следователно решението на задачата е:

$$I_3 = 0,609 \text{ A}.$$

За напрежението и мощността на нелинейния елемент се получава:

$$U_3 = 2I_3^2 - I_3 = 0,133 \text{ V}.$$

$$P_3 = U_3 \cdot I_3 = 0,081 \text{ W}.$$

3.4. Числено решение при по-сложни ВАХ

В случай че нелинейният елемент може да се апроксимира като множество линейни и/или квадратни уравнения, може да се използват познатите методи за пресмятане на получената система. Но когато става дума за реални нелинейни елементи (например диоди), техните ВАХ най-често имат експоненциален характер, поради което директното им пресмятане често е невъзможно.

За целта се използват методи, базирани на итерации, намиращи приложение в софтуерите за симулация на електрически вериги. В този раздел ще бъдат разгледани два от тях.

3.4.1. Метод на итерациите

Методът на итерациите включва следните основни стъпки:

1. Избира се с каква точност следва да се определят токовете във веригата. Например:

$$\text{Точност} = 0,01 \text{ A}. \quad (3.7)$$

2. Записва се система от нелинейни уравнения по кой да е от изучените методи;

3. Избира се начална стойност на тока (или напрежението) на нелинейния елемент (начална работна точка):

$$I_{\text{HE}}^{(k)} = I_0. \quad (3.8)$$

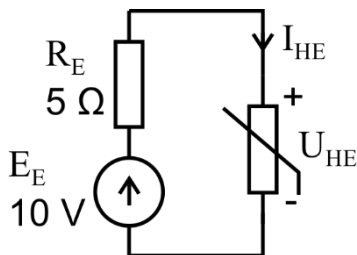
4. Определя се напрежението на нелинейния елемент при работна точка $I_{\text{HE}}^{(k)}$:

$$U_{HE}^{(k)} = f(I_{HE}^{(k)}). \quad (3.9)$$

5. Системата уравнения се решава, като U_{HE} се замени с получената стойност $f(I_{HE}^{(k)})$, откъдето се определя стойността $I_{HE}^{(k+1)}$:

- Ако $|I_{HE}^{(k+1)} - I_{HE}^{(k)}| < \text{Точност}$, е определено решение на задачата;
- В противен случай стъпки 4-5 се повтарят, но с новата стойност на тока $I_{HE}^{(k)} = I_{HE}^{(k+1)}$.

Пример 3.5. За схемата от фиг. 3.15 да се определи токът I_{HE} във веригата, ако ВАХ на нелинейния елемент е апроксимирана с $U_{HE} = 3I_{HE} - I_{HE}^2$.



Фиг. 3.15. Схема към пример 3.5

Решение: Следват се стъпките на описаната методика:

1. Първо се избира точността, с която да бъде определен тока. Например една хилядна:

$$\text{Точност} = 0,001 \text{ A.}$$

2. След това се записва системата нелинейни уравнения. В случая може да се запише само едно уравнение по ВЗК:

$$E_E = 5 \cdot I_{HE} + U_{HE} \rightarrow 10 = 5 \cdot I_{HE} + U_{HE}.$$

3. Избира се начален ток във веригата за първата итерация:

$$I_{HE}^{(1)} = 1 \text{ A.}$$

ИТЕРАЦИЯ 1

4. Определя се напрежението на нелинейния елемент, при работна точка $I_{HE}^{(1)} = 1 \text{ A}$:

$$U_{HE}^{(1)} = 3 \cdot I_{HE} - I_{HE}^2 = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2 \text{ V.}$$

5. Определя се токът във веригата при $U_{HE}^{(1)} = 2 \text{ V}$:

$$\begin{aligned} 10 &= 5I_{HE}^{(2)} + U_{HE}^{(1)} \\ \rightarrow I_{HE}^{(2)} &= \frac{10 - U_{HE}^{(1)}}{5} = \frac{10 - 2}{5} = 1,6 \text{ A.} \end{aligned}$$

Определя се разликата $|I_{HE}^{(2)} - I_{HE}^{(1)}|$:

$$|I_{HE}^{(2)} - I_{HE}^{(1)}| = |1,6 - 1| = 0,6 > 0,01.$$

Вижда се, че $|I_{HE}^{(2)} - I_{HE}^{(1)}|$ е по-голямо от желаната точност и следователно това не е решение на задачата.

ИТЕРАЦИЯ 2

Започва се от стъпка 4, като този път се определя напрежението на нелинейния елемент при ток $I_{HE}^{(2)} = 1,6$ A:

$$U_{HE}^{(2)} = 3 \cdot I_{HE} - I_{HE}^2 = 3 \cdot 1,6 - 1,6^2 = 2,240 \text{ V}.$$

В стъпка 5 се определя новата стойност на тока $I_{HE}^{(3)}$ във веригата:

$$I_{HE}^{(3)} = \frac{10 - U_{HE}^{(2)}}{5} = \frac{10 - 2,240}{5} = 1,552 \text{ A}.$$

Разликата $|I_{HE}^{(3)} - I_{HE}^{(2)}|$ все още е по-голяма от желаната точност:

$$|I_{HE}^{(3)} - I_{HE}^{(2)}| = |1,552 - 1,6| = 0,048 > 0,001.$$

Следователно и този ток все още не е решение на задачата.

ИТЕРАЦИЯ 3

Решението продължава с връщане към стъпка 4 и определяне на напрежението U_{HE} при работна точка $I_{HE}^{(3)} = 1,552$ A:

$$U_{HE}^{(3)} = 3 \cdot I_{HE} - I_{HE}^2 = 3 \cdot 1,552 - 1,552^2 = 2,2473 \text{ V}.$$

В стъпка 5 за тока във веригата се получава:

$$I_{HE}^{(4)} = \frac{10 - U_{HE}^{(3)}}{5} = \frac{10 - 2,2473}{5} = 1,5505 \text{ A}.$$

Разликата между новия и стария ток е:

$$|I_{HE}^{(4)} - I_{HE}^{(3)}| = |1,5505 - 1,552| = 0,00146 > 0,001.$$

Вижда се, че след третата итерация $I_{HE}^{(k+1)}$ все още не клони към $I_{HE}^{(k)}$ с желаната точност, така че се продължава към следващата итерация.

ИТЕРАЦИЯ 4

Определя се напрежението U_{HE} при работна точка $I_{HE}^{(4)} = 1,5505$ A:

$$U_{HE}^{(4)} = 3 \cdot I_{HE} - I_{HE}^2 = 3 \cdot 1,5505 - 1,5505^2 = 2,2475 \text{ V}.$$

За тока във веригата се получава:

$$I_{HE}^{(5)} = \frac{10 - U_{HE}^{(4)}}{5} = \frac{10 - 2,2475}{5} = 1,5505 \text{ A}.$$

Разликата между двата тока е:

$$|I_{HE}^{(5)} - I_{HE}^{(4)}| = |1,5505 - 1,5505| = 0,0000 < 0,001.$$

Вижда се, че след 4-тата итерация токът е определен с желаната точност, т.е. токът през нелинейния елемент е:

$$I_{HE} = 1,5505 \text{ A.}$$

Описаните итерации са представени и в табличен вид:

Номер на итерация	$I_{HE}^{(k)}$ A	$U_{HE}^{(k)}$ V	$I_{HE}^{(k+1)}$ A	$ I_{HE}^{(k+1)} - I_{HE}^{(k)} $ A
$k = 1$	1,00	2,00	1,6	$ 1,6 - 1,00 = 0,6$
$k = 2$	1,6	2,24	1,552	$ 1,552 - 1,6 = 0,048$
$k = 3$	1,552	2,2473	1,5505	$ 1,5505 - 1,552 = 0,0015$
$k = 4$	1,5505	2,2475	1,5505	$ 1,5505 - 1,5505 = 0,0000$

3.4.2. Метод на Нютон-Рафсон

Друг метод, базиран на итерации, е т.н. метод на Нютон-Рафсон. Той позволява да се намали броя на итерациите и се смята за един от най-ефективните.

Нека нелинейното уравнение $f(x) = 0$ има едно единствено решение $x = x_{k+1}$. Това позволява $f(x_{k+1})$ да се представи като:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + \Delta x_k \cdot f'(x_k) = 0, \quad (3.10)$$

където $f'(x_k)$ е производната на $f(x_k)$, а $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Следователно решението за x_{k+1} е:

$$f(x_k) + \Delta x_k \cdot f'(x_k) = 0 \rightarrow x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.11)$$

Методът на Нютон-Рафсон може да се използва за анализ на нелинейни вериги чрез следната последователност от стъпки:

1. Избира се желаната точност на пресмятане. Например:

$$\text{Точност} = 0,001 \text{ A.} \quad (3.12)$$

2. Записва се система от нелинейни уравнения по кой да е от изучените методи, откъдето се определя нелинейната функция $f(I_{HE}^{(k)})$ и първата ѝ производна $f'(I_{HE}^{(k)})$;

3. Избира се начална стойност на тока (или напрежението) на нелинейния елемент:

$$I_{HE}^{(k)} = I_0. \quad (3.13)$$

4. Определя се тока при следващата итерация съгласно:

$$I_{HE}^{(k+1)} = I_{HE}^{(k)} - \frac{f(I_{HE}^{(k)})}{f'(I_{HE}^{(k)})} \quad (3.14)$$

➤ Стъпка 4 се повтаря докато не се получи резултат с желаната точност:

$$\left| I_{HE}^{(k+1)} - I_{HE}^{(k)} \right| < \text{Точност.} \quad (3.15)$$

За демонстрация на метода на Нютон-Рафсон ще бъде решен същият пример, като при метода с итерациите.

Пример 3.6. Да се реши задачата от пример 3.5, използвайки метода на Нютон-Рафсон.

Решение:

1. Първо се избира с каква точност да бъде определен тока. Например:

$$\text{Точност} = 0,001 \text{ A.}$$

2. Записва се системата нелинейни уравнения (в случая 1 уравнение по ВЗК):

$$E_E = R_E \cdot I_{HE} + U_{HE} \rightarrow 10 = 5 \cdot I_{HE} + 3I_{HE} - I_{HE}^2 \rightarrow 10 = 8 \cdot I_{HE} - I_{HE}^2.$$

Следователно функцията $f(I_{HE})$ е:

$$f(I_{HE}) = I_{HE}^2 - 8I_{HE} + 10 = 0,$$

а първата ѝ производна е:

$$f'(I_{HE}) = \frac{d(I_{HE}^2 - 8I_{HE} + 10)}{dI_{HE}} = 2I_{HE} - 8.$$

3. Избира се начален ток във веригата за първата итерация:

$$I_{HE}^{(1)} = 1 \text{ A.}$$

ИТЕРАЦИЯ 1

Определя се токът на нелинейния елемент след първата итерация:

$$I_{HE}^{(2)} = I_{HE}^{(1)} - \frac{f(I_{HE}^{(1)})}{f'(I_{HE}^{(1)})} = I_{HE}^{(1)} - \frac{(I_{HE}^{(1)})^2 - 8 \cdot I_{HE}^{(1)} + 10}{2 \cdot I_{HE}^{(1)} - 8} = 1 - \frac{1^2 - 8 \cdot 1 + 10}{2 \cdot 1 - 8} = 1,500 \text{ A.}$$

Токът $I_{HE}^{(2)}$ не клони към $I_{HE}^{(1)}$ с желаната точност, тъй като:

$$\left| I_{HE}^{(2)} - I_{HE}^{(1)} \right| = |1,500 - 1,000| = 0,500 > 0,001.$$

ИТЕРАЦИЯ 2

Пресмята се отново токът, този път при работна точка $I_{HE}^{(2)} = 1,500 \text{ A}$:

$$I_{HE}^{(3)} = I_{HE}^{(2)} - \frac{(I_{HE}^{(2)})^2 - 8 \cdot I_{HE}^{(2)} + 10}{2 \cdot I_{HE}^{(2)} - 8} = 1,5 - \frac{1,5^2 - 8 \cdot 1,5 + 10}{2 \cdot 1,5 - 8} = 1,550 \text{ A.}$$

Отново токът $I_{HE}^{(3)}$ не клони към $I_{HE}^{(2)}$ с желаната точност:

$$\left| I_{HE}^{(3)} - I_{HE}^{(2)} \right| = |1,550 - 1,500| = 0,050 > 0,001.$$

ИТЕРАЦИЯ 3

Пресмята се токът при работна точка $I_{HE}^{(3)} = 1,550 \text{ A}$:

$$I_{HE}^{(4)} = I_{HE}^{(3)} - \frac{\left(I_{HE}^{(3)} \right)^2 - 8 \cdot I_{HE}^{(3)} + 10}{2 \cdot I_{HE}^{(3)} - 8} = 1,55 - \frac{1,55^2 - 8 \cdot 1,55 + 10}{2 \cdot 1,55 - 8} = 1,5505 \text{ A}.$$

За разликата между двете итерации се получава:

$$\left| I_{HE}^{(4)} - I_{HE}^{(3)} \right| = |1,5505 - 1,550| = 0,0005 < 0,001.$$

Вижда се, че $I_{HE}^{(4)}$ клони към $I_{HE}^{(3)}$ със желаната точност, т.е. токът във веригата е:

$$I_{HE} = 1,5505 \text{ A}.$$

Може да се забележи, че с методът на Нютон-Рафсон бяха необходими три итерации за получаване на решение, докато по първият метод - четири.

Решението на задачата е представено и в табличен вид:

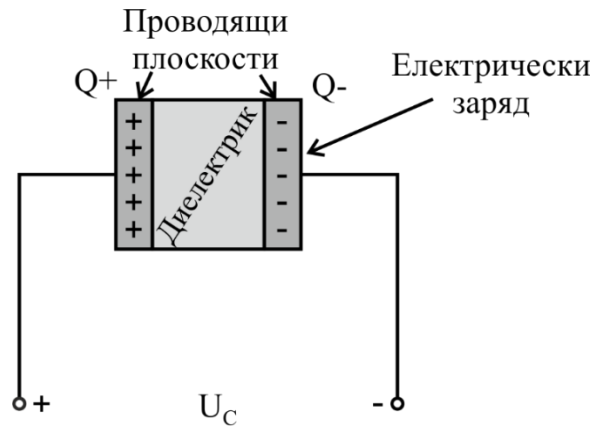
Номер на итерация	$I_{HE}^{(k)} \text{ A}$	$I_{HE}^{(k+1)} \text{ A}$	$\left I_{HE}^{(k+1)} - I_{HE}^{(k)} \right \text{ A}$
$k = 1$	1,000	1,500	$ 1,500 - 1,000 = 0,5$
$k = 2$	1,500	1,550	$ 1,550 - 1,500 = 0,050$
$k = 3$	1,550	1,5505	$ 1,5505 - 1,550 = 0,0005$

Тема 4. Реактивни елементи

4.1. Капацитивен елемент (кондензатор)

4.1.1. Принцип на действие на кондензатор

Разглежда се ситуация, при която две плоски проводящи повърхности са разделени от диелектрик, като към тези повърхности се прилага напрежение U_C .



Фиг. 4.1. Капацитивен елемент

Това ще доведе до следните процеси:

- Свободните отрицателни заряди ще бъдат отблъснати от минуса (-) на външното електрическо поле и ще се насочат в посока към плюс. Но тъй като не могат да преминат през диелектрика, върху едната проводяща повърхност ще се натрупа отрицателен електрически заряд Q^- .
- Електроните от другата страна на диелектрика ще бъдат привлечени от плюса (+) на външното електрическо поле, поради което върху втората проводяща повърхност ще остане некомпенсиран положителен електрически заряд Q^+ ;

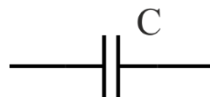
Отношението между натрупания заряд Q върху една от двете повърхности ($Q = Q^+ = Q^-$) и приложеното напрежение U_C се нарича *електрически капацитет*:

$$C = \frac{Q}{U_C}. \quad (4.1)$$

Единицата за електрически капацитет е Фарад [F], но обикновено се използват по-малките единици:

- Милифарад: $1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$;
- Микрофарад: $1 \text{ }\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$;
- Нанофарад: $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$;
- Пикофарад: $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$.

Казаното по-горе позволява да се дефинира още един двуполусен елемент, наречен кондензатор, чието условно означение е представено на фиг. 4.2.

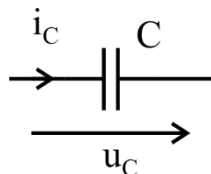


Фиг. 4.2. Условно означение на кондензатор

Всеки капацитивен елемент се характеризира с капацитет C и пробивно напрежение $U_{\text{пр}}$. Ако към кондензатор се приложи напрежение по-голямо от пробивното ($U_C > U_{\text{пр}}$), това ще доведе до пробив в диелектрика, вследствие на което елементът ще се повреди.

4.1.2. Ток и напрежение на кондензатор

Нека към кондензатор с капацитет C е приложено напрежение u_C , вследствие на което тече ток i_C (фиг. 4.3).



Фиг. 4.3. Ток и напрежение на кондензатор

Известно е, че токът i_C се дефинира с:

$$i_C(t) = \frac{dQ}{dt}. \quad (4.2)$$

Ако в горното уравнение се положи $Q = C \cdot u_C$ (следва от уравнение (4.1)), за тока i_C се получава:

$$i_C(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC}{dt}. \quad (4.3)$$

Обикновено електрическият капацитет на кондензатора е константа ($C = \text{const}$), вследствие на което се получава:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (4.4)$$

За да се изрази напрежението u_C чрез тока i_C , уравнение (4.4) може да се интегрира:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0), \quad (4.5)$$

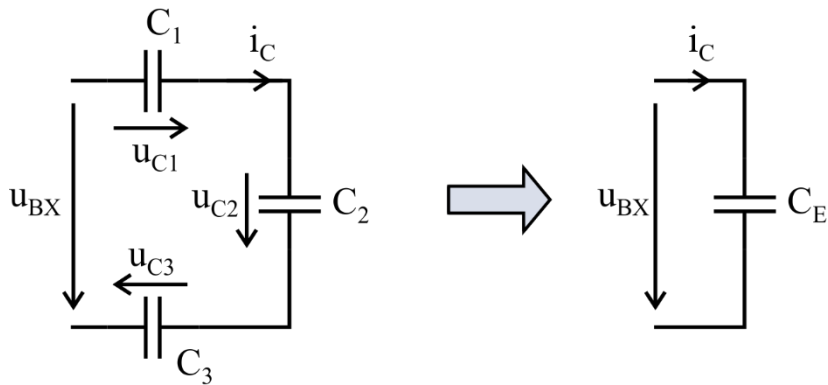
където константата на интеграция $u_C(0)$ е така нареченото начално напрежение, чийто смисъл ще бъде разгледан в Тема 9. От уравнение (4.4) се вижда, че през кондензаторите не тече постоянен ток.

4.1.3. Съединения на кондензатори

Разглежда се схемата от фиг. 4.4. Тъй като кондензаторите са свързани последователно, през тях тече един и същ ток i_C .

Може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$u_{\text{вх}} = u_{C1} + u_{C2} + u_{C3}. \quad (4.6)$$



Фиг. 4.4. Последователно свързани кондензатори

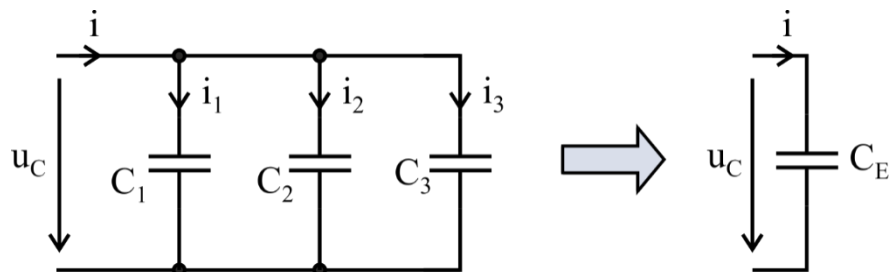
Ако в горното уравнение се положи уравнение (4.5), се получава:

$$u_{BX} = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_C dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_C dt + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_C dt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int_0^t i_C dt = \frac{1}{C_E} \int_0^t i_C dt. \quad (4.7)$$

С други думи, трите последователно съединени кондензатора могат да бъдат заменени с един еквивалентен C_E , чиято големина е:

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \rightarrow \quad C_E = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}. \quad (4.8)$$

След това се разглежда схемата от фиг. 4.5. Тъй като кондензаторите са свързани паралелно, върху тях има един и същ пад на напрежение u_C .



Фиг. 4.5. Паралелно свързани кондензатори

По ПЗК може да се запише следното уравнение:

$$i = i_1 + i_2 + i_3. \quad (4.9)$$

Полагайки уравнение (4.4) се получава:

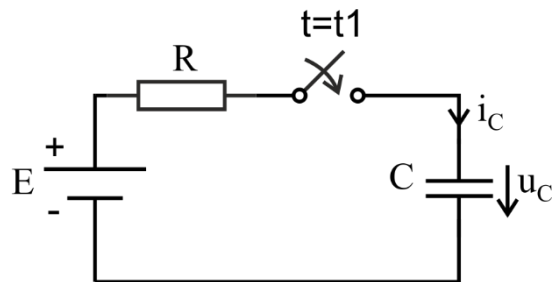
$$i = C_1 \frac{du_C}{dt} + C_2 \frac{du_C}{dt} + C_3 \frac{du_C}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{du_C}{dt} = C_E \frac{du_C}{dt}. \quad (4.10)$$

Следователно еквивалентния капацитет на паралелно свързани кондензатори се определя с:

$$C_E = C_1 + C_2 + C_3. \quad (4.11)$$

4.1.4. Енергия, зареждана в кондензаторите

Разглежда се ситуация, при която кондензатор C се свързва към постоянен източник на напрежение E (фиг. 4.6).



Фиг. 4.6. Включване на кондензатор към напрежение

Под действието на източника, проводящите повърхности на кондензатора се зареждат със заряд, съответно Q^+ и Q^- . Това води до появата на електрическо поле между двата електрода, а е известно, че електрическото поле може да измества електрически заредени частици, т.е. да извършва някаква работа. Следователно кондензаторът е зареден с определено количество енергия.

За да се определи тази енергия, може да се изхожда от моментната мощност $p_C(t)$, която се зарежда в кондензатора:

$$p_C(t) = i_C(t) \cdot u_C(t) = C \frac{du_C}{dt} u_C. \quad (4.12)$$

Енергията, независимо в каква форма, не може да се зарежда или разрежда мигновено. Нека в момента от времето $t = t_1$ кондензаторът започва да се зарежда, а в момента от времето $t = t_2$ - той е напълно зареден.

Отчитайки връзката между енергия и мощност ($1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}}$), за да се изрази заредената енергия е необходимо да се умножи мощността по времето. Но тъй като мощността p_C се изменя, тя следва да се интегрира във времето, в интервала от t_1 до t_2 :

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} p_C(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} dt = \int_0^E C \cdot u_C \cdot du_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2. \quad (4.13)$$

С други думи, максималната енергия, която може да се зареди в един кондензатор под формата на електрическо поле, зависи единствено от неговия капацитет и от неговото напрежение:

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2. \quad (4.14)$$

Пример 4.1. Кондензатор с капацитет $C = 10 \text{ mF}$ се захранва от източник на постоянно напрежение $u_C = 100 \text{ V}$. Каква енергия ще се зареди в кондензатора?

Решение:

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2 = 50 \text{ J.}$$

4.2. Индуктивен елемент (бобина)

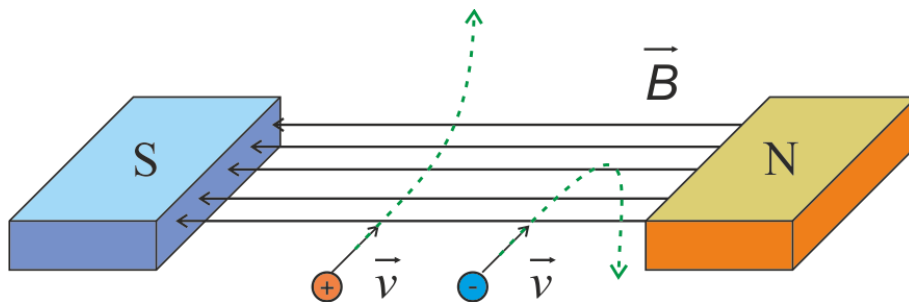
За да се дефинира понятието *индуктивен елемент (бобина)*, първо следва да се въведат някои основни понятия от електромагнетизма.

4.2.1. Магнитна индукция

Магнитното поле съществува около движещи се електрически заредени частици, а също така около изменящи се електрически полета. То се характеризира с неговата магнитна индукция \vec{B} , понякога наричана просто *магнитно поле*. Единицата за магнитна индукция е Тесла [Т]. Тя се дефинира чрез силата \vec{F}_M , с която полето действа върху заряд q , движещ се със скорост \vec{v} :

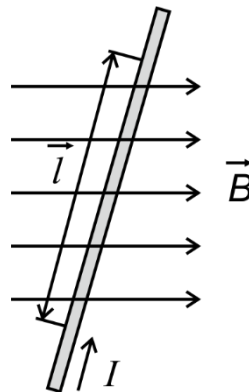
$$\vec{F}_M = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.15)$$

Пример за влиянието на постоянно магнитно поле върху движещи се положително и отрицателно заредени частици е представен на фиг. 4.7. Тъй като около тях също съществуват магнитни полета, траекторията им се променя (нагоре или надолу на фигурата), в зависимост от това дали зарядът е положително или отрицателно зареден.



Фиг. 4.7. Движение на заредени частици през магнитно поле

Магнитното поле може да се дефинира и чрез силата \vec{F}_M , която действа върху проводник с дължина \vec{l} , по който тече ток I (фиг. 4.8).



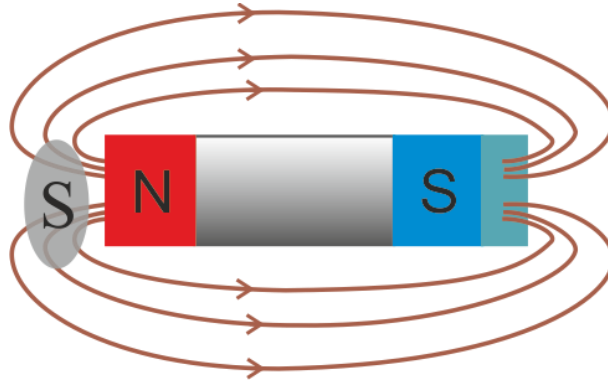
Фиг. 4.8. Проводник под въздействието на магнитно поле

За целта се изхожда от фактите, че електрическият ток представлява движение на заредени частици ($I = dq/dt$) и че скоростта се дефинира като разстояние разделено на време ($\vec{v} = \vec{l}/t$):

$$\vec{F}_M = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \left(\frac{\vec{l}}{t} \times \vec{B} \right) = \frac{q}{t} \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}). \quad (4.16)$$

4.2.2. Магнитен поток

Нека постоянен магнит създава магнитно поле \vec{B} , както е показано на фиг. 4.9.



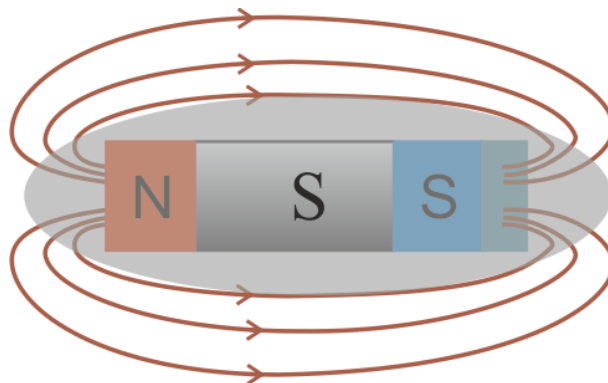
Фиг. 4.9. Магнитно-силови линии около постоянен магнит

Магнитният поток се дефинира като сумарната магнитна индукция през дадена повърхност \vec{S} :

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} d\vec{S}. \quad (4.17)$$

Единицата за магнитен поток е Вебер [Wb]. В случай че повърхността \vec{S} е затворена (например сферична повърхност, обграждаща магнита), както е показано на фиг. 4.10, сумарният магнитен поток е нулев:

$$\Phi = \oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (4.18)$$



Фиг. 4.10. Постоянен магнит в затворена повърхност

Това е така, защото всички магнитно-силони линии участват в интеграла по два пъти - веднъж влизат в повърхността и веднъж излизат от нея. Уравнение (4.18) е известно като закон на Гаус за магнетизма и е едно от уравненията на Максвел. Този закон е следствие от предположението, че магнитни монополи не съществуват.

4.2.3. Коефициент на самоиндукция и индуктивен елемент

Нека по един проводник тече ток с големина i . Токът (който представлява движение на заредени частици) създава около проводника магнитно поле \vec{B} , чиято посока се определя съгласно правилото на дясната ръка (фиг. 4.11) - ако палецът сочи посоката на тока, посоката на циркулация на магнитното поле се указва от пръстите на ръката.



Фиг. 4.11. Правило на дясната ръка за магнитното поле около проводник

Това явление се описва със закона на Ампер:

$$\oint_{(l)} \vec{B} d\vec{l} = \mu \cdot i, \quad (4.19)$$

където μ е магнитната проницаемост на околната среда.

Връзката между създавания магнитен поток Φ и големината на създаващия го ток I , се дава с т.н. коефициент на самоиндукция (или просто индуктивност):

$$L = \frac{\Phi}{i}. \quad (4.20)$$

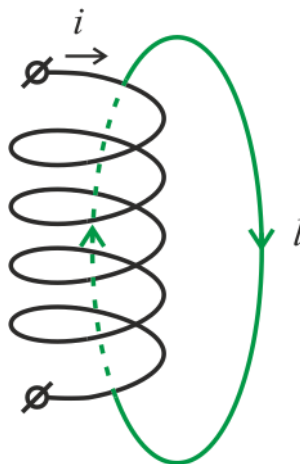
L зависи от магнитната проницаемост на средата, формата и размерите на проводника, като мерната единица за индуктивност е Хенри [H]. В случай че проводникът има N на брой навивки, законът на Ампер добива следния вид:

$$\oint_{(l)} \vec{B} d\vec{l} = N \cdot \mu \cdot i, \quad (4.21)$$

а индуктивността става:

$$L = N \cdot \frac{\Phi}{i}. \quad (4.22)$$

N навивки



Фиг. 4.12. Проводник с N навивки

Горепосланото позволява да се дефинира още един пасивен двуполусен елемент, наречен индуктивен елемент (бобина). Бобината представлява проводник с множество навивки, създаващи определена индуктивност, която съхранява енергия под формата на магнитно поле. Нейното условно означение е представено на фиг. 4.13.

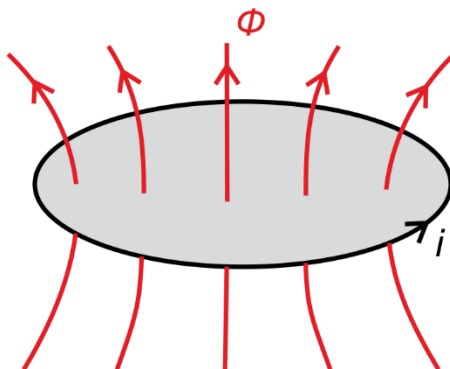


Фиг. 4.13. Условно означение за бобина

4.2.4. Закон за електромагнитната индукция

Законът за електромагнитната индукция, известен още като закон на Фарадей, гласи че ако през затворен проводников контур минава изменящ се магнитен поток Φ (фиг. 4.14), в контура ще се индуцира е.д.н., с големина:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.23)$$



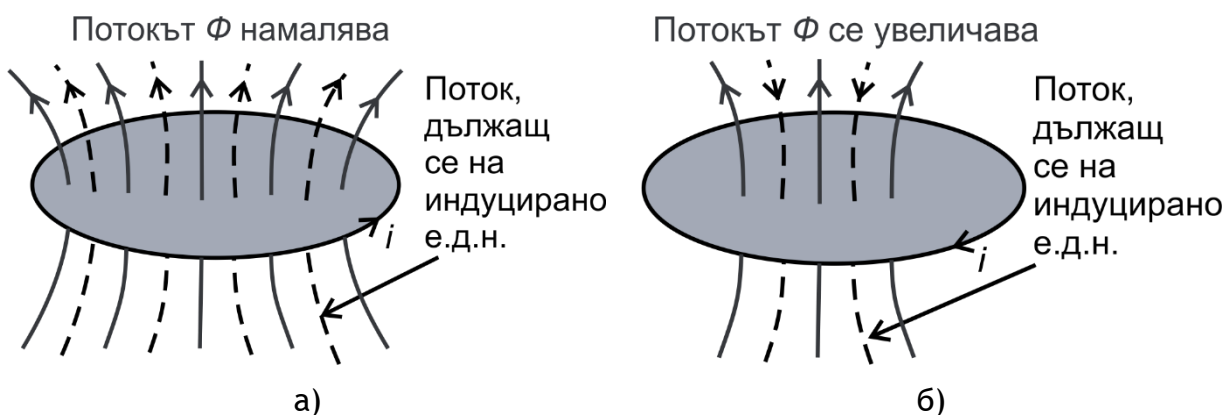
Фиг. 4.14. Магнитен поток, минаващ през затворен проводников контур

В случай че контурът включва N на брой навивки, горното уравнение става:

$$e = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.24)$$

В действителност знакът минус (-) е добавен по-късно от Хайнрих Ленц и се нарича *правило на Ленц*. То гласи, че когато в затворен контур се индуцира е.д.н., вследствие промяна в магнитния поток, посоката на това е.д.н. е такава, че създаваният от него ток да се противопостави на изменението. С други думи, контурът се стреми да запази магнитния поток, като създава е.д.н. с такава посока, че да компенсира изменението $\frac{d\Phi}{dt}$. Възможни са две ситуации:

- **Потокът Φ намалява** - контурът индуцира е.д.н. (респективно протича ток), което създава магнитен поток, чиято посока съвпада с тази на Φ (фиг. 4.15а).
- **Потокът Φ се увеличава** - контурът индуцира е.д.н., което създава магнитен поток, чиято посока е противоположна на тази на Φ , опитвайки се да компенсира увеличаването (фиг. 4.15б).

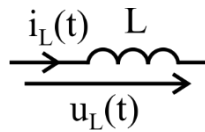


Фиг. 4.15. Графично представяне на Правилото на Ленц

4.2.5. Ток и напрежение на бобини

Нека през бобина тече ток с големина i_L (фиг. 4.16). Изхождайки от Закона за електромагнитната индукция, падът на напрежението върху бобината е (падът на напрежение има посока, противоположна на индуцираното е.д.н., откъдето е знакът минус (-)):

$$u_L(t) = -e = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.25)$$



Фиг. 4.16. Ток и напрежение на бобина

Също така е известно, че $\Phi = L \cdot i_L$ (следва от уравнение (4.23)), откъдето за напрежението се получава:

$$u_L(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(L \cdot i_L)}{dt} = L \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L \cdot \frac{dL}{dt}. \quad (4.26)$$

Тъй като обикновено индуктивността е константа ($L = const$), за напрежението се получава:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}. \quad (4.27)$$

Токът на бобината може да се изрази, като уравнение (4.27) се интегрира:

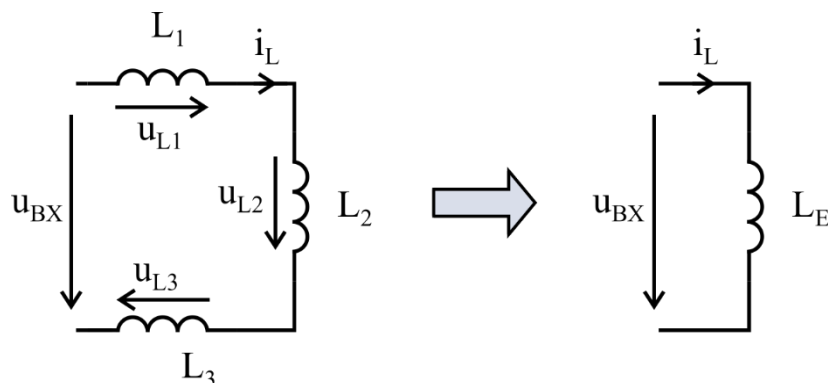
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0). \quad (4.28)$$

От уравнение (4.27) се вижда, че при постоянен ток върху бобината няма пад на напрежение, т.е. тя представлява късо съединение.

4.2.6. Съединения на бобини

Разглежда се последователно съединение на бобини, както е показано на фиг. 4.17. За веригата може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$u_{BX} = u_{L1} + u_{L2} + u_{L3}. \quad (4.29)$$



Фиг. 4.17. Последователно съединение на бобини

Тъй като бобините са свързани последователно, по тях тече един и същ ток i_L , т.е. уравнението добива следния вид:

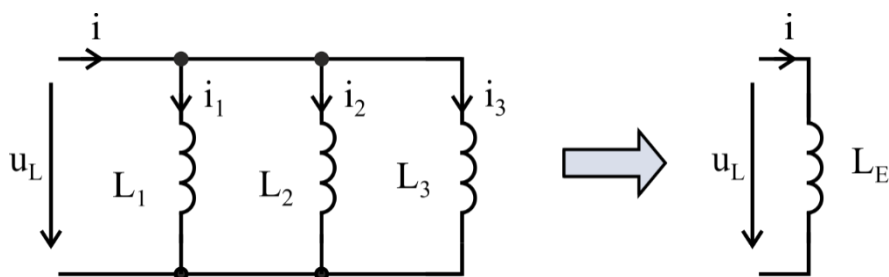
$$u_{\text{BX}} = L_1 \frac{di_L}{dt} + L_2 \frac{di_L}{dt} + L_3 \frac{di_L}{dt} = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di_L}{dt} = L_E \frac{di_L}{dt}. \quad (4.30)$$

С други думи, еквивалентната индуктивност на последователно съединени бобини е:

$$L_E = L_1 + L_2 + L_3. \quad (4.31)$$

Аналогично се разглеждат паралелно свързани бобини (фиг. 4.18), за които може да се запише следното уравнение по ПЗК:

$$i = i_1 + i_2 + i_3. \quad (4.32)$$



Фиг. 4.18. Паралелно съединение на бобини

Тъй като паралелните бобини имат едно и също напрежение u_L , уравнението може да се преобразува до:

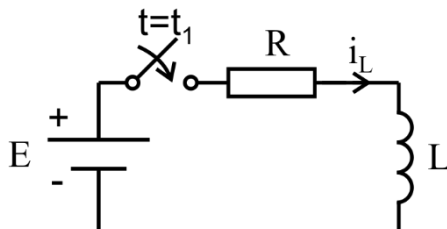
$$i = \frac{1}{L_1} \int_0^t u_L dt + \frac{1}{L_2} \int_0^t u_L dt + \frac{1}{L_3} \int_0^t u_L dt = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) \int_0^t u_L dt = \frac{1}{L_E} \int_0^t u_L dt. \quad (4.33)$$

С други думи, еквивалентната индуктивност на паралелно свързани бобини е:

$$\frac{1}{L_E} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \rightarrow L_E = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}}. \quad (4.34)$$

4.2.7. Енергия, зареждана в бобините

Разглежда се ситуация, при която бобината L се свързва към постоянен източник на напрежение E със съпротивление R (фиг. 4.19).



Фиг. 4.19. Свързване на бобина към напрежение

Под действието на електрическото поле през бобината протича ток i_L , който от своя страна създава магнитно поле. По-рано вече беше показано, че магнитно поле може да въздейства върху движещи се заредени частици, което означава, че

е носител на енергия. Казано с други думи, когато в бобината тече ток, в нейното магнитно поле е заредена определено количество енергия.

И в този случай енергията не може да се зарежда и разрежда мигновено, а е необходимо време. Тя може да се определи, изхождайки от моментната мощност $p_L(t)$, зареждана в бобината:

$$p_L(t) = i_L(t) \cdot u_L(t) = i_L L \frac{di_L}{dt} \quad (4.35)$$

Ако в момента от времето $t = t_1$ бобината започва да се зарежда, а в момента от времето $t = t_2$ тя е напълно заредена с енергия W_C , последната може да се определи чрез интегриране на мощността $P_L(t)$ във времеви интервал от t_1 до t_2 :

$$W_L = \int_{t_1}^{t_2} p_L(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} i_L L \frac{di_L}{dt} dt = \int_0^{I_{MAX}} L i_L di_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2 \quad (4.36)$$

С други думи, енергията, която се зарежда в една бобина под формата на магнитно поле, зависи единствено от нейната индуктивност и от големината на течащия през нея ток:

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2 \quad (4.37)$$

4.3. Бобини и кондензатори при установен постоянен ток режим

Вече беше указано, че кондензаторите и бобините са елементи, които съхраняват енергия, съответно под формата на електрическо и магнитно поле. Ето защо при тях връзката между напрежение и ток се дава съгласно:

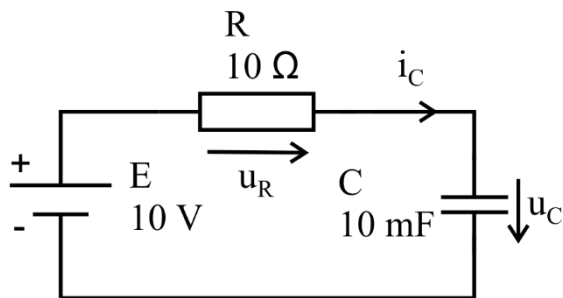
Кондензатори		Бобини
$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$	(4.38)	$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0)$	(4.40)	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0)$

Както се вижда от уравнение (4.38) - (4.41), това са два подобни, но противоположни елемента. От уравнения (4.38) и (4.39) следва, че в във вериги при установен постоянен ток режим ($u_C = const$ и $i_L = const$) през кондензаторите не протича ток и върху бобините няма пад на напрежение:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot 0 = 0 \text{ A};$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot 0 = 0 \text{ V}. \quad (4.42)$$

Пример 4.2. За схемата от фиг. 4.20 да се определят токът i_C и напрежението u_C на кондензатор.

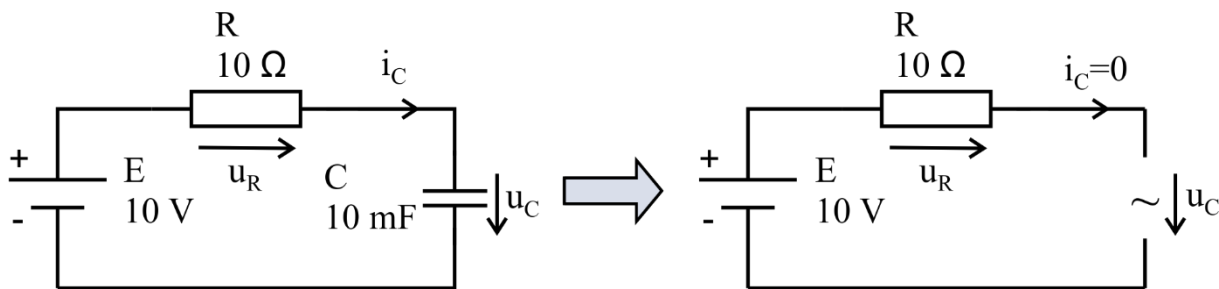


Фиг. 4.20. Схема към пример 4.2

Решение: Тъй като това е постояннотокова верига, през кондензатора няма да протече ток:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0 \text{ A.}$$

С други думи, кондензаторът прекъсва веригата за постоянен ток, което позволява създаването на еквивалентна заместваща схема (фиг. 4.21) чрез замяна на кондензатора с прекъснатата верига:



Фиг. 4.21. Еквивалентна заместваща схема към пример 4.2

Също така може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$E = u_R + u_C = R \cdot i_C + u_C = 0 + u_C.$$

Следователно падът на напрежение върху кондензатора и резистора са съответно:

$$u_C = E = 10 \text{ V};$$

$$u_R = i_C \cdot R = 0 \times 10 = 0 \text{ V.}$$

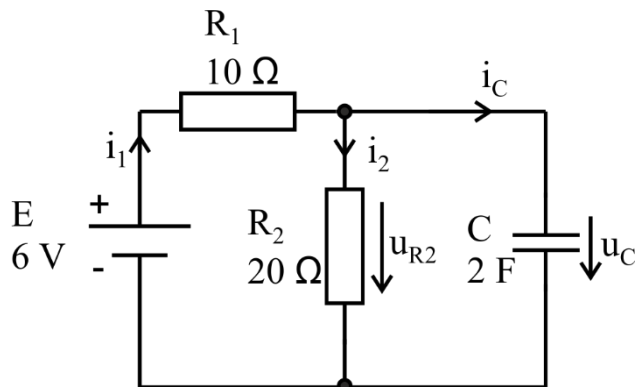
Пример 4.3. За схемата от фиг. 4.22 да се определят токът i_C и напрежението u_C на кондензатора.

Задачата може да се реши по два начина.

Решение 1:

Може да се запише следната система от уравнения по метода със законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_C \\ E = R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 \\ R_2 \cdot i_2 - u_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = i_2 + i_C \\ 6 = 10 \cdot i_1 + 20 \cdot i_2 \\ u_C = 20 \cdot i_2 \end{cases}$$



Фиг. 4.22. Схема към пример 4.3

Тъй като веригата е постояннотокова, през кондензатора не тече ток:

$$i_C = 0.$$

Следователно горната система става:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + 0 \\ 6 = 10 \cdot i_1 + 20 \cdot i_2 \\ u_C = 20i_2 \end{cases}$$

Замествайки уравнение 1 в уравнение 2, за двата тока се получава:

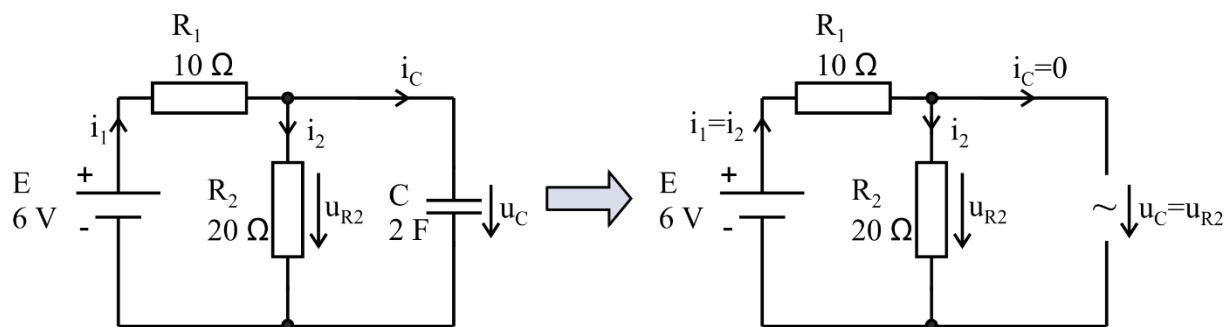
$$i_2 = i_1 = \frac{6}{10 + 20} = 0,2 \text{ A.}$$

От третото уравнение се изразява напрежението на кондензатора:

$$u_C = 20 \cdot i_R = 20 \times 0,2 = 4 \text{ V.}$$

Решение 2:

Задачата може да се реши и като се създаде еквивалентна заместваща схема:



Фиг. 4.23. Еквивалентна заместваща схема към пример 4.3

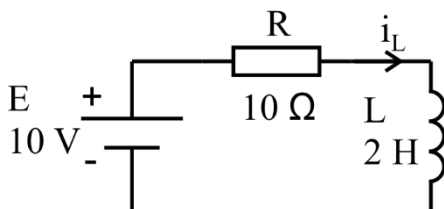
Вижда се, че веригата става едноконтурна, т.е. $i_1 = i_2$, откъдето по Закона на Ом се получава:

$$i_2 = i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{6}{10 + 20} = 0,2 \text{ A.}$$

Тъй като кондензаторът е свързан паралелно на резистора R_2 , техните напрежения са равни:

$$u_C = u_{R2} = R_2 \cdot i_2 = 20 \times 0,2 = 4 \text{ V}.$$

Пример 4.4. За схемата от фиг. 4.24 да се определят токът и напрежението на бобината.



Фиг. 4.24. Схема към пример 4.4

Решение: За схемата може да се запише уравнение по ВЗК:

$$E = u_R + u_L.$$

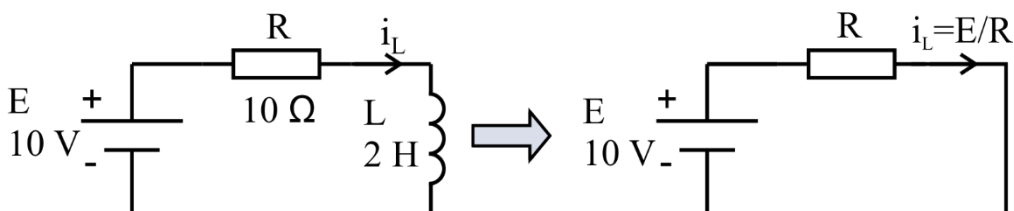
Тъй като веригата е постояннотокова, падът на напрежението върху бобината е нула ($u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0 \text{ V}$), т.е. от ВЗК се получава:

$$E = u_R + u_L = u_R + 0 = R \cdot i_L = 10 \cdot i_L.$$

Следователно токът във веригата (който е и ток на бобината) е:

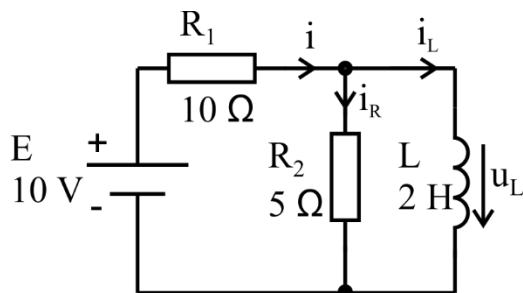
$$i_L = \frac{E}{R} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A}.$$

От казаното до тук се вижда, че може да се създаде еквивалентна заместваща схема, в която бобината се замени с късо съединение:



Фиг. 4.25. Еквивалентна заместваща схема към пример 4.4

Пример 4.5. За схемата от фиг. 4.26 да се определят i_L и u_L на бобината.



Фиг. 4.26. Схема към пример 4.5

Решение: За схемата може да се запишат уравнения по метода със законите на Кирхоф (1 уравнение по ПЗК и 2 по ВЗК):

$$\begin{cases} i = i_R + i_L \\ E = R_1 \cdot i + R_2 \cdot i_R \\ R_2 \cdot i_R - u_L = 0 \end{cases}$$

В постояннотокови вериги няма пад на напрежение върху бобините:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0 \text{ V.}$$

Следователно от третото уравнение се получава:

$$R_2 \cdot i_R = u_L = 0 \rightarrow i_R = 0 \text{ A.}$$

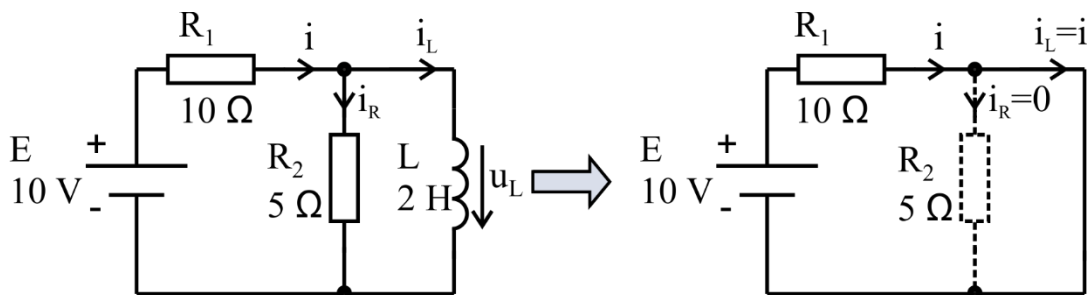
От уравнение 1 се получава, че:

$$i = 0 + i_L.$$

Полагайки първото във второто уравнение, за другите 2 тока се получава:

$$i = i_L = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A.}$$

Задачата може да се реши и чрез създаване на еквивалентна заместваща схема, в която бобината е заменена с късо съединение (фиг. 4.27). Тъй като R_2 е свързан паралелно на късо съединение, той бива шунтиран, т.е. през него не тече ток.



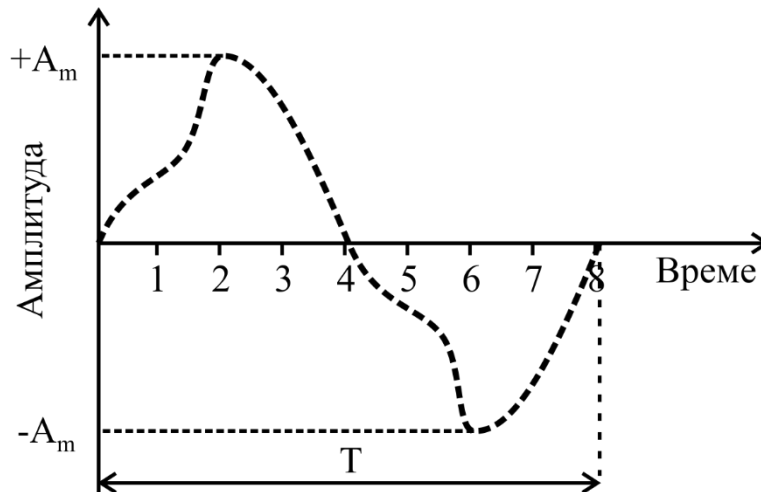
Фиг. 4.27. Еквивалентна заместваща схема към пример 4

Тема 5. Синусоидални електрически вериги

5.1. Променливотокови вериги

5.1.1. Основни понятия

В променливотоковите вериги действат променливотокови сигнали. Това са такива токове и напрежения, които се изменят както по големина, така и по посока (фиг. 5.1).



Фиг. 5.1. Примерен променливотоков сигнал (ток или напрежение)

Формата на сигнала се характеризира с няколко основни величини:

Периодът (T) е най-краткият интервал от време, за който сигналът се повтаря. Мерната единица за период е секунди [s];

Честотата (f) е броят повторения на сигнала за една секунда:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (5.1)$$

Мерната единица за честота е Херц [Hz].

Амплитудата (A_m) е пиковата (максималната и минималната) стойност на сигнала. Мерната ѝ единица зависи от типа на величината: за токове е Ампер, а за напрежения - Волт.

5.1.2. Разлика между постоянен и променлив ток

Съществуват няколко фундаментални разлики между постоянния (DC) и променливия (AC) ток:

Посока на тока

Постояннотокови вериги

В постояннотоковите вериги токът тече винаги в една и съща посока - от плюс към минус, т.е. електроните се движат от минус към плюс и обикалят цялата верига.

Променливотокови вериги

В променливотоковите вериги посоката на движение на електрическите заряди се изменя във времето. Казано с други думи, токоносителите трептят около началната си позиция,



Фиг. 5.2. Движение на електрони при постоянен ток

като непрекъснато променят посоката си на движение.

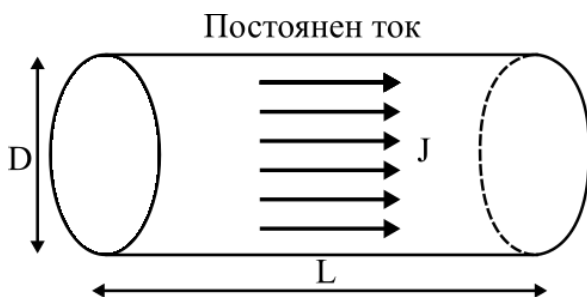


Фиг. 5.3. Движение на електрони при променлив ток

Повърхностен ефект

Постояннотокови вериги

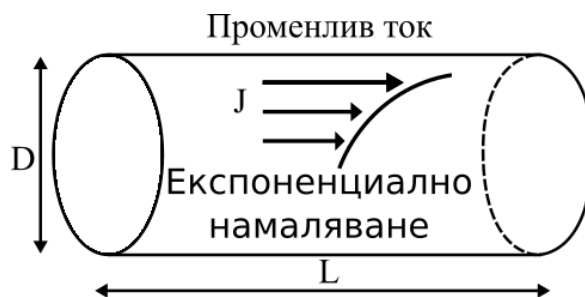
В постояннотоковите вериги плътността на тока е еднаква в целия обем на проводника.



Фиг. 5.4. Плътност на постоянния ток

Променливотокови вериги

В променливотоковите вериги плътността на токоносителите намалява експоненциално в дълбочина на проводника. Това означава, че съпротивлението на проводниците при DC и AC режим е различно.



Фиг. 5.5. Плътност на променливия ток

Повърхностния ефект оказва съществено влияние върху съпротивлението на проводниците при много високи честоти, но няма да бъде разглеждан подробно в рамките на този учебник.

5.2. Синусоиди и комплексни числа

5.2.1. Синусоидални величини

Най-често използваната форма на сигнала е синусоидалната. Нека $A(t)$ е синусоида, зададена с:

$$A(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_A), \quad (5.2)$$

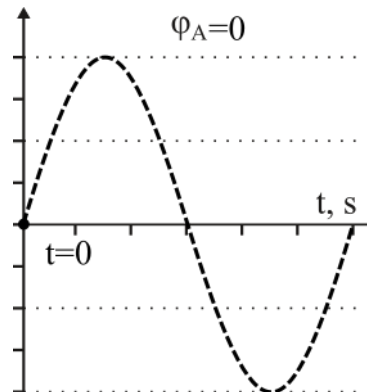
ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

където A_m е амплитудата на синусоидата, $\omega = 2\pi f$ се нарича *ъглова честота* и се измерва в радиани за секунда [$rad \cdot s^{-1}$], а φ_A е началната фаза на синусоидата, измервана в радиани [rad] или градуси [$^\circ$].

Понятието *начална фаза* показва отместването на синусоидата спрямо нулевия момент $t = 0$, като са възможни три ситуации:

- $\varphi_A = 0$ - синусоидата има нулева начална фаза и започва точно в момента $t = 0$:

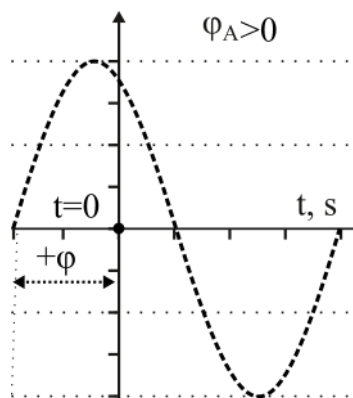
$$A(t) = A_m \sin(\omega t) \quad (5.3)$$



Фиг. 5.6. Синусоида при $\varphi_A = 0$

- $\varphi_A > 0$ - синусоидата избързва спрямо моментът нула, т.е. започва в по-ранен момент от времето спрямо $t = 0$:

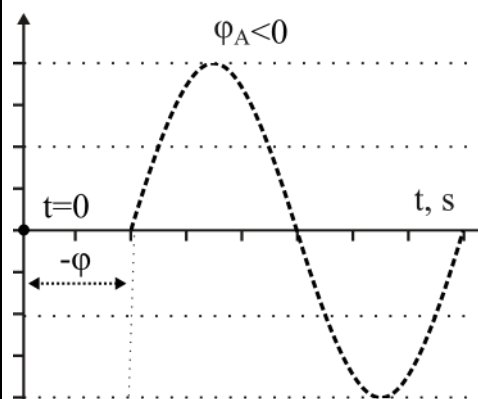
$$A(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi_A) \quad (5.4)$$



Фиг. 5.7. Синусоида при $\varphi_A > 0$

- $\varphi_A < 0$ - синусоидата закъснява спрямо моментът нула, т.е. започва в по-късен момент от времето спрямо $t = 0$:

$$A(t) = A_m \sin(\omega t - \varphi_A) \quad (5.5)$$



Фиг. 5.8. Синусоида при $\varphi_A < 0$

Нека са дадени токът и напрежението на даден клон от веригата:

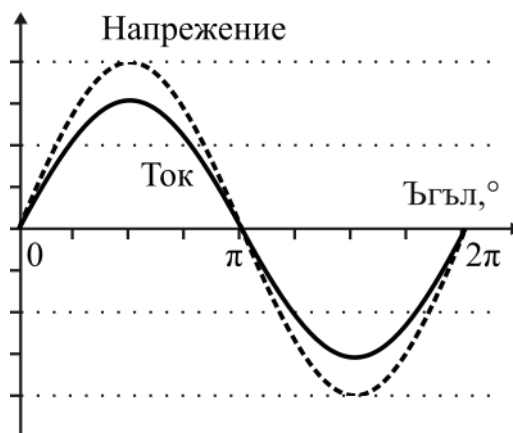
$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u); \quad i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (5.6)$$

където φ_u и φ_i са началните им фази. Разликата $\varphi_u - \varphi_i$ се нарича **фазова разлика**:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (5.7)$$

Могат да се разграничат следните ситуации за фазовата разлика:

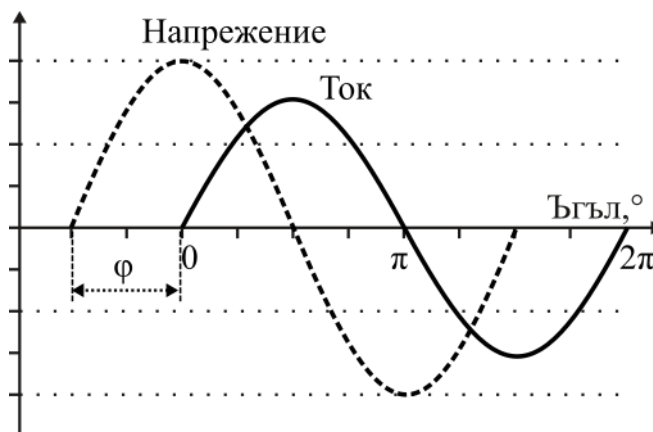
- $\varphi = 0$ - напрежението и токът са във фаза, т.е. и двете величини започват в един и същ момент от времето.



Фиг. 5.9. Ток и напрежение при нулева начална фаза

- $\varphi \neq 0$ - напрежението и токът се разминават във времето, като съществуват две възможности:

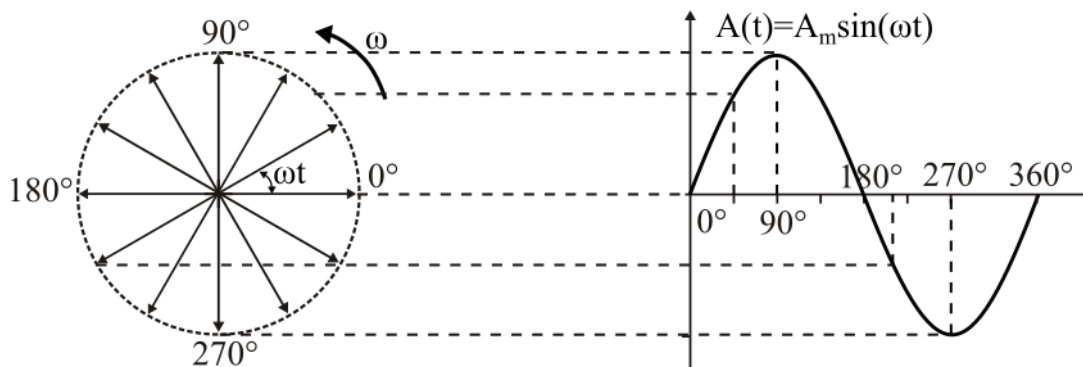
- при $\varphi > 0$ токът изостава от напрежението с φ° ;
- при $\varphi < 0$ напрежението изостава от тока с φ° .



Фиг. 5.10. Ток и напрежение при ненулева начална фаза

5.2.2. Синусоидата като вектор

Синусоидата $A(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_A)$ може да се представи като вектор, който се върти в посока обратна на часовниковата с ъглова скорост ω (фиг. 5.11).



Фиг. 5.11. Представяне на синусоидата, като въртящ се вектор

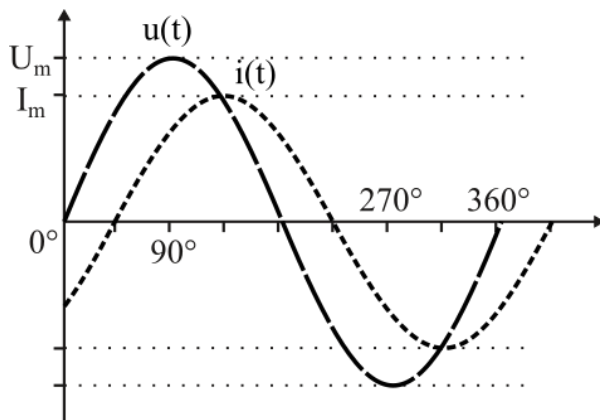
ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

Това означава, че:

- в момента от времето $t = 0$ векторът е завъртян на ъгъл 0° ;
- когато $A(t)$ има максимум $(+A_m)$ векторът е завъртян на ъгъл $+90^\circ$;
- когато $A(t)$ има минимум $(-A_m)$ векторът е завъртян на ъгъл -90° .

Нека токът и напрежението на даден участък от веригата са (фиг. 5.12):

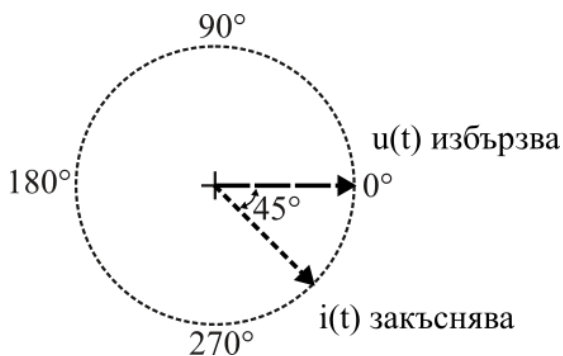
$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t) \quad i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - 45^\circ). \quad (5.8)$$



Фиг. 5.12. Представяне на синусоидата, като въртящ се вектор

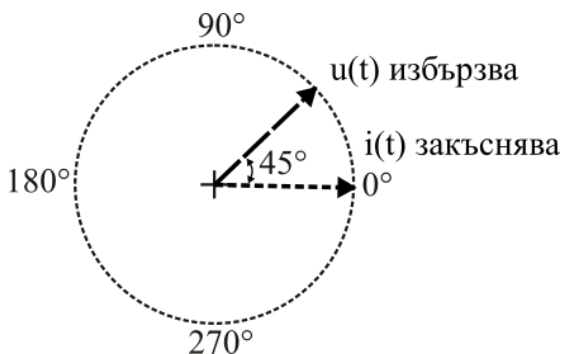
Токът закъснява спрямо напрежението с ъгъл 45° , т.е. ъгълът на фазовата разлика е $\varphi = 45^\circ$, като това закъснение е изпълнено за всеки момент от времето:

- В момента от времето $t = 0$ векторът на напрежението сочи към 0° , а векторът на тока към -45° .



Фиг. 5.13. Векторите на тока и напрежението при $t = t_1$

- Във всеки следващ момент от времето двата вектора ще се въртят заедно с една и съща ъглова скорост ω , като токът ще продължава да изостава от напрежението със същия ъгъл $\varphi = 45^\circ$.



Фиг. 5.14. Векторите на тока и напрежението при $t = t_2$

5.2.3. Комплексен образ на синусоида

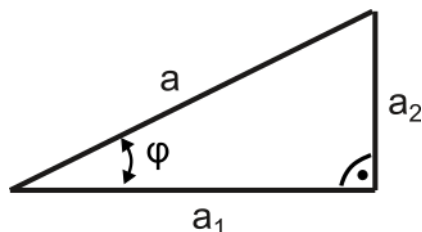
За да се облекчи анализът на вериги при установен синусоидален режим е прието синусоидите да бъдат представяни като комплексни числа. Нека е дадена синусоидата $A(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_A)$. Ако анализът се извърши за момента от времето $t = 0$, то съставката $\omega t = 0$ изчезва и представящият я вектор може да се опише с комплексно число по следният начин:

$$\dot{A}_m = A_m \cdot e^{j\varphi_A} = A_m \cdot \cos(\varphi_A) + j \cdot A_m \cdot \sin(\varphi_A). \quad (5.9)$$

Равенството в уравнение (5.9) е следствие от формулата на Ойлер:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi). \quad (5.10)$$

На практика всяко комплексно число описва правоъгълен триъгълник (фиг. 5.15), като съществуват няколко форми на запис:



Фиг. 5.15. Комплексното число като правоъгълен триъгълник

- Алгебрична форма:

$$\dot{A} = a_1 + ja_2; \quad (5.11)$$

- Експоненциална (показателна) форма:

$$\dot{A} = a \cdot e^{j\varphi}; \quad (5.12)$$

- Полярна форма:

$$\dot{A} = a \angle \varphi. \quad (5.13)$$

От уравненията се вижда, че преминаването от синусоида към комплексно число и обратно е възможно единствено с експоненциалната/полярната форма на комплексните числа.

Преминаване от алгебрична в експоненциална/полярна форма

Нека е дадено комплексното число $\dot{A} = a_1 + ja_2$, където a_1 и a_2 са двата катета на правоъгълния триъгълник. Хипотенузата a и ъгълът φ могат да бъдат определени съгласно:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{a_2}{a_1}. \quad (5.14)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

Това позволява комплексното число да бъде изразено в експоненциална и полярна форма:

$$\dot{A} = a \cdot e^{j\varphi} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot e^{j \arctg \frac{a_2}{a_1}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \angle \arctg \frac{a_2}{a_1} \quad (5.15)$$

Забележка: Ако реалната част a_1 е отрицателно число ($a_1 < 0$), следва първо да се извади минус (-) пред скоби и едва след това да се представи в експоненциална/полярна форма:

$$\dot{A} = a_1 + ja_2 = -(-a_1 - ja_2) = -\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot e^{j \arctg \frac{-a_2}{-a_1}} \quad (5.16)$$

Преминаване от експоненциална/полярна в алгебрична форма

За да се изпълни обратното преминаване от експоненциална/полярна към алгебрична форма, е необходимо да се приложи формулата на Ойлер. Например, ако комплексното число е $\dot{A} = a \cdot e^{j\varphi}$, то реалната и имагинерната му съставки са:

$$\dot{A} = a \cdot e^{j\varphi} = a \cdot \cos(\varphi) + j \cdot a \cdot \sin(\varphi) = a_1 + ja_2 \quad (5.17)$$

Пример 6.1. Да се представят синусоидални напрежения в комплексна форма:

$$u_1(t) = 6 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ V} \quad u_2(t) = -6 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}.$$

Те могат да бъдат представени в експоненциална и полярна форма по следния начин:

$$\dot{U}_1 = 6 \cdot e^{j60^\circ} = 6 \angle 60^\circ \text{ V} \quad \dot{U}_2 = -6 \cdot e^{j30^\circ} = -6 \angle 30^\circ \text{ V}.$$

След прилагане формулата на Ойлер, те могат да бъдат преобразувани до алгебричната си форма:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 6 \cdot e^{j60^\circ} = 6 \cos(60^\circ) + j6 \sin(60^\circ) = 3 + j5,20 \text{ V}; \\ \dot{U}_2 &= -6 \cdot e^{j30^\circ} = -6 \cos(30^\circ) - j6 \sin(30^\circ) = -5,20 - j3 \text{ V}. \end{aligned}$$

Пример 6.2. Да се определят синусоидите, съответстващи на следните комплексни напрежения:

$$\dot{U}_1 = 2 + j5 \text{ V} \quad \dot{U}_2 = -5 + j1 \text{ V}.$$

За да бъдат преобразувани до синусоиди, двете комплексни числа следва да бъдат представени в техните експоненциални форми:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 2 + j5 = \sqrt{2^2 + 5^2} \cdot e^{j \arctg(\frac{5}{2})} = 5,34 \cdot e^{j68,2^\circ} \text{ V}; \\ \dot{U}_2 &= -5 + j1 = -(5 - j1) = -\sqrt{5^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg(\frac{-1}{5})} = 5,1 \cdot e^{-j11,3^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

Следователно за синусоидите се получава:

$$u_1(t) = 5,34 \cdot \sin(\omega t + 68,2^\circ) \text{ V} \quad u_2(t) = 5,1 \cdot \sin(\omega t - 11,3^\circ) \text{ V}.$$

5.2.4. Аритметични операции с комплексни числа

Събиране/изваждане на комплексни числа:

Нека са дадени две комплексни числа в алгебричните си форми ($A = a_1 + ja_2$ и $B = b_1 + jb_2$). Те могат да бъдат събрани/извадени съгласно:

$$A \pm B = (a_1 + ja_2) \pm (b_1 + jb_2) = (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2). \quad (5.18)$$

Умножение на комплексни числа:

Ако две комплексни числа са дадени в алгебричните си форми ($A = a_1 + ja_2$ и $B = b_1 + jb_2$) те могат да бъдат умножени по следния начин:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1 + ja_2) \cdot (b_1 + jb_2) = a_1b_1 + ja_2b_1 + ja_1b_2 - a_2b_2 = \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2) + j(a_2b_1 + a_1b_2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ако комплексните числа са дадени в експоненциалните си форми ($A = a \cdot e^{j\varphi_a}$ и $B = b \cdot e^{j\varphi_b}$), може да се използва:

$$A \cdot B = a \cdot e^{j\varphi_a} \cdot b \cdot e^{j\varphi_b} = a \cdot b \cdot e^{j(\varphi_a + \varphi_b)}. \quad (5.20)$$

Деление на комплексни числа:

Ако две комплексни числа са дадени в алгебричните си форми ($A = a_1 + ja_2$ и $B = b_1 + jb_2$), те могат да бъдат разделени, като числителят и знаменателят се умножават по комплексно-спрегнатата стойност на знаменателя:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{a_1 + ja_2}{b_1 + jb_2} = \frac{a_1 + ja_2}{b_1 + jb_2} \cdot \frac{b_1 - jb_2}{b_1 - jb_2} = \frac{(a_1b_1 - a_2b_2) + j(a_2b_1 + a_1b_2)}{b_1^2 + jb_1b_2 - jb_1b_2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1b_1 - a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} + j \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ако комплексните числа са дадени с техните експоненциални форми ($A = a \cdot e^{j\varphi_a}$ и $B = b \cdot e^{j\varphi_b}$), е в сила:

$$\frac{A}{B} = \frac{a \cdot e^{j\varphi_a}}{b \cdot e^{j\varphi_b}} = \frac{a}{b} \cdot e^{j(\varphi_a - \varphi_b)}. \quad (5.22)$$

5.3. Пасивни елементи при установен синусоидален режим

5.3.1. Резистори при синусоидални токове и напрежения

Нека през идеален резистор тече синусоидален ток с нулева начална фаза:

$$i_R(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + 0^\circ) \text{ A}. \quad (5.23)$$

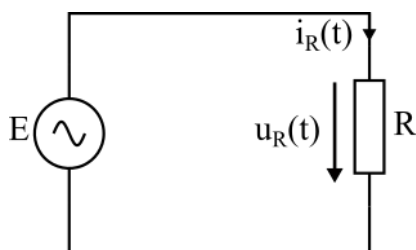
Съгласно Законът на Ом, падът на напрежението върху резистора е:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) = R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 0^\circ) \text{ V}. \quad (5.24)$$

Получената зависимост показва следните неща:

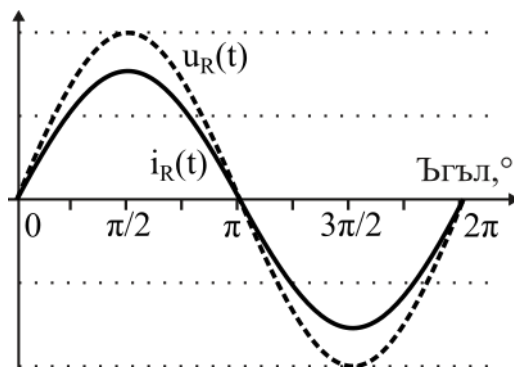
- Фазовата разлика на резистор е 0° :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 - 0 = 0^\circ. \quad (5.25)$$



Фиг. 5.16. Резистор при установен синусоидален режим

- Токът и напрежението на резистора са във фаза (фиг. 5.17).

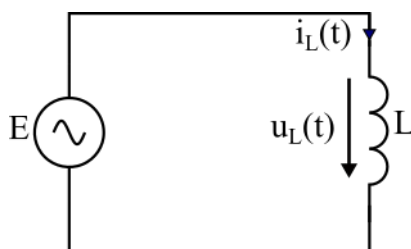


Фиг. 5.17. Времедиаграма на напрежението и тока на резистор при установен синусоидален режим

5.3.2. Бобини при синусоидални токове и напрежения

Нека през идеална бобина тече синусоидален ток с нулева начална фаза:

$$i_L(t) = I_m \cdot \sin(\omega t) \text{ A}. \quad (5.26)$$



Фиг. 5.18. Бобина при установен синусоидален режим

Следователно падът на напрежението върху бобината е:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot \frac{d(I_m \cdot \sin(\omega t))}{dt} = \omega L \cdot I_m \cdot \cos(\omega t) = \\ &= \omega L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

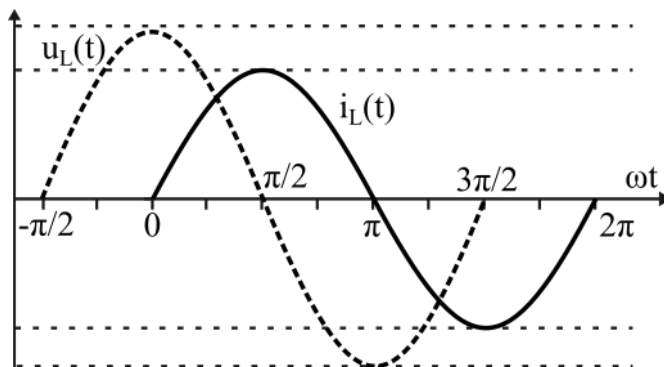
Получената зависимост показва няколко неща:

- Фазовата разлика за идеална бобина е 90° :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ. \quad (5.28)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

- Напрежението $u_L(t)$ изпреварва тока $i_L(t)$ с 90° (фиг. 5.19), т.е. бобината забавя изменението на тока;
- Съпротивлението на бобината при установен синусоидален режим е ωL .

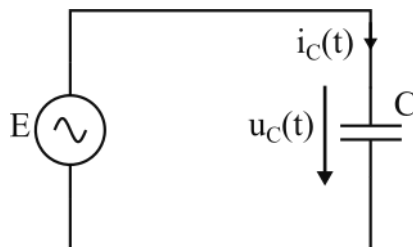


Фиг. 5.19. Времедиаграма на напрежението и тока на бобина при установен синусоидален режим

5.3.3. Кондензатори при синусоидални токове и напрежения

Нека през идеален кондензатор тече синусоидален ток с нулева начална фаза:

$$i_C(t) = I_m \cdot \sin(\omega t) \text{ A.} \quad (5.29)$$



Фиг. 5.20. Кондензатор при установен синусоидален режим

Следователно падът на напрежението върху кондензатора е:

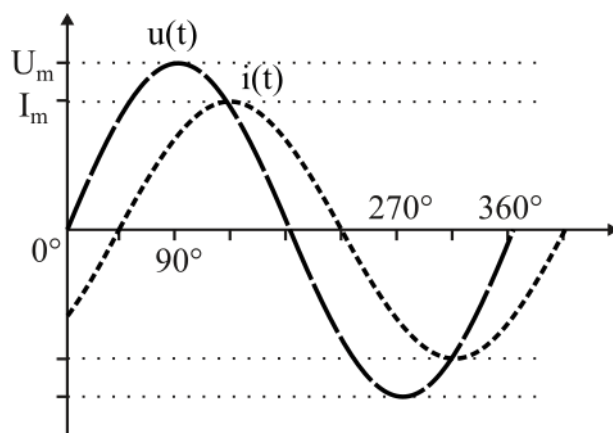
$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int I_m \cdot \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t) = \\ &= -\frac{1}{\omega C} I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = \frac{1}{\omega C} I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ V.} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Получената зависимост показва следните неща:

- Фазовата разлика на идеален кондензатор е -90° :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ - 0^\circ = -90^\circ. \quad (5.31)$$

- Съпротивлението на кондензатора при установен синусоидален режим е отрицателно и е с големина $\frac{1}{\omega C}$.
- Напрежението $u_C(t)$ закъснява спрямо тока $i_C(t)$ с 90° (фиг. 5.21);

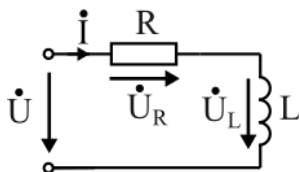


Фиг. 5.21. Времедиаграма на напрежението и тока на кондензатор при установен синусоидален режим

5.3.4. Установен синусоидален режим в последователна RL верига

Нека последователна RL верига се захранва от синусоидален източник на напрежение (фиг. 5.22), който създава следния ток:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t). \quad (5.32)$$



Фиг. 5.22. Последователна RL верига

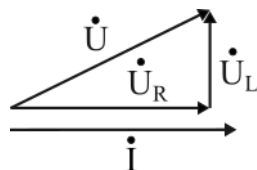
Вече беше установено, че падовете на напрежение върху бобината и резистора са съответно:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) = U_R \cdot \sin(\omega t); \\ u_L(t) &= \omega L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_L \cdot \sin(\omega t + 90^\circ). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Следователно трите синусоиди могат да бъдат представени в комплексна форма както следва:

$$\dot{I} = I_m \cdot e^{j0} = I_m; \quad \dot{U}_R = R \cdot I_m \cdot e^{j0} = R \cdot \dot{I}; \quad \dot{U}_L = \omega L \cdot I_m e^{j90^\circ}. \quad (5.34)$$

Отчитайки посоките на векторите от уравнение (5.34), може да се построи векторната диаграма, представена на фиг. 5.23.



Фиг. 5.23. Векторна диаграма на последователна RL верига

От нея се вижда, че векторът на входното напрежение във веригата е:

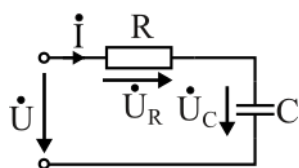
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = \dot{I} \cdot (R + \omega L \cdot e^{j90^\circ}) = \dot{I} \cdot (R + j\omega L) = \dot{I} \cdot (R + jX_L). \quad (5.35)$$

В уравнение (5.35) може да се докаже, че $e^{j90^\circ} = j$, като се приложи формулата на Ойлер. Величината $X_L = \omega L$ е индуктивното съпротивление на бобината, а $jX_L = j\omega L$ е комплексното ѝ съпротивление, измервани в $[\Omega]$.

5.3.5. Установен синусоидален режим в последователна RC верига

Нека последователна RC верига се захранва от синусоидален източник на напрежение (фиг. 5.24), който създава ток $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Следователно падовете на напрежение във веригата са:

$$u_R(t) = R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \quad u_C(t) = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - 90). \quad (5.36)$$



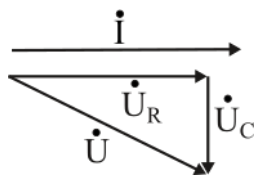
Фиг. 5.24. Последователна RC верига

Трите синусоиди могат да бъдат преобразувани в комплексна форма:

$$\dot{I} = I_m e^{j0^\circ} = I_m \quad \dot{U}_R = R \cdot I \cdot e^{j0^\circ} = R \cdot \dot{I} \quad \dot{U}_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot e^{-j90^\circ}. \quad (5.37)$$

Следователно векторната диаграма на веригата има вида, показан на фиг. 5.25. С други думи, за векторът на входното напрежение се получава:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{I} \cdot \left(R + \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j90^\circ} \right) = \dot{I} \cdot \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right) = \dot{I} \cdot (R - jX_L). \quad (5.38)$$



Фиг. 5.25. Векторна диаграма на последователна RC верига

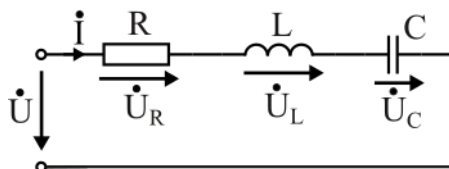
Величината $X_C = \frac{1}{\omega C}$ се нарича *капацитивно съпротивление*, а $-jX_L = -j \frac{1}{\omega C}$ е *комплексното съпротивление на кондензатора*, измервани в $[\Omega]$.

5.3.6. Установен синусоидален режим в последователна RLC верига

Нека последователна RLC верига се захранва от синусоидален източник на напрежение (фиг. 5.26), който създава ток $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t)$. За комплексните токове и напрежения във веригата се получава:

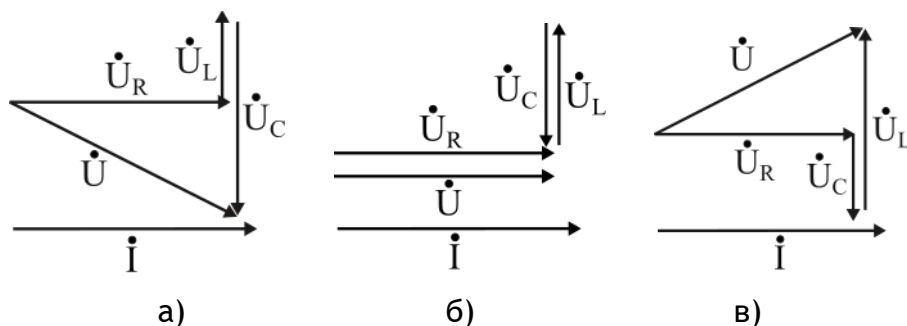
$$\dot{I} = I_m e^{j0^\circ} = I_m \quad \dot{U}_R = \dot{I} R \quad \dot{U}_L = \omega L \cdot \dot{I} \cdot e^{j90^\circ} \quad \dot{U}_C = \frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I} \cdot e^{-j90^\circ}. \quad (5.39)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги



Фиг. 5.26. Последователна RLC верига

В случая векторната диаграма на веригата може да изглежда по три начина, в зависимост от големините на ωL и $\frac{1}{\omega C}$ (фиг. 5.27).



Фиг. 5.27. Векторна диаграма на последователна RLC верига при:

а) $\frac{1}{\omega C} > \omega L$; б) $\frac{1}{\omega C} = \omega L$; в) $\frac{1}{\omega C} < \omega L$

Обобщено, горните векторни диаграми могат да се запишат по следния начин:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{i} \left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) = \dot{i} (R + jX_L - jX_C) = \dot{i} (R + jX) = Z \cdot \dot{i}, \quad (5.40)$$

където $X = X_L - X_C$ е общото реактивно съпротивление на последователна RLC верига, а $Z = R + jX$ е комплексното ѝ съпротивление, измервани в $[\Omega]$.

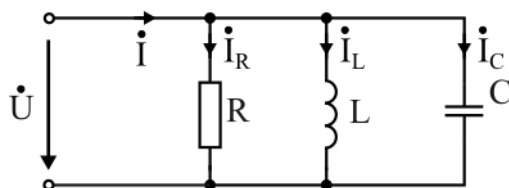
Получената зависимост представлява ВЗК в комплексна форма. Ситуацията при която $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ се нарича *резонанс на напреженията* и ще бъде разгледана по-подробно в Тема 7.

Получените зависимост показват няколко много важни неща:

- Комплексното съпротивление има две съставки - активна R и реактивна $X = X_L - X_C$;
- Реактивното съпротивлението на бобината е положително, а на кондензатора - отрицателно.

5.3.7. Установен синусоидален режим в паралелна RLC верига

Нека паралелна RLC верига се захранва от синусоидален източник на напрежение $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t) V$.



Фиг. 5.28. Паралелна RLC верига

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

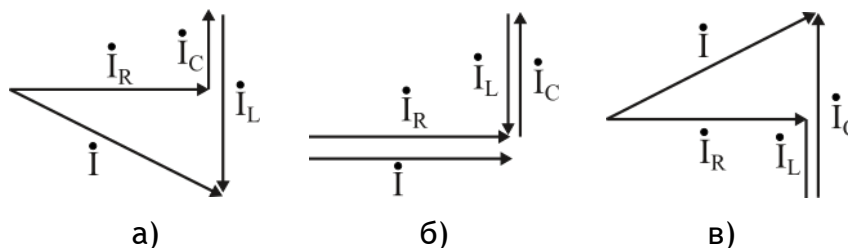
Тъй като напрежението е общо за трите елемента, за техните синусоидални токове се получава:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= \frac{u(t)}{R} = G \cdot u(t) = G \cdot U_m \cdot \sin(\omega t) \text{ A}; \\ i_L(t) &= \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{\omega L} U_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ A}; \\ i_C(t) &= C \frac{du(t)}{dt} = \omega C \cdot U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

където $G = \frac{1}{R}$ е проводимостта на резистора, $B_L = \frac{1}{\omega L}$ - реактивната проводимостта на бобината, а $B_C = \omega C$ - реактивната проводимостта на кондензатора, като всички се измерват в Сименси, [S]. В комплексна форма токовете и напреженията са:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U_m e^{j0} = U_m; & \dot{I}_R &= G \cdot \dot{U}; \\ \dot{I}_L &= \frac{1}{\omega L} \dot{U} e^{-j90^\circ} = B_L \dot{U} e^{-j90^\circ}; & \dot{I}_C &= \omega C \cdot \dot{U} e^{j90^\circ} = B_C \dot{U} e^{j90^\circ}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

В зависимост от големините на B_L и B_C , векторната диаграма може да изглежда по три различни начина, както е показано на фиг. 5.29.



Фиг. 5.29. Векторна диаграма на паралелна RLC верига при:

а) $\omega C < \frac{1}{\omega L}$; б) $\omega C = \frac{1}{\omega L}$; в) $\omega C > \frac{1}{\omega L}$

Тогава за общия ток във веригата се получава:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U} \cdot (G - j(B_L - B_C)) = \dot{U} \cdot (G - jB) = Y \cdot \dot{U}, \quad (5.43)$$

където $Y = G - jB$ е комплексната проводимост на веригата в [S].

Получената зависимост представлява ПЗК в комплексна форма. Ситуацията при която $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ се нарича *резонанс на токовете* и ще бъде разгледана по-подробно в Тема 7.

Получените зависимост показват няколко важни неща:

- Комплексната проводимост има две съставки - активна G и реактивна $B = B_L - B_C$;
- Проводимостта на бобината е отрицателна, а на кондензатора - положителна.

5.4. Основни закони в синусоидалните вериги

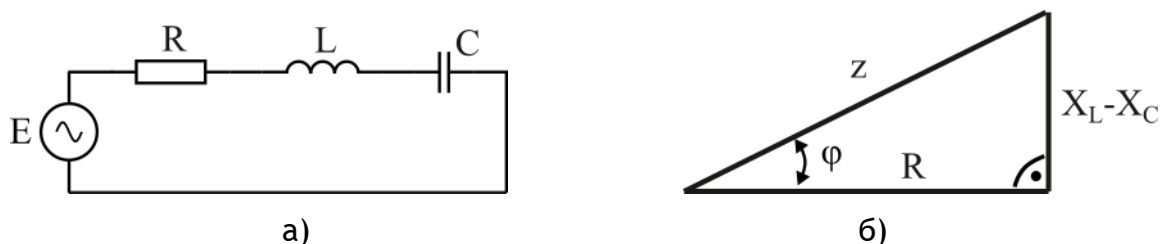
В този раздел ще бъдат дефинирани и обобщени понятията и зависимостите, които вече бяха установени.

5.4.1. Съпротивления в синусоидалните вериги

Както вече беше установено, съпротивлението на една последователна RLC верига (фиг. 5.30а) е:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX, \quad (5.44)$$

където активното съпротивление R и реактивното съпротивление $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C$ са двата катета на правоъгълен триъгълник, наричан *триъгълник на съпротивленията* (фиг. 5.30б).



Фиг. 5.30. Последователна RLC верига (а) и триъгълник на съпротивленията (б)

Комплексното съпротивление може да се запише и в експоненциална форма:

$$Z = z \cdot e^{j\varphi}, \quad (5.45)$$

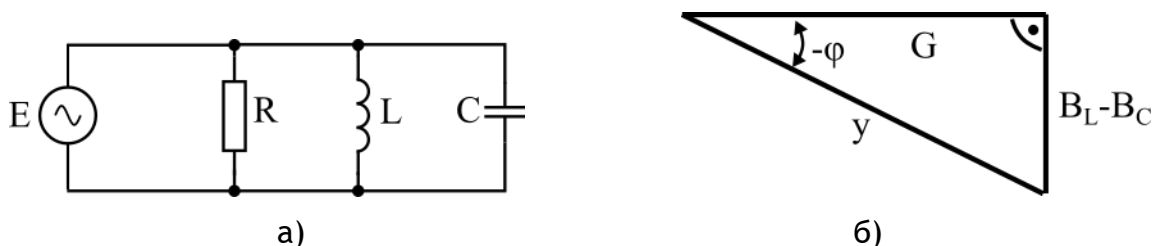
където $z = \sqrt{R^2 + X^2}$ се нарича *пълно съпротивление (импеданс) на веригата* и се измерва в $[\Omega]$, а $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ е *ъгълът на фазовата разлика*.

5.4.2. Проводимости в синусоидални вериги

Както вече беше установено, комплексната проводимост в паралелна RLC верига (фиг. 5.31) е:

$$Y = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = G - j(B_L - B_C) = G - jB, \quad (5.46)$$

където $G = \frac{1}{R}$ и $B = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ са съответно активната и реактивната проводимости, измервани в $[S]$.



Фиг. 5.31. Паралелна RLC верига (а) и триъгълник на проводимостите (б)

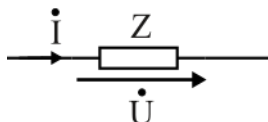
Комплексната проводимост може да се запише и в експоненциална форма:

$$Y = y \cdot e^{-j\varphi}, \quad (5.47)$$

където $y = \sqrt{G^2 + B^2}$ е пълната проводимост в $[S]$, а φ е ъгълът на фазовата разлика.

5.4.3. Закон на Ом

Нека в последователна RLC верига (фиг. 5.32) има пад на напрежение $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ и тече ток $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t)$.



Фиг. 5.32. Участък от верига с комплексно съпротивление Z

В комплексен вид двете величини са:

$$\dot{U} = U_m \cdot e^{j\varphi} \quad \dot{i} = I_m \cdot e^{j0}. \quad (5.48)$$

Законът на Ом в комплексен вид (за синусоидални вериги) гласи:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z}, \quad (5.49)$$

където $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ е комплексното съпротивление на веригата. Като се има предвид, че $Z = z \cdot e^{j\varphi}$, законът на Ом може да се запише и без комплексни числа, използвайки амплитудните стойности на тока I_m и напрежението U_m и пълното съпротивление на веригата z :

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} \rightarrow I_m \cdot e^{j0} = \frac{U_m \cdot e^{j\varphi}}{z \cdot e^{j\varphi}} \rightarrow I_m = \frac{U_m}{z}. \quad (5.50)$$

5.4.4. Първи закон на Кирхоф

Първият закон на Кирхоф за синусоидални вериги може да се запише по два начина: за моментните стойности и в комплексен вид (фиг. 5.33).



Фиг. 5.33. Възел от верига, чиито токове са представени с моментни стойности (а) и в комплексен вид (б)

За фиг. 5.33а може да се запише уравнение по ПЗК с моментните стойности:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t), \quad (5.51)$$

т.е. във всеки един момент от времето, едната синусоида е равна а сумата от другите две. В комплексен вид, горното уравнение добива следния вид:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3. \quad (5.52)$$

В общият случай ПЗК за моментните стойности се записва като:

$$\sum i_{\text{вл}}(t) = \sum i_{\text{изл}}(t), \quad (5.53)$$

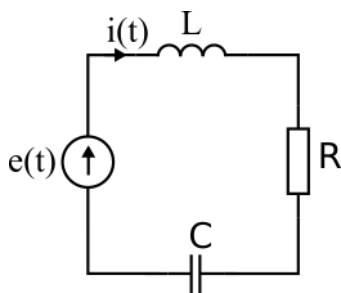
а в комплексен вид - като:

$$\sum \dot{I}_{\text{вл}} = \sum \dot{I}_{\text{изл}}. \quad (5.54)$$

5.4.5. Втори закон на Кирхоф

Разглежда се последователна RLC верига, захранвана от синусоидален източник на напрежение $e(t)$, който създава синусоидалният ток $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Вече беше установено, че в случая падовете на напрежение върху елементите са:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t); \\ u_L(t) &= \omega L \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ); \quad u_C(t) = -\frac{1}{\omega C} I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ). \end{aligned} \quad (5.55)$$



Фиг. 5.34. Последователна RLC верига, захранвана от източник на напрежение

Следователно може да се запише следното уравнение по ВЗК, използвайки моментните стойности на напреженията:

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = I_m \left(\sin(\omega t) \cdot R + \sin(\omega t + 90^\circ) \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right). \quad (5.56)$$

В комплексен вид уравнение (5.56) добива следния вид:

$$\dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I} \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = \dot{I} \cdot Z. \quad (5.57)$$

В общия случай ВЗК в комплексен вид гласи:

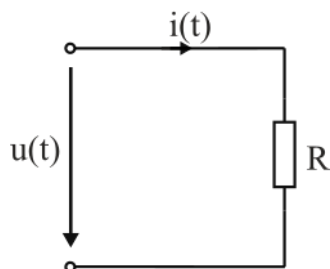
$$\sum \dot{E}_k = \sum \dot{U}_k = \sum (\dot{I}_k \cdot Z_k). \quad (5.58)$$

5.5. Мощности в синусоидални вериги

5.5.1. Моментна мощност на резистор

Разглежда се резистор, върху който е приложено синусоидално напрежение $u(t)$. По-рано беше установено, че при резисторите токът и напрежението са във фаза, т.е.:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t); \quad u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t). \quad (5.59)$$



Фиг. 5.35. Резистор при установен синусоидален режим

Следователно моментната мощност, разсейвана в резистор, е:

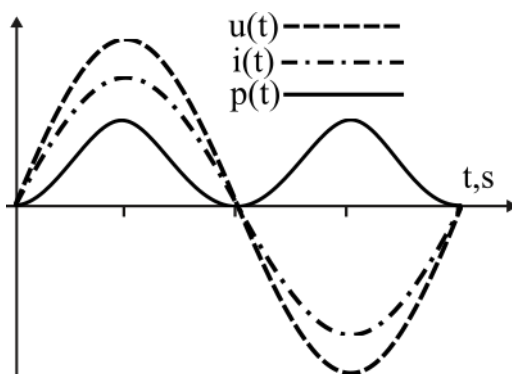
$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = I_m U_m \sin^2(\omega t). \quad (5.60)$$

Като се има предвид, че съставката $\sin^2(\omega t)$ е винаги положителна, а амплитудните стойности I_m и U_m са с един и същ знак (тъй като съвпадат по посока), може да се направи извода, че моментната мощност на резистор не може да бъде отрицателна:

$$p(t) \geq 0. \quad (5.61)$$

Получената зависимост за мощността може да се наблюдава и в графичен вид на фиг. 5.36. Средната мощност, разсейвана в резистора, може да се определи, като мощността $p(t)$ се интегрира за един период на синусоидата (от 0 до T):

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \cdot U_m \cdot \sin^2(\omega t) dt = \frac{I_m U_m}{2}. \quad (5.62)$$



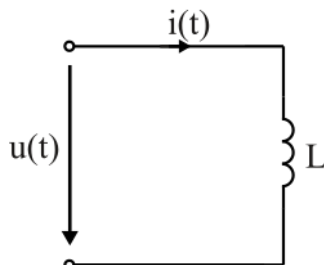
Фиг. 5.36. Моментни стойности на напрежение, ток и мощност на резистор

От уравнение (5.62) се вижда, че средната мощност на резисторите е по-голяма от нула. Такава мощност се нарича активна и тя е реално консумирана.

5.5.2. Моментна мощност на бобина

Разглежда се идеална бобина, върху която е приложено синусоидално напрежение. Тъй като токът ѝ изостава по фаза от напрежението с 90° , техните моментни стойности са:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t); \quad u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (5.63)$$



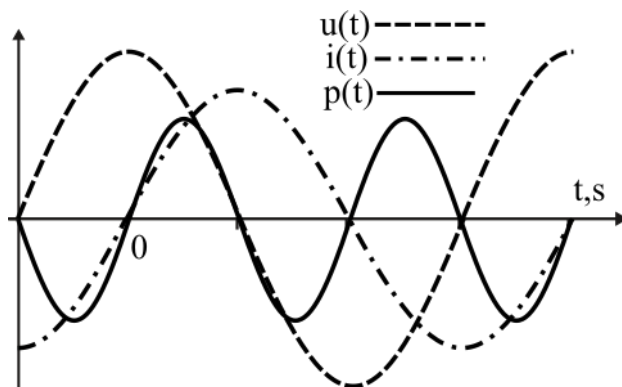
Фиг. 5.37. Бобина при установен синусоидален режим

Тогава за моментната мощност във веригата се получава:

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = I_m U_m \frac{-\cos(2\omega t + 90^\circ)}{2} = \frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t). \quad (5.64)$$

От полученото уравнение се вижда, че моментната мощност на бобината се изменя в диапазона $\left[-\frac{I_m U_m}{2} \dots +\frac{I_m U_m}{2}\right]$, което може да се наблюдава и в графичен вид на фиг. 5.38. За средната разсейвана мощност от бобина за един период на синусоидата се получава:

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m U_m \sin(2\omega t) dt = 0. \quad (5.65)$$



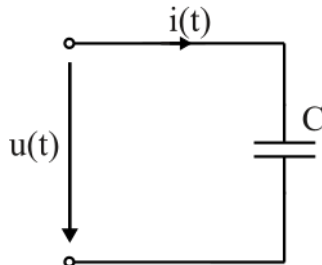
Фиг. 5.38. Моментни стойности на напрежение, ток и мощност на бобина

Вижда се, че средната мощност е $P_{CP} = 0$, т.е. идеалните бобини не консумират мощност, а единствено зареждат временно енергия под формата на магнитно поле, след което я връщат обратно към веригата. Такава енергия се нарича реактивна, т.е. тя не е реално консумирана.

5.5.3. Моментна мощност на кондензатор

Разглежда се схема с идеален кондензатор, чиито ток и напрежение са синусоидални (фиг. 5.39):

$$i(t) = I_m \sin(\omega t); \quad u(t) = U_m \sin(\omega t - 90^\circ). \quad (5.66)$$



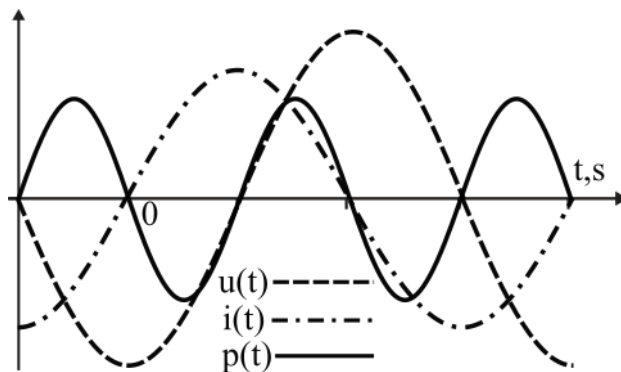
Фиг. 5.39. Кондензатор при установен синусоидален режим

За моментната му мощност се получава:

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = -I_m U_m \frac{\cos(2\omega t - 90^\circ)}{2} = -\frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t). \quad (5.67)$$

Вижда се, че подобно на бобината и при кондензатора моментната мощност се изменя в диапазона $\left[-\frac{I_m U_m}{2} \dots \frac{I_m U_m}{2}\right]$, което е представено графично на фиг. 5.40. Следователно средната консумирана мощност на кондензатора също е нула:

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) dt = 0. \quad (5.68)$$



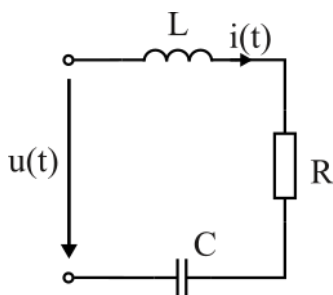
Фиг. 5.40. Моментни стойности на напрежение, ток и мощност на кондензатор

Това означава, че кондензаторът също не консумира мощност (енергия), а единствено временно зарежда енергия под формата на електрическо поле, след което я връща обратно към веригата. С други думи, мощността на кондензатора също е реактивна.

5.5.4. Моментна мощност на последователна RLC верига

Разглежда се последователна RLC верига, чиито ток и напрежение са:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t); \quad i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (5.69)$$



Фиг. 5.41. Последователна RLC верига при установен синусоидален режим

За моментната консумирана мощност във веригата се получава:

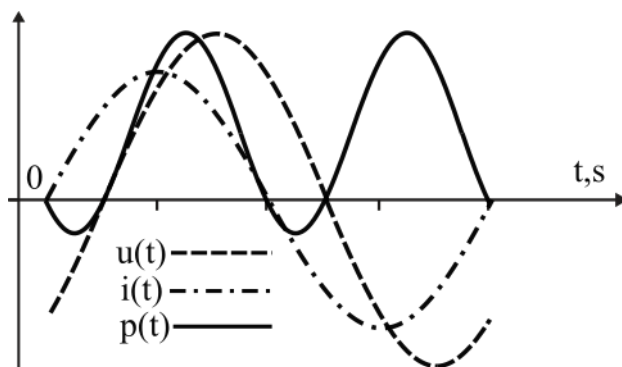
$$\begin{aligned} p(t) &= i(t) \cdot u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t) \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= U_m I_m [\cos(\varphi) \sin^2(\omega t) - \sin(\varphi) \sin(\omega t) \cos(\omega t)]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

След интегриране на уравнение (5.70) може да се докаже, че средната консумирана мощност в рамките на един период на синусоидата е:

$$P_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi). \quad (5.71)$$

Вижда се, че средната мощност е максимална когато $\varphi = 0^\circ$ ($X = 0$) и минимална когато $\varphi = \pm 90^\circ$ ($R = 0$).

На фиг. 5.42 е представено изменението на моментната мощност в RLC верига, в която ъгълът на фазовата разлика е $\varphi = 45^\circ$. Вижда се, че $p(t)$ приема както положителни, така и отрицателни моментни стойности. Все пак положителните стойности са по-продължителни във времето, поради което и средната консумирана мощност е положителна.



Фиг. 5.42. Моментна стойност на напрежение, ток и мощност в последователна RLC верига

5.5.5. Ефективна стойност

Често е удобно да се използват така наречените ефективни стойности на напрежението и тока, наричани още *средно-квадратични*. В общият случай ефективната стойност се определя съгласно:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt}, \quad (5.72)$$

но при синусоидални напрежения и токове, уравнение (5.72) се свежда до:

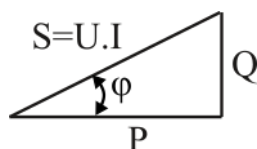
$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.73)$$

Понятието ефективната стойност дава възможност да се прави сравнение между постоянен и променлив ток по отношение на разсейваната мощност. Казано с други думи, независимо дали през един резистор тече постоянен ток I или променлив ток с ефективна стойност I , мощността на резистора би била една и съща. Ако в уравнение (5.71) се положат уравнения (5.73), за средната мощност, разсейвана в синусоидални вериги, се получава:

$$P_{CP} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi) = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\varphi) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi). \quad (5.74)$$

5.5.6. Обобщение за мощностите в синусоидални вериги

От казаното до тук е известно, че резисторите действително консумират енергия (активна енергия), докато реактивните елементи (бобини и кондензатори) зареждат енергията временно, след което я връщат обратно във веригата (реактивна енергия). Подобно на съпротивленията, мощностите в една синусоидална верига също са свързани със страните на правоъгълен триъгълник (триъгълник на мощностите), където:



Фиг. 5.43. Триъгълник на мощностите

- **Активната мощност P** се измерва във Ватове [W] и е единият катет на триъгълника:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = I^2 \cdot R. \quad (5.75)$$

- **Реактивната мощност Q** се измерва във Волт-Ампер реактивен [Var] и е вторият катет на триъгълника:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = I^2 \cdot X. \quad (5.76)$$

- Хипотенузата на правоъгълния триъгълник се нарича **пълна мощност** и се измерва във Волт-Ампери [$V \cdot A$]:

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (5.77)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

- Величината $\cos(\varphi)$ се нарича **фактор на мощността**, като това е една изключително важна характеристика на променливотоковите вериги. Тя показва каква част от пълната мощност се оползотворява като активна (полезна) мощност.
- Ъгълът между активната и пълната мощност е **ъгълът на фазовата разлика**:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}. \quad (5.78)$$

Ъгълът на фазовата разлика φ и реактивната мощност Q могат да бъдат положителни или отрицателни, в зависимост от това дали веригата има индуктивен или капацитивен характер (дали надделява индуктивното или капацитивното). За сметка на това активната (реалната) мощност е винаги положително число.

Правоъгълният триъгълник може да се опише и с комплексно число, наречено **комплексна мощност**, която се измерва във Волт-Амperi [$V \cdot A$]:

$$\dot{S} = P + jQ = S \cdot e^{j\varphi}. \quad (5.79)$$

5.5.7. Баланс на мощностите при синусоидални вериги

Балансът на мощностите при синусоидални вериги е следствие от Закона за запазване на енергията и гласи:

$$\sum \dot{S}_{\text{ИЗТ}} = \sum \dot{S}_{\text{КОНС}}, \quad (5.80)$$

където $\dot{S}_{\text{ИЗТ}}$ и $\dot{S}_{\text{КОНС}}$ са комплексните мощности във веригата, съответно отделяни от източниците и консумирани от консуматорите. Като се има предвид, че $\dot{S} = P + jQ$, уравнение (5.80) може да се раздели на две части (активна и реактивна):

$$\sum P_{\text{ИЗТ}} = \sum P_{\text{КОНС}} \quad (5.81)$$

и

$$\sum Q_{\text{ИЗТ}} = \sum Q_{\text{КОНС}}. \quad (5.82)$$

Активната и реактивната мощност на консуматорите се определят съответно с:

$$P = I^2 \cdot R \quad \text{и} \quad Q = I^2 \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = I^2 \cdot X. \quad (5.83)$$

Мощността на източник на напрежение се определя с:

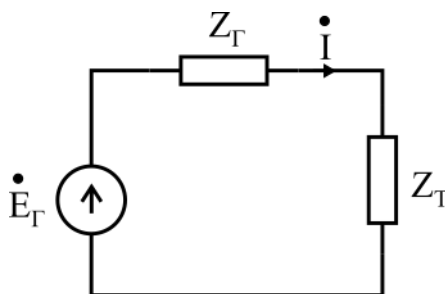
$$\dot{S}_E = \dot{E} \cdot I_E^* \quad (5.84)$$

където \dot{E} и \dot{I}_E^* са съответно комплексното напрежение и комплексно-спрегнатият ток на източника. Аналогично комплексната мощност на източник на ток с големина \dot{I} и пад на напрежението \dot{U}_I , се определя с:

$$\dot{S}_I = \dot{U}_I \cdot \dot{I}^* \quad (5.85)$$

5.5.8. Теорема за предаване на максимална активна мощност

Нека е даден еквивалентен генератор на напрежение с големина \dot{E}_Γ и комплексно съпротивление $Z_\Gamma = R_\Gamma + jX_\Gamma$, който захранва комплексен товар със съпротивление $Z_T = R_T + jX_T$.



Фиг. 5.44. Товар Z_T захранван от реален източник на напрежение

Целта на теоремата е, ако съпротивлението на източника Z_Γ е известно (и не може да бъде променяно), да се определи какво трябва да бъде съпротивлението на товара Z_T , така че до него да достига максимална активна мощност.

Еквивалентното съпротивление на цялата верига Z_E може да се представи в експоненциална форма:

$$Z_E = (R_T + R_\Gamma) + j(X_T + X_\Gamma) = z \cdot e^{j\varphi}, \quad (5.86)$$

където еквивалентният импеданс на веригата е $z = \sqrt{(R_T + R_\Gamma)^2 + (X_T + X_\Gamma)^2}$. Следователно комплексният ток във веригата е:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_\Gamma}{Z_E} = \frac{\dot{E}_\Gamma}{z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{\dot{E}_\Gamma}{\sqrt{(R_T + R_\Gamma)^2 + (X_T + X_\Gamma)^2} \cdot e^{j\varphi}}, \quad (5.87)$$

а разсейваната в товара активната мощност се определя с:

$$P = I^2 \cdot R_T = \left| \frac{\dot{E}_\Gamma}{Z_E} \right|^2 \cdot R_T = \frac{E_\Gamma^2}{z^2} \cdot R_T = \frac{E_\Gamma^2}{(R_T + R_\Gamma)^2 + (X_T + X_\Gamma)^2} \cdot R_T \quad (5.88)$$

където E_Γ и I са ефективните стойности, съответно на източника на напрежение и на тока във веригата. Вижда се, че за да бъде активната мощност максимална, знаменателят в уравнение (5.88) следва да бъде минимален:

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

$$\frac{(R_T + R_\Gamma)^2 + (X_T + X_\Gamma)^2}{R_T} = \text{MIN}. \quad (5.89)$$

Очевидно е, че едно от условията за минималност на знаменателя, е да няма реактивна мощност, което е изпълнено при:

$$X_T = -X_\Gamma. \quad (5.90)$$

Следователно условието (5.89) добива следния вид:

$$\frac{(R_T + R_\Gamma)^2 + (X_T + X_\Gamma)^2}{R_T} = \frac{(R_T + R_\Gamma)^2}{R_T} = R_T + 2R_\Gamma + \frac{R_\Gamma^2}{R_T} = \text{MIN}. \quad (5.91)$$

Търсенето на минимум става чрез диференциране на уравнение (5.91) спрямо неизвестната стойност на товара R_T :

$$\frac{d\left(R_T + 2R_\Gamma + \frac{R_\Gamma^2}{R_T}\right)}{dR_T} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{R_\Gamma^2}{R_T^2} = 0 \quad \rightarrow \quad R_T = R_\Gamma. \quad (5.92)$$

Следователно условието до товара да достига максимална активна мощност е $R_T = R_\Gamma$ и $X_T = -X_\Gamma$ или:

$$R_T + jX_T = R_\Gamma - jX_\Gamma, \quad (5.93)$$

т.е. съпротивлението на товара трябва да е равно на комплексно-спрегнатата стойност на съпротивлението на генератора:

$$\dot{Z}_T = Z_\Gamma^* \quad (5.94)$$

5.6. Анализ на електрически вериги при установен синусоиден режим

Анализът на вериги при установен синусоиден режим включва следните основни стъпки:

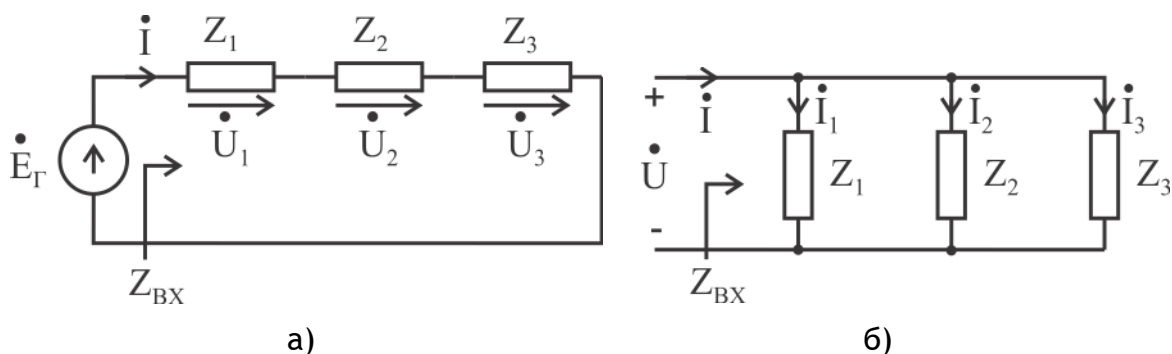
- Преобразуване на синусоиди и съпротивления в комплексна форма;
- Анализ на еквивалентната верига с комплексни числа;
- Преобразуване на получените комплексни токове и напрежения в синусоидална форма.

5.6.1. Анализ чрез еквивалентно комплексно съпротивление

Всички правила за анализ на вериги при установен постоянен ток режим важат и при установен синусоиден режим. Разглежда се последователно съединение на три комплексни съпротивления, захранвани от синусоиден източник (фиг. 5.45а). Уравнението по ВЗК е:

$$\dot{E}_\Gamma = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = Z_1 \cdot \dot{I} + Z_2 \cdot \dot{I} + Z_3 \cdot \dot{I} = (Z_1 + Z_2 + Z_3) \cdot \dot{I} = Z_{\text{ВХ}} \cdot \dot{I}. \quad (5.95)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги



Фиг. 5.45. Последователно (а) и паралелно (б) свързани комплексни съпротивления, захранвани със синусоидално напрежение

Следователно еквивалентното комплексно съпротивление на последователно съединени комплексни товари се определя съгласно:

$$Z_{BX} = \sum Z_k. \quad (5.96)$$

Аналогично при паралелно свързани комплексни съпротивления (фиг. 5.45б) може да се запише уравнение по ПЗК, в което \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 са токовете през тях:

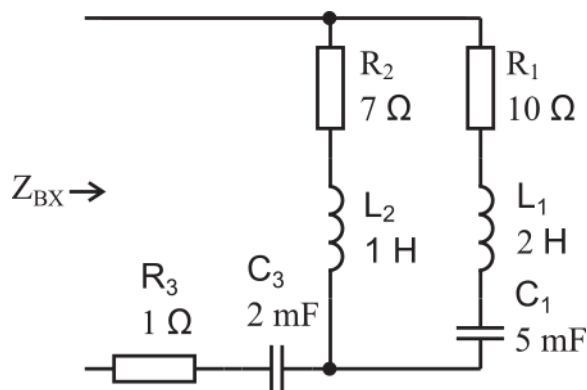
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} + \frac{\dot{U}}{Z_3} = \dot{U} \cdot \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \dot{U} \cdot \frac{1}{Z_{BX}}, \quad (5.97)$$

т.е. за еквивалентното комплексно съпротивление се получава:

$$Z_{BX} = \frac{1}{\sum \frac{1}{Z_k}} = \frac{1}{\sum Y_k}, \quad (5.98)$$

където $Y_k = \frac{1}{Z_k}$ е комплексната проводимост в [S] на съответното комплексно съпротивление.

Пример 6.3. За схемата от фиг. 5.46 да се определи входното съпротивление на веригата, ако се захранва от синусоидално напрежение с честота $\omega = 100 \text{ rad/s}$.



Фиг. 5.46. Схема към пример 6.3

Решение: Реактивните съпротивления във веригата са:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 100 \Omega;$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 200 \Omega;$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = 2 \Omega;$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = 5 \Omega.$$

Следователно комплексните съпротивления на трите клона са:

$$Z_1 = R_1 + jX_{L1} - jX_{C1} = 10 + j100 - j2 = 10 + j98 \Omega;$$

$$Z_2 = R_2 + jX_{L2} = 7 + j200 \Omega;$$

$$Z_3 = R_3 - jX_{C3} = 1 - j5 \Omega.$$

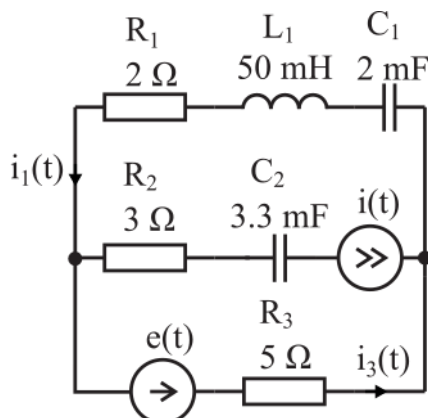
Като се има предвид, че Z_1 е паралелно на Z_2 , а заедно са последователни на Z_3 , входното съпротивление на веригата е:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3 = \frac{(10 + j98)(7 + j200)}{10 + j98 + 7 + j200} + 1 - j5 = 6,26 + j60,8 \Omega.$$

5.6.2. Анализ по метода със законите на Кирхоф

Приложението на метода е аналогично на това при постояннотоковите вериги, но се работи с комплексни числа. Целта е да се запише и реши система от уравнения, в която неизвестните величини са неизвестните комплексни клонови токове във веригата.

Пример 6.4. За схемата от фиг. 5.47 са дадени големините на източниците: $e(t) = 3,54 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ) V$ и $i(t) = \sin(\omega t) A$. Ако честотата на синусоидалния сигнал е $\omega = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, да се определят токовете във веригата и комплексната мощност на консуматорите.



Фиг. 5.47. Схема към пример 6.4

Решение: Първо следва да се определят реактивните съпротивления на бобините и кондензаторите:

$$X_{L1} = \omega \cdot L_1 = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 5 \Omega;$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{100 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 5 \Omega;$$

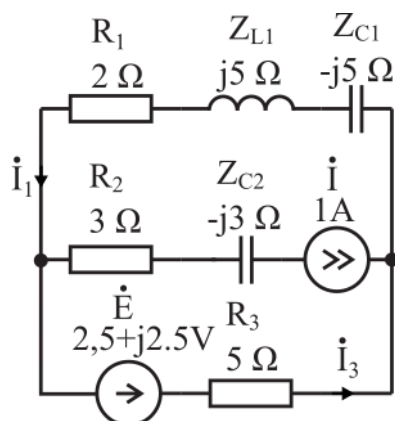
$$X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{100 \cdot 3,3 \cdot 10^{-3}} = 3 \Omega.$$

Също така синусоидалните източници следва да се представят в комплексна форма:

$$\dot{E} = 3,54e^{j45^\circ} = 2,5 + j2,5 V;$$

$$\dot{I} = 1e^{j0} = 1 A.$$

Това позволява да се създаде еквивалентна заместваща схема с комплексни числа (фиг. 5.48).



Фиг. 5.48. Еквивалентна схема с комплексни числа към пример 6.4

Във веригата има два неизвестни тока, така че системата уравнения ще съдържа едно уравнение по ПЗК и едно по ВЗК:

$$\begin{cases} I + I_3 = I_1 \\ \dot{E} = I_3 Z_3 + I_1 Z_1 \end{cases}$$

където $Z_1 = R_1 + Z_{L1} + Z_{C1} = 2 + j5 - j5 = 2 \Omega$ и $Z_3 = R_3 = 5 \Omega$.

Записана в матрична форма, системата добива следния вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,5 + j2,5 \end{bmatrix}.$$

Нейните детерминанти са:

$$\Delta = 1,5 + 1,2 = 7;$$

$$\Delta_1 = 5 + 2,5 + j2,5 = 7,5 + j2,5;$$

$$\Delta_3 = 2,5 + j2,5 - 2 = 0,5 + j2,5.$$

Следователно решенията за токовете са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7,5 + j2,5}{7} = 1,07 + j0,36 = 1,13e^{j18,6^\circ} A;$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

$$\dot{I}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0,5 + j2,5}{7} = 0,07 + j0,36 = 0,37e^{j79^\circ} \text{ A.}$$

Получените комплексни токове се преобразуват до синусоиди:

$$i_1(t) = 1,13 \cdot \sin(\omega t + 18,6^\circ) \text{ A;}$$

$$i_3(t) = 0,37 \cdot \sin(\omega t + 79^\circ) \text{ A.}$$

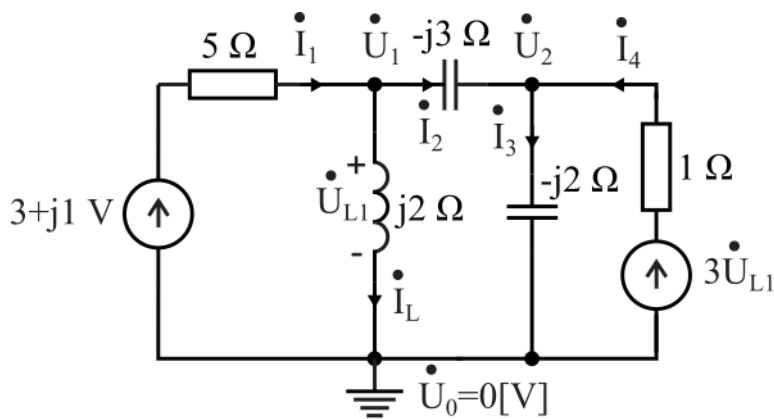
Мощността на консуматорите може да се определи използвайки ефективните стойности на токовете и комплексните съпротивления на клоновете:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{конс}} &= I_1^2 \cdot Z_1 + I_2^2 \cdot Z_2 + I_3^2 \cdot Z_3 = \left(\frac{1,13}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (3 - j3) + \left(\frac{0,37}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 5 = \\ &= 1,28 + 1,5 - j1,5 + 0,34 = 3,12 - j1,5 \text{ VA.} \end{aligned}$$

5.6.3. Анализ по метода с възловите потенциали

Методът с възловите потенциали също е приложим при синусоидалните вериги. Отново единият възел на веригата се заземява, а неизвестните са потенциалите на другите възли. Броят на уравненията във системата е равен на броя на възлите минус едно.

Пример 6.5. За схемата от фиг. 5.49 да се определи комплексният ток \dot{I}_L през бобината.



Фиг. 5.49. Схемa към пример 6.5

Решение: Във веригата има три възела, като единият се заземява ($\dot{U}_0 = 0 \text{ V}$). Възловите потенциали на другите два са \dot{U}_1 и \dot{U}_2 . Големината на зависимия източник на напрежение е три пъти по-голяма от напрежението на бобината \dot{U}_{L1} , т.е.:

$$3 \cdot \dot{U}_{L1} = 3 \cdot (\dot{U}_1 - \dot{U}_0) = 3 \cdot \dot{U}_1.$$

Записват се две уравнения по ПЗК, съответно за възли 1 и 2:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_L + \dot{I}_2 \\ \dot{I}_2 + \dot{I}_4 = \dot{I}_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3 + j1 - \dot{U}_1}{5} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{-j3} + \frac{\dot{U}_1}{j2} \\ \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{-j3} + \frac{3\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{1} = \frac{\dot{U}_2}{-j2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{3 + j1}{5} = \dot{U}_1 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{-j3} \right) + \dot{U}_2 \frac{1}{j3} \\ 0 = \dot{U}_1 \left(\frac{1}{-j3} + 3 \right) + \dot{U}_2 \left(\frac{1}{j3} - 1 + \frac{1}{j2} \right) \end{cases}$$

Получената система се записва в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 - j0,167 & j0,33 \\ 3 + j0,33 & -1 - j0,83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 + j0,2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тъй като се търси единствено токът \dot{I}_{L1} през бобината, е достатъчно да се определят само две от детерминантите:

$$\Delta = (0,2 - j0,167)(-1 - j0,83) - (j0,33)(3 + j0,33) = -0,229 - j0,99;$$

$$\Delta_1 = (0,6 + j0,2)(-1 - j0,83) = -0,434 - j0,698.$$

Следователно за потенциалът на възел 1 се получава:

$$\dot{U}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-0,434 - j0,698}{-0,229 - j0,99} = 0,766 - j0,261 \text{ V,}$$

а за комплексният ток през бобината:

$$\dot{I}_{L1} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_0}{j2} = \frac{\dot{U}_1}{j2} = \frac{0,766 - j0,261}{j2} = -0,131 - j0,383 \text{ A.}$$

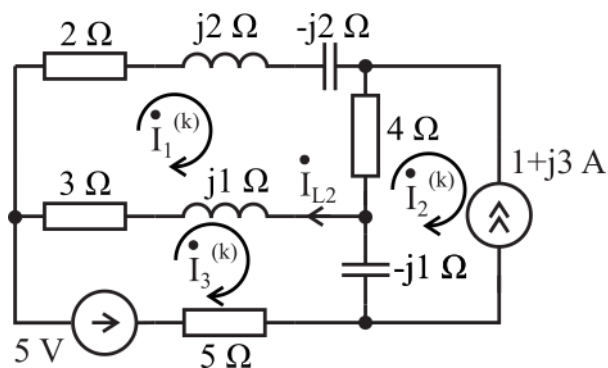
5.6.4. Анализ по метода с контурните токове

За синусоидални вериги, методът е аналогичен на използваният при постояннотокови вериги. Схемата се обхожда с достатъчен брой контури, така че да се включат всички елементи. Всички контури се избират, така че да се въртят в една и съща посока. Приема се, че по всеки контур тече контурен ток, като всеки клонов ток е алгебрична сума от контурните токове през него. В случай че контура минава през източник на ток, големината на контура е известна и равна на големината на източника на ток.

Пример 6.6. За схемата от фиг. 5.50 да се определи токът през бобината \dot{I}_{L2} .
Решение: Елементите на веригата могат да се обходят с три контурни тока. Тъй като $\dot{I}_2^{(k)}$ минава през източник на ток с противоположна посока, неговата големина е известна:

$$\dot{I}_2^{(k)} = -(1 + j3) \text{ A.}$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги



Фиг. 5.50. Схема към пример 6.6

Записва се система от уравнения по ВЗК за другите два контура, като се отчита влиянието на другите контурни токове:

$$\begin{cases} 0 = \dot{I}_1^{(k)}(2 + j2 - j2 + 4 + 3 + j1) - 4\dot{I}_2^{(k)} - \dot{I}_3^{(k)}(3 + j1) \\ -5 = \dot{I}_3^{(k)}(3 + j1 - j1 + 5) - \dot{I}_1^{(k)}(3 + j1) - \dot{I}_2^{(k)}(-j1) \end{cases}$$

В получената система се заменя $\dot{I}_2^{(k)} = -(1 + j3)$ и се преобразува до:

$$\begin{cases} -4 - j12 = \dot{I}_1^{(k)}(9 + j1) - \dot{I}_3^{(k)}(3 + j1) \\ -8 + j1 = -\dot{I}_1^{(k)}(3 + j1) + \dot{I}_3^{(k)}.8 \end{cases}$$

Системата се записва в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1^{(k)} \\ \dot{I}_3^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 + j1 & -(3 + j1) \\ -(3 + j1) & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - j12 \\ -8 + j1 \end{bmatrix}$$

Трите детерминанти са:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 + j1 & -(3 + j1) \\ -(3 + j1) & 8 \end{vmatrix} = 72 + j8 - 8 - j6 = 64 + j2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 - j12 & -(3 + j1) \\ -8 + j1 & 8 \end{vmatrix} = (-4 - j12)(8) + (3 + j1)(-8 + j1) = -57 - j101;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 + j1 & -4 - j12 \\ -(3 + j1) & -8 + j1 \end{vmatrix} = (9 + j1)(-8 + j1) - (4 + j12)(3 + j1) = -73 - j39.$$

Следователно за контурните токове се получава:

$$\dot{I}_1^{(k)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{57 + j101}{64 + j2} = -0,94 - j1,55 \text{ A};$$

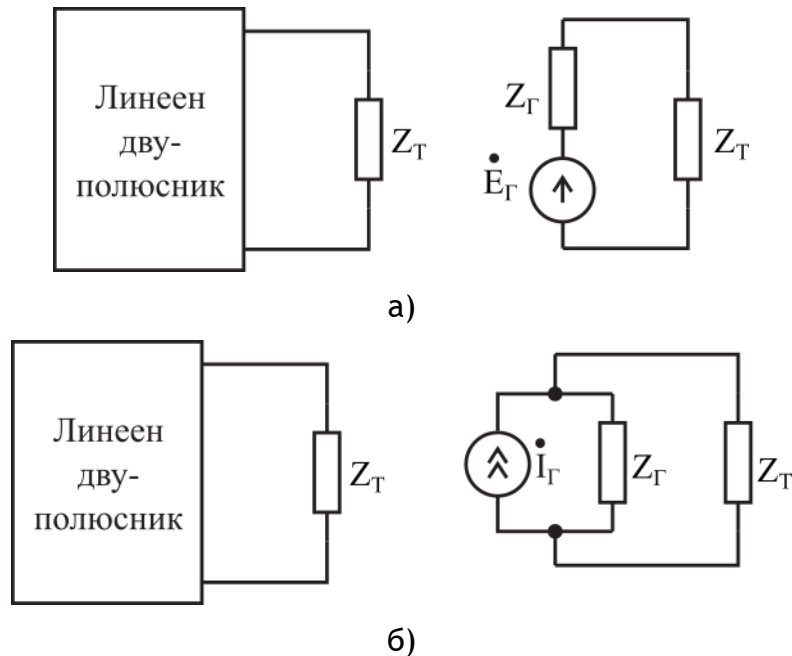
$$\dot{I}_3^{(k)} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{73 + j39}{64 + j2} = -1,16 - j0,57 \text{ A}.$$

Токът на бобината \dot{I}_{L2} се изразява като алгебрична сума от контурните токове, минаващи през него:

$$\dot{I}_{L2} = \dot{I}_1^{(k)} - \dot{I}_3^{(k)} = -0,94 - j1,55 + 1,16 + j0,57 = 0,22 - j0,98 \text{ A}.$$

5.6.5. Анализ чрез теоремите на Тевенен и Нортън

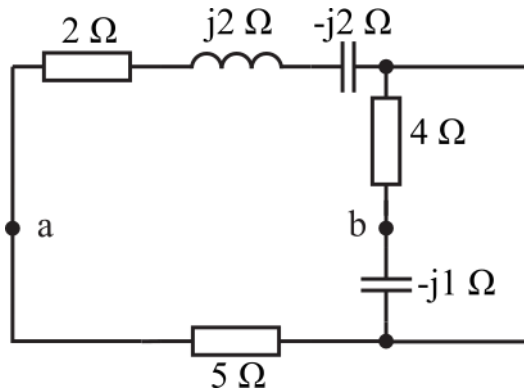
Теоремата за еквивалентния генератор (теорема на Тевенен и Нортън) могат да бъдат приложени и за синусоидални вериги. Еквивалентните източници на ток и напрежение са представени на фиг. 5.51, като Z_{Γ} е еквивалентното комплексно съпротивление на двуполусника, а \dot{E}_{Γ} и \dot{I}_{Γ} - съответно напрежението на празен ход и токът на късо съединение на двуполусника.



Фиг. 5.51. Приложение на Теоремите на Тевенен и Нортън при вериги при установен синусоидален режим

Пример 6.7. За задачата от пример 6.6 (фиг. 5.50) да се определи токът \dot{I}_{L2} , използвайки теоремата на Тевенен.

Решение: Първо може да се определи входното комплексно съпротивление на мястото на товара, като за целта неговият клон се изключва, а веригата става пасивна (източниците на напрежение се заменят с късо съединение, а източниците на ток - с прекъсната верига). Получава се схемата от фиг. 5.52.



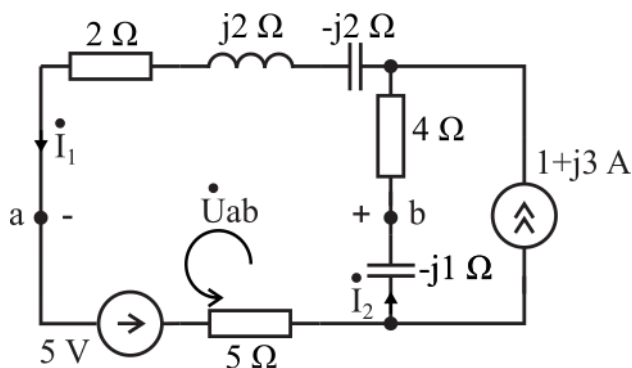
Фиг. 5.52. Еквивалентна схема към пример 6.7

За нея може да се определи входното съпротивление между точките a и b :

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги

$$Z_{\Gamma} = Z_{ab} = \frac{(2 + j2 - j2 + 4)(5 - j1)}{2 + j2 - j2 + 4 + 5 - j1} = \frac{30 - j6}{11 - j1} = 2,75 - j0,3 \Omega.$$

След това може да се определи напрежението на празен ход на двуполусника, като за целта клонът с бобината се изключва (фиг. 5.53).



Фиг. 5.53. Втора еквивалентна схема към пример 6.7

За нея може да се запише едно уравнение по ПЗК и едно по ВЗК:

$$\begin{cases} \dot{I}_2 + (1 + j3) = \dot{I}_1 \\ 5 = \dot{I}_1(5 + 2 + j2 - j2) + \dot{I}_2(4 - j1) \end{cases}$$

Получената система се представя в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 4 - j1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Определят се детерминантите:

$$\Delta = 4 - j1 + 7 = 11 - j1;$$

$$\Delta_1 = 4 - j1 + j12 + 3 + 5 = 12 + j11;$$

$$\Delta_2 = 5 - 7 - j21 = -2 - j21.$$

Следователно токовете във веригата са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12 + j11}{11 - j1} = 0,99 + j1,09 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2 - j21}{11 - j1} = -0,01 - j1,91 \text{ A}.$$

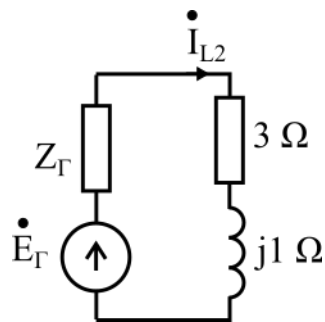
За да се определи напрежението на празен ход \dot{U}_{ab} може да се запише едно уравнение по ВЗК за отбелязания на фиг. 5.54 затворен контур:

$$5 = 5 \cdot \dot{I}_1 + (-j1) \cdot \dot{I}_2 + \dot{U}_{ab} \quad \rightarrow \quad 5 = 5(0,99 + j1,09) - j(-0,01 - j1,91) + \dot{U}_{ab}$$

$$\rightarrow \quad \dot{E}_{\Gamma} = \dot{U}_{ab} = 5 - 4,95 - j5,45 - 0,01j + 1,91 = 1,96 - j5,46 \text{ V}.$$

Използвайки Z_{Γ} и \dot{E}_{Γ} може да се създаде схема с еквивалентен източник на напрежение (фиг. 5.54).

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 5. Синусоидални електрически вериги



Фиг. 5.54. Трета еквивалентна схема към пример 6.7

От нея лесно може да се определи токът през бобината \dot{I}_{L2} , използвайки ВЗК:

$$\dot{I}_{L2} = \frac{\dot{E}_G}{Z_G + 3 + j1} = \frac{1,96 - j5,46}{2,73 - j0,3 + 3 + j1} = 0,22 - j0,98 \text{ A.}$$

Вижда се, че се получава същият отговор, както и по метода с контурните токове.

Тема 6. Бобини с индуктивна връзка

6.1. Коефициент на взаимна индукция

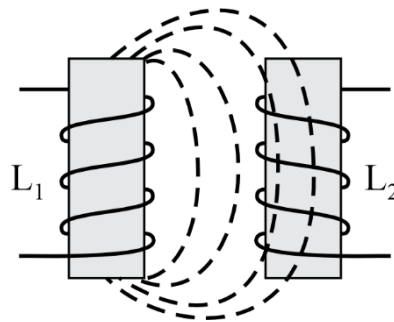
По рано в този курс беше дефинирано понятието *коефициент на самоиндукция*:

$$L = \frac{\Phi}{i}, H, \quad (6.1)$$

където Φ е магнитният поток във $[Wb]$, създаван от тока i в $[A]$, течащ по проводников контур. Също така беше разгледан Законът за електромагнитната индукция (още известен като Закон на Фарадей), съгласно който ако през един затворен проводников контур минава променлив магнитен поток Φ , в контура ще се индуцира е.д.н. с големина:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, V. \quad (6.2)$$

Нека две бобини се намират в близост една до друга, като през първата (L_1) тече ток i_1 , който създава магнитен поток Φ_1 . Част от този магнитен поток (Φ_{12}) достига до втората бобина (L_2), при което съгласно Законът за електромагнитната индукция в нея ще се индуцира е.д.н. (фиг. 6.1).



Фиг. 6.1. Индуктивно-свързани бобини

Отношението между магнитния поток Φ_{12} и тока i_1 се нарича *коефициент на взаимна индукция* (или просто *взаимна индукция*):

$$M = \frac{\Phi_{12}}{i_1}, H. \quad (6.3)$$

В сила е следната зависимост:

$$M = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\Phi_{21}}{i_2}, H, \quad (6.4)$$

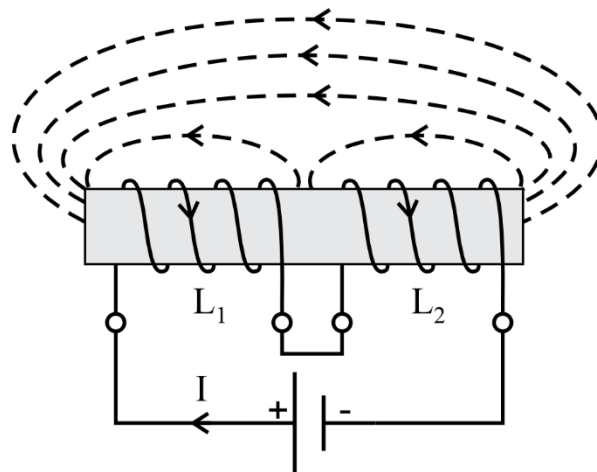
т.е. взаимната индукция е обща за двете бобини. Коефициентът M зависи от формата, размерите, взаимното положение, посоката на навиване на намотките и магнитната проницаемост μ на средата, между двете бобини. Подобно на индуктивността, мерната единица за взаимна индукция също е Хенри $[H]$.

6.2. Еквивалентни схеми на бобини с индуктивна връзка

6.2.1. Последователно съединение на индуктивно-свързани бобини

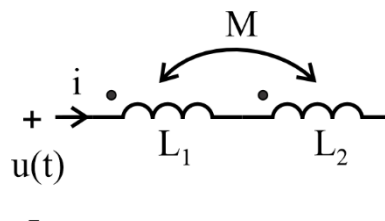
Нека са дадени две последователно свързани бобини L_1 и L_2 , чиято взаимна индуктивност е M . В зависимост от взаимното разположение на двете бобини, техните магнитни полета могат да се съпосочни (да се допълват) или разнопосочни (да се противопоставят).

Първата ситуация, при която магнитните полета се допълват, се нарича *съгласувано свързване* и има вида, показан на фиг. 6.2.



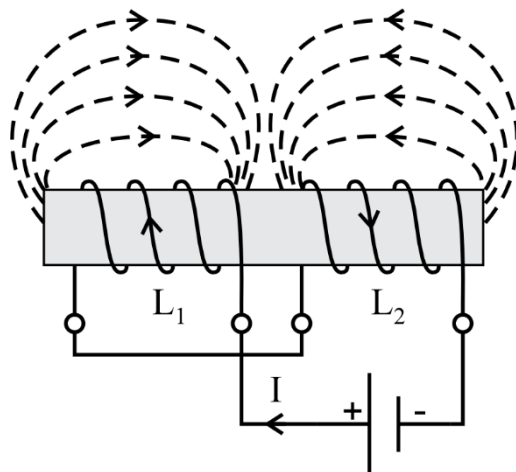
Фиг. 6.2. Съгласувано последователно съединение на бобини

Условното означение на съгласувано свързване на бобини е представено на фиг. 6.3. Един от изводите на индуктивно-свързаните бобини се отбелязва с точка (или звезда), като при съгласувано свързване токът i е еднакво ориентиран спрямо точките на двете бобини (влиза в точките или излиза от точките и на двете бобини).

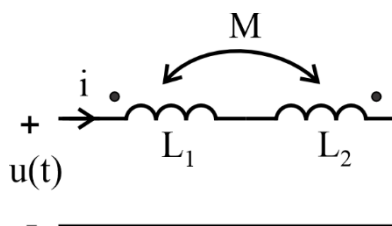


Фиг. 6.3. Условно означение на съгласувано последователно съединение на бобини

При несъгласувано свързване магнитните полета са с противоположна посока, а ориентацията на бобините е както е показано на фиг. 6.4. Условното означение на несъгласувано свързване е представено на фиг. 6.5. В случая в едната бобина токът влиза от страната отбелязана с точка, а в другата - от другата страна.



Фиг. 6.4. Несъгласувано последователно съединение на бобини



Фиг. 6.5. Условно означение на несъгласувано последователно съединение на бобини

Нека две съгласувано свързани бобини с индуктивна връзка се захранват от източник на напрежение $u(t)$. Тъй като при съгласувано свързване магнитните им полета се допълват, може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_M(t) + u_2(t) + u_M(t) = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = \\ &= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В последното уравнение $u_M(t)$ е падът на напрежение, дължащ се на взаимната индуктивност M . В уравнението има два пада $u_M(t)$:

- Единият се дължи на е.д.н., което L_1 индуцира в L_2 ;
- Вторият се дължи на е.д.н., което L_2 индуцира в L_1 ;

От последното уравнение се вижда, че еквивалентната индуктивност на две съгласувано-свързани бобини е:

$$L_E = L_1 + L_2 + 2M. \quad (6.6)$$

При несъгласувано свързване магнитните полета на двете бобини се противопоставят, така че уравнението по ВЗК е:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) - u_M(t) + u_2(t) - u_M(t) = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = \\ &= (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

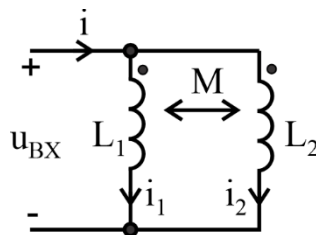
т.е. за еквивалентната индуктивност в случая се получава:

$$L_E = L_1 + L_2 - 2M. \quad (6.8)$$

6.2.2. Паралелно съединение на индуктивно-свързани бобини

Нека две бобини L_1 и L_2 са свързани паралелно, като тяхната взаимна индуктивност е M . Отново съществуват две възможности за тяхното свързване: съгласувано и несъгласувано.

При съгласувано свързване магнитните полета на двете бобини се допълват взаимно. Схематично това съединение се означава както е показано на фиг. 6.6, т.е. токовете i_1 и i_2 са еднакво ориентирани спрямо точките на бобините.



Фиг. 6.6. Условно означение на съгласувано паралелно съединение на бобини

Нека схемата се захранва с входно напрежение $u_{BX}(t)$. Тогава може да се запишат следните уравнения по ВЗК:

$$\begin{cases} u_{BX} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_{BX} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (6.9)$$

Системата се преобразува в матричен вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} u_{BX} \\ u_{BX} \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

като детерминантите са:

$$\begin{aligned} \Delta &= \det \begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix} = L_1 \cdot L_2 - M^2; \\ \Delta_1 &= \det \begin{vmatrix} u_{BX} & M \\ u_{BX} & L_2 \end{vmatrix} = u_{BX}(L_2 - M); \\ \Delta_2 &= \det \begin{vmatrix} L_1 & u_{BX} \\ M & u_{BX} \end{vmatrix} = u_{BX}(L_1 - M). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Следователно решенията на системата са:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (6.12)$$

За схемата можем да се запише следното уравнение по ПЗК:

$$i = i_1 + i_2. \quad (6.13)$$

Ако последното уравнение се диференцира, се получава:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta} = \frac{u_{\text{BX}}(L_2 - M) + u_{\text{BX}}(L_1 - M)}{L_1 \cdot L_2 - M^2} = u_{\text{BX}} \frac{L_1 + L_2 - 2 \cdot M}{L_1 \cdot L_2 - M^2}. \quad (6.14)$$

От зависимост (6.14) може да се изрази входното напрежение:

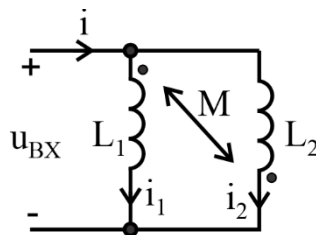
$$u_{\text{BX}}(t) = \left(\frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2 \cdot M} \right) \frac{di}{dt} = L_E \frac{di}{dt}, \quad (6.15)$$

т.е за еквивалентната индуктивност на съгласувано паралелно съединение на бобини се получава:

$$L_E = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2 \cdot M}. \quad (6.16)$$

Несъгласуваното свързване на паралелни бобини с индуктивна връзка е представено на фиг. 6.7. По аналогичен начин за него може да се докаже, че еквивалентната индуктивност е:

$$L_E = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2 \cdot M}. \quad (6.17)$$



Фиг. 6.7. Условно означение на несъгласувано паралелно съединение на бобини

Единствената разлика между двата изрази е $\pm 2 \cdot M$ в знаменателя, т.е. еквивалентна индуктивност е по-голяма при съгласувано свързване (по-малък знаменател), и по-малка - при несъгласувано.

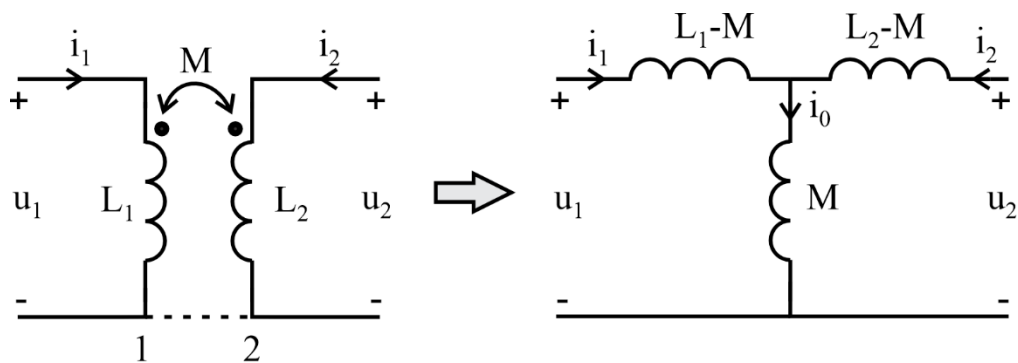
6.2.3. Елиминирание на индуктивна връзка

Ако между две бобини съществува индуктивна връзка, може да се създаде еквивалентна Т-образна заместваща схема по начина, показан на фиг. 6.8 и 6.9. В случая не е важно дали възлите 1 и 2 от оригиналните схеми са свързани или не.

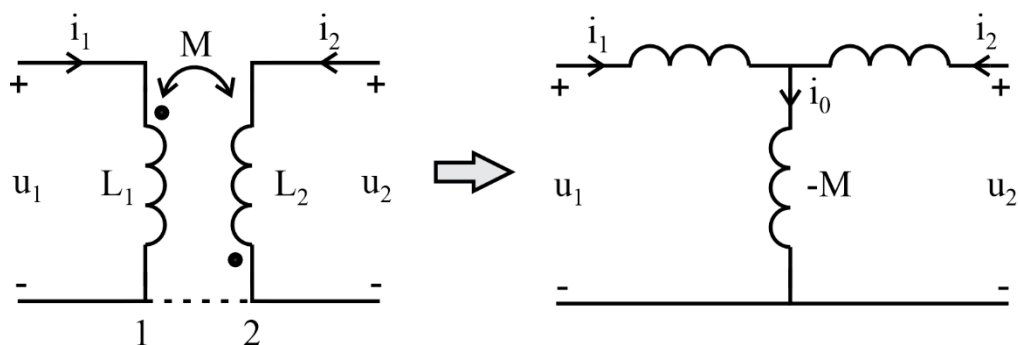
За да се докаже, че схемите са еквивалентни, може да се разгледа първата ситуация със съгласувано свързване. За нея може да се запише следната система от уравнения:

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (6.18)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 6. Бобини с индуктивна връзка



Фиг. 6.8. Еквивалентна T-образна електрическа схема при съгласувани индуктивно-свързани бобини



Фиг. 6.9. Еквивалентна T-образна електрическа схема при несъгласувани индуктивно-свързани бобини

От друга страна за еквивалентната схема може да се запише следната система от уравнение:

$$\begin{cases} u_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_0}{dt} \\ u_2 = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_0}{dt} \end{cases} \quad (6.19)$$

От ПЗК следва:

$$i_0 = i_1 + i_2 \quad \rightarrow \quad \frac{di_0}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}. \quad (6.20)$$

След заместване на $\frac{di_0}{dt}$ в уравнения (6.19) се получава същата система като (6.18), което доказва, че двете схеми са еквивалентни:

$$\begin{cases} u_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (6.21)$$

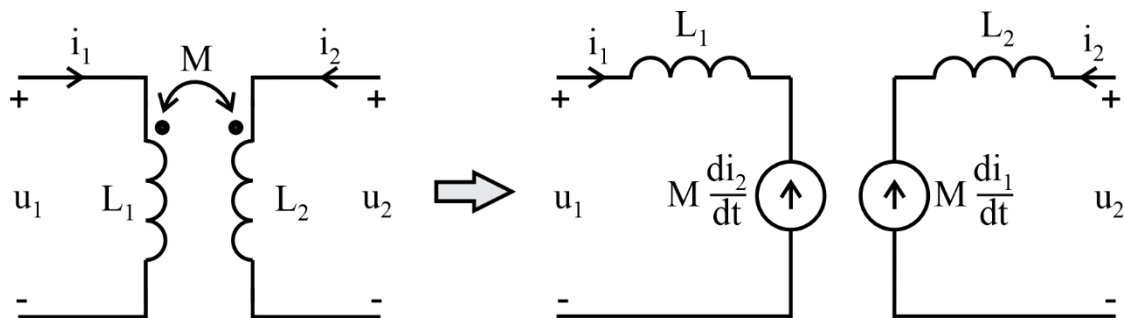
По аналогичен начин може да се докаже и еквивалентната схема при несъгласувано свързване.

6.2.4. Еквивалентна заместваща схема в най-общият случай

В общия случай индуктивно-свързаните бобини могат да са разположени на всевъзможни места във схемата, а също така може да имат индуктивна връзка с повече от една бобина.

Съгласувано-свързани бобини

В случай на две съгласувано свързани бобини може да се създаде еквивалентна заместваща схема, като индуктивната връзка се замени с два зависими източника, с големина съответно $M \frac{di_2}{dt}$ и $M \frac{di_1}{dt}$, чиито посоки са противоположни на тези на токовете (фиг. 6.10).



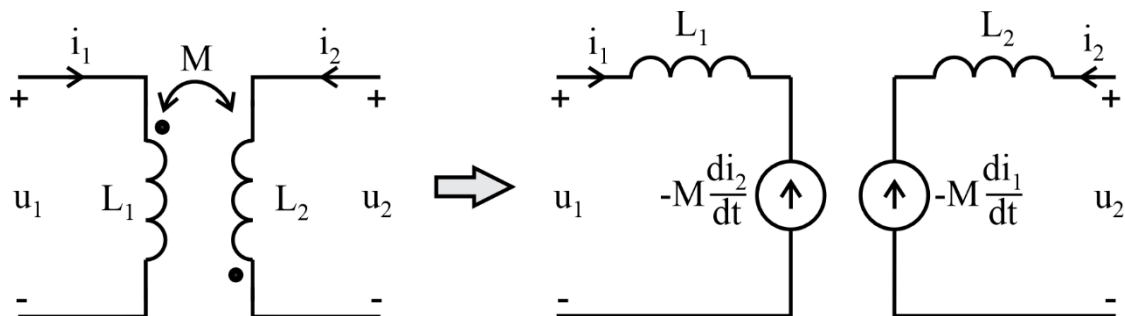
Фиг. 6.10. Еквивалентна заместваща схема при съгласувани индуктивно-свързани бобини

Това твърдение може да се докаже много лесно, тъй като системата от уравнения по ВЗК е еднаква и за двете схеми:

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (6.22)$$

Несъгласувано-свързани бобини

По аналогичен начин при несъгласувано свързване на две бобини, индуктивната връзка може да се замени с два зависими източника, чиито големина са съответно $-M \frac{di_2}{dt}$ и $-M \frac{di_1}{dt}$, а посоки им отново са противоположни на тези на токовете (фиг. 6.11).



Фиг. 6.11. Еквивалентна заместваща схема при несъгласувани индуктивно-свързани бобини

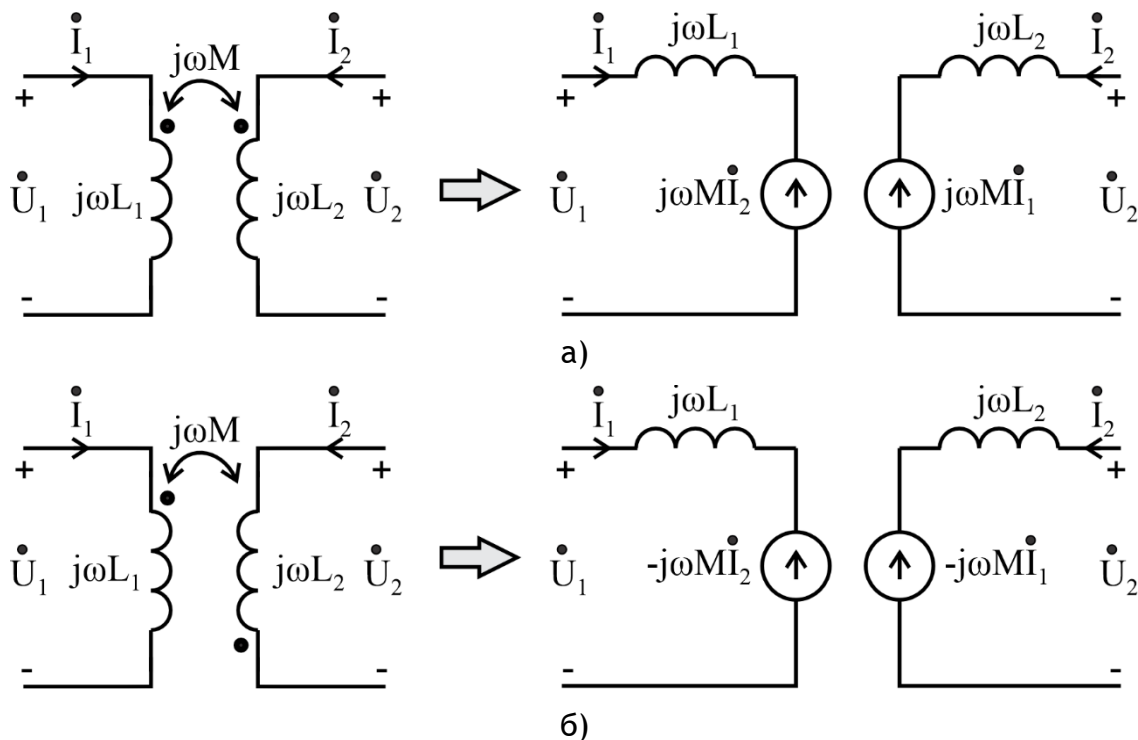
В случая системата уравнения по ВЗК и за двете схеми е:

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (6.23)$$

Заместваща схема с комплексни числа

В посочените по-горе заместващи схеми, величините са дадени като функция на времето. В случай че напреженията и токовете са синусоидални величини, може да се състави еквивалентна заместваща схема с комплексни числа (фиг. 6.12), в която:

- При съгласувано-свързани бобини индуктивната връзка се замества с два източника $j\omega MI_1$ и $j\omega MI_2$;
- При несъгласувано-свързани бобини, индуктивната връзка се замества с два източника $-j\omega MI_1$ и $-j\omega MI_2$.



Фиг. 6.12. Еквивалентни схеми с комплексни числа при съгласувано (а) и несъгласувано (б) съединение на бобини

За оригиналните и заместващите схеми от фиг. 6.12 могат да се запишат следните уравнения по ВЗК:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 \end{cases} \quad (6.24)$$

като знакът плюс (+) съответства на съгласувано свързване, а знакът минус (-) - на несъгласувано.

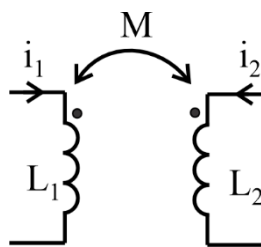
6.3. Енергия при индуктивно-свързани бобини

Вече беше установено, че съхраняваната енергия в бобина L , по която тече ток i , е:

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2. \quad (6.25)$$

Разглеждат се две индуктивно-свързани бобини, както е показано на фиг. 6.13. Моментната мощност, предаване от L_1 към L_2 , е:

$$p_{M12}(t) = i_2 \cdot u_M = i_2 \cdot M \frac{di_1}{dt}. \quad (6.26)$$



Фиг. 6.13. Две индуктивно-свързани бобини

Ако мощността се интегрира във времето, може да се определи общата предадена енергия:

$$W_{M12} = \int_{t_1}^{t_2} p_{M12}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} i_2 M \frac{di_1}{dt} dt = M \int_0^I i_2 di_1 = \frac{1}{2} M i_1 i_2. \quad (6.27)$$

По аналогичен начин предаваната от втората към първата бобина мощност е:

$$p_{M21}(t) = i_1 \cdot u_M = i_1 \cdot M \frac{di_2}{dt}, \quad (6.28)$$

а енергията, предадена във интервалът от t_1 до t_2 , е:

$$W_{M12} = \int_{t_1}^{t_2} p_{M21}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} i_1 M \frac{di_2}{dt} dt = M \int_0^I i_1 di_2 = \frac{1}{2} M i_1 i_2. \quad (6.29)$$

Тъй като заредената в бобините енергия, вследствие на собствената им индуктивност, е съответно:

$$W_{L1} = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot i_1^2 \quad \text{и} \quad W_{L2} = \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot i_2^2, \quad (6.30)$$

сумарната енергия, заредена в две бобини с индуктивна връзка, е:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot i_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot i_2^2 \pm M \cdot i_1 i_2. \quad (6.31)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 6. Бобини с индуктивна връзка

В случая отново знакът плюс (+) съответства на съгласувано свързване, а знакът минус (-) - на несъгласувано. Вижда се, че заредената енергия е винаги положително число:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot i_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot i_2^2 - M \cdot i_1 i_2 \geq 0. \quad (6.32)$$

Следователно, може да се запише следното уравнение:

$$\frac{1}{2} (\sqrt{L_1} \cdot i_1 - \sqrt{L_2} i_2)^2 + i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) \geq 0. \quad (6.33)$$

От него се виждат следните неща:

- Първата съставка е неотрицателна, защото е на втора степен:

$$(\sqrt{L_1} \cdot i_1 - \sqrt{L_2} i_2)^2 \geq 0; \quad (6.34)$$

- При равни токове и индуктивности първата съставка е 0:

$$(\sqrt{L_1} \cdot i_1 - \sqrt{L_2} i_2)^2 = 0. \quad (6.35)$$

Следователно е очевидно, че втората съставка също трябва да е неотрицателна, за да бъде изпълнено уравнение (6.33):

$$i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{L_1 L_2} \geq M. \quad (6.36)$$

Това позволява да се дефинира т.нар. коефициент на взаимна връзка:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (6.37)$$

Той приема стойности в диапазона $0 \leq k \leq 1$ и показва колко силна е индуктивната връзка между двете бобини. За бобини, които не са индуктивно-свързани, $k = 0$, а при идеална индуктивна връзка на две бобини (възможна е само на теория), $k = 1$.

6.4. Анализ на вериги с индуктивна връзка

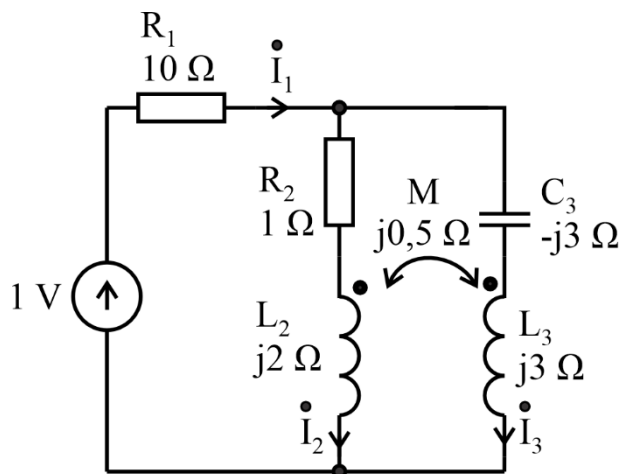
При анализ на синусоидални вериги с индуктивна връзка важат същите правила, като при обикновените синусоидални вериги, но първо е удобно да се състави еквивалентна заместваща схема без индуктивна връзка.

6.4.1. Анализ по метода със законите на Кирхоф

Методът със законите на Кирхоф може да се приложи за вериги, съдържащи индуктивно свързани бобини, по следния начин:

1. Създава се еквивалентна заместваща схема без индуктивна връзка;
2. Записва се система линейни уравнения, чиито неизвестни са неизвестните клонови токове.

Пример 6.1. За схемата от фиг. 6.14 да се определят токовете във веригата.

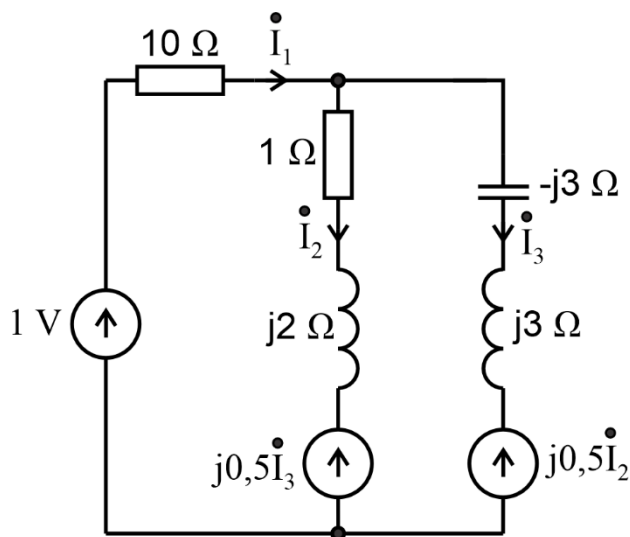


Фиг. 6.14. Схема към Пример 6.1

Взаимната индукция между бобините е дадена като комплексно взаимно съпротивление:

$$j\omega M = j0.5 \Omega.$$

И двата тока \dot{I}_1 и \dot{I}_2 влизат в бобините от към точките, т.е. двете бобини са свързани съгласувано. Следователно индуктивната връзка може да бъде заменена с два зависими източника, чиито посоки са противоположни на токовете, като техните големина са $j0.5\dot{I}_2$ и $j0.5\dot{I}_3$ (фиг. 6.15).



Фиг. 6.15. Еквивалентна схема към Пример 6.1

За получената схема може да се запише следната система уравнения:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ 1 - j0.5\dot{I}_3 = 10\dot{I}_1 + (1 + j2)\dot{I}_2 \\ j0.5\dot{I}_3 - j0.5\dot{I}_2 = -(1 + j2)\dot{I}_2 + (j3 - j3)\dot{I}_3 \end{cases}$$

Тя се преобразува в матричен вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 10 & 1+j2 & j0,5 \\ 0 & 1+j1,5 & j0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Детерминантите са:

$$\begin{aligned} \Delta &= \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 10 & 1+j2 & j0,5 \\ 0 & 1+j1,5 & j0,5 \end{bmatrix} = \\ &= -j0,5(1+j2) + 10(1+j1,5) + j0,5(1+j1,5) - j0,5 \cdot 10 = \\ &= -j0,5 + 1 + 10 + j15 + j0,5 - 0,75 - j5 = 10,25 + j10; \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+j2 & j0,5 \\ 0 & 1+j1,5 & j0,5 \end{bmatrix} = 1 + j1,5 - j0,5 = 1 + j;$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & j0,5 \\ 0 & 0 & j0,5 \end{bmatrix} = -j0,5;$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 10 & 1+j2 & 1 \\ 0 & 1+j1,5 & 0 \end{bmatrix} = 1 + j1,5.$$

Следователно комплексните токове във веригата са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1+j}{10,25+j10} = 0,099 + j0,001 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-j0,5}{10,25+j10} = -0,024 - j0,025 \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1+j1,5}{10,25+j10} = 0,123 + j0,026 \text{ A}.$$

6.4.2. Анализ по метода с възловите потенциали

Методът с възловите потенциали е приложим в схеми с индуктивни връзки, но единствено когато се използва еквивалентна Т-образна схема.

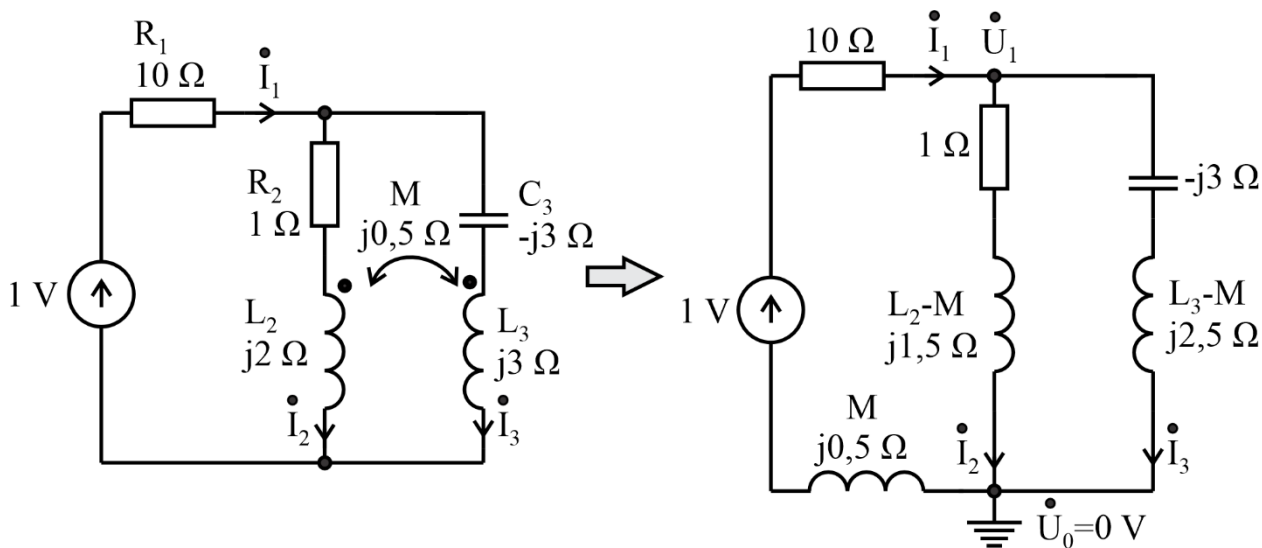
Пример 6.2. Да се анализира схемата от пример 1, използвайки метода с възловите потенциали.

В схемата от фиг. 6.14 двете бобини имат обща точка, което позволява индуктивната връзка да бъде елиминирана чрез добавяне на трета бобина, както е показано на фиг. 6.16. Съпротивленията на бобините в еквивалентната схема са:

$$j\omega(L_2 - M) = j2 - j0,5 = j1,5 \Omega;$$

$$j\omega(L_3 - M) = j3 - j0,5 = j2,5 \Omega;$$

$$j\omega M = j0,5 \Omega.$$



Фиг. 6.16. Еквивалентна схема към пример 6.2

Вече може да бъде приложен методът с възловите потенциали. Единият възел се заземява ($\dot{U}_0 = 0\text{ V}$), като неизвестен остава потенциалът на втория възел - \dot{U}_1 . Системата с уравнения по ПЗК е:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \Rightarrow \left| \frac{\dot{U}_0 - \dot{U}_1 + 1}{10 + j0,5} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_0}{1 + j1,5} + \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_0}{-j0,5} \right.$$

Замества се $\dot{U}_0 = 0$ и се изразява \dot{U}_1 :

$$\dot{U}_1 = \frac{\frac{1}{10 + j0,5}}{\frac{1}{1 + j1,5} - \frac{1}{j0,5} + \frac{1}{10 + j0,5}} = \frac{0,100 - j0,005}{0,407 + j1,533} = 0,013 - j0,062\text{ V.}$$

Получават се същите токове, както по метода със законите на Кирхоф:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_0 - \dot{U}_1 + 1}{10 + j0,5} = \frac{0,987 + j0,062}{10 + j0,5} = 0,099 + j0,001\text{ A;}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_0}{1 + j1,5} = \frac{0,013 - j0,062}{1 + j1,5} = -0,025 - j0,025\text{ A;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_0}{-j0,5} = \frac{0,013 - j0,062}{-j0,5} = 0,124 + j0,026\text{ A.}$$

6.4.3. Анализ по метода с контурните токове

Когато става дума за вериги, съдържащи индуктивни връзки, един от най-удобните методи е този с контурните токове. В случая след като предварително се създаде еквивалентна заместваща схема със зависими източници, тяхната големина се изразява чрез контурните токове. След това се записват уравнения по ВЗК за всеки неизвестен контурен ток.

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 6. Бобини с индуктивна връзка

Пример 6.3. Да се анализира схемата от пример 6.1, използвайки метода с контурните токове.

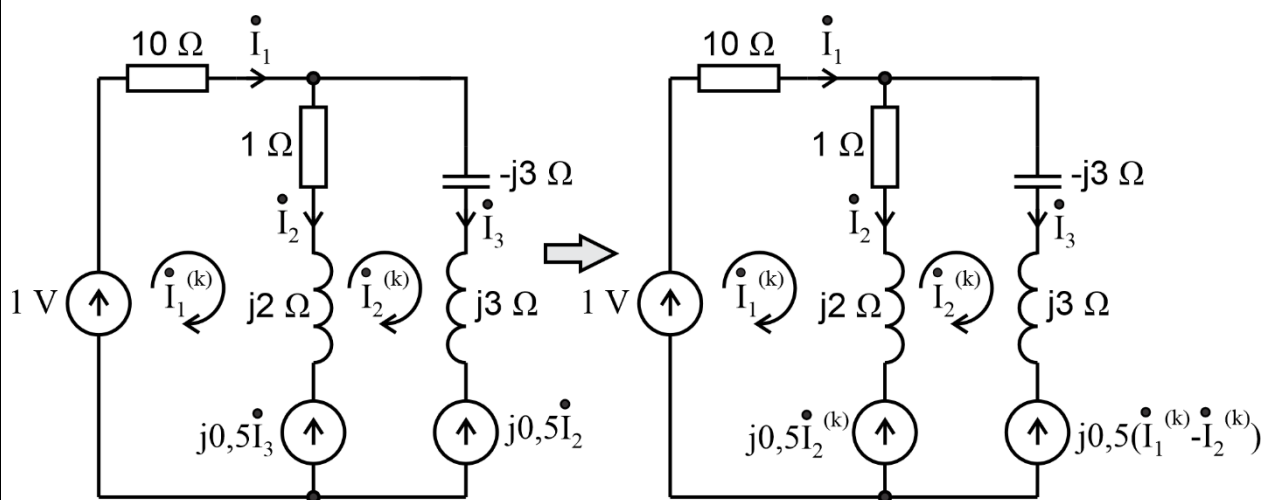
Създава се еквивалентна заместваща схема със зависими източници (фиг. 6.17 - ляво), а клоновите токове се изразяват като алгебрична сума от контурните токове, минаващи през тях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1^{(k)} \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1^{(k)} - \dot{I}_2^{(k)} \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_2^{(k)}.$$

След това се изразяват големините на зависимите източници чрез контурните токове (фиг. 6.17 - дясно):

$$j0,5\dot{I}_2 = j0,5(\dot{I}_1^{(k)} - \dot{I}_2^{(k)});$$

$$j0,5\dot{I}_3 = j0,5\dot{I}_2^{(k)}.$$



Фиг. 6.17. Еквивалентна схема към пример 6.3

Вече могат да бъдат записани уравнения по ВЗК за двата контура:

$$\begin{cases} 1 - j0,5\dot{I}_2^{(k)} = \dot{I}_1^{(k)}(10 + 1 + j2) - \dot{I}_2^{(k)}(1 + j2) \\ j0,5\dot{I}_2^{(k)} - j0,5(\dot{I}_1^{(k)} - \dot{I}_2^{(k)}) = \dot{I}_2^{(k)}(1 + j2 + j3 - j3) - \dot{I}_1^{(k)}(1 + j2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 = \dot{I}_1^{(k)}(11 + j2) - \dot{I}_2^{(k)}(1 + j1,5) \\ 0 = -\dot{I}_1^{(k)}(1 + j1,5) + \dot{I}_2^{(k)}(1 + j) \end{cases}$$

В матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1^{(k)} \\ \dot{I}_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 + j2 & -(1 + j1,5) \\ -(1 + j1,5) & 1 + j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 11 + j2 & -(1 + j1,5) \\ -(1 + j1,5) & 1 + j \end{bmatrix} = 11 + j11 + j2 - 2 - 1 - j1,5 - j1,5 + 2,25 = 10,25 + j10;$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 6. Бобини с индуктивна връзка

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & -(1 + j1,5) \\ 0 & 1 + j \end{bmatrix} = 1 + j;$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 11 + j2 & 1 \\ -(1 + j1,5) & 0 \end{bmatrix} = 1 + j1,5.$$

Следователно контурните токове са:

$$\dot{i}_1^{(k)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1 + j}{10,25 + j10} = 0,099 + j0,001 \text{ A};$$

$$\dot{i}_2^{(k)} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1 + j1,5}{10,25 + j10} = 0,123 + j0,026 \text{ A},$$

а за клоновите токове се получава:

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_1^{(k)} = 0,099 + j0,001 \text{ A};$$

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_1^{(k)} - \dot{i}_2^{(k)} = 0,099 + j0,001 - 0,123 - j0,026 = -0,024 - j0,025 \text{ A};$$

$$\dot{i}_3 = \dot{i}_2^{(k)} = 0,123 + j0,026 \text{ A}.$$

Тема 7. Честотни зависимости в електрическите вериги

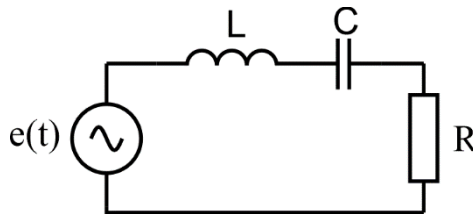
Вече беше указано, че съпротивленията на бобините и кондензаторите зависят от честотата на синусоидалния сигнал. Честотните зависимости на една електрическа верига показват възможните промени в нейното поведение, в зависимост от честотата на токовете и напреженията. Когато в една електрическа верига има едновременно бобини и кондензатори, в нея могат да възникват резонансни явления за една или повече честоти.

Тези свойства на реактивните елементи се използват за създаването на електрически филтри и намират широко приложение в компютърната и комуникационна техника.

7.1. Резонанс на напреженията

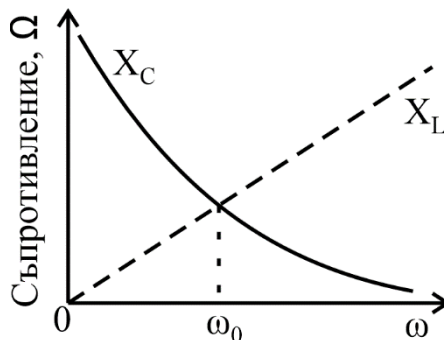
Разглежда се последователна RLC верига, захранвана от синусоидален източник на напрежение (фиг. 7.1). Еквивалентното комплексно съпротивление на веригата е:

$$Z = R + j(X_L - X_C). \quad (7.1)$$



Фиг. 7.1. Последователна RLC верига, захранвана от синусоидален източник

Тъй като $X_L = \omega L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C}$, с увеличаване на честотата ω , $X_L(\omega)$ се увеличава, а $X_C(\omega)$ - намалява. Честотните зависимости на двете реактивни съпротивления могат да се представят графично, както е показано на фиг. 7.2.



Фиг. 7.2. Честотни зависимости на $X_L(\omega)$ и $X_C(\omega)$

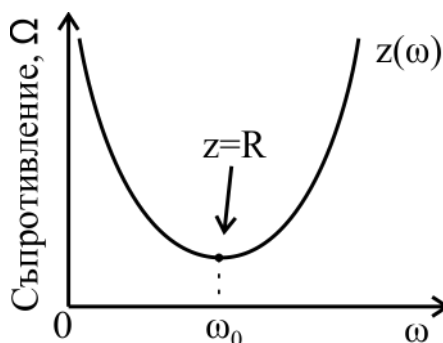
Вижда се, че двете криви, $X_L(\omega)$ и $X_C(\omega)$, се пресичат при определена честота ω_0 . Тази честота се нарича *резонансна*, а явлението при което $X_L = X_C$ се нарича *резонанс на напреженията*. При ъгловата честота $\omega = \omega_0$ е изпълнено:

$$Z(\omega_0) = R + j(X_L - X_C) = R + j \cdot 0 = R, \quad (7.2)$$

т.е. комплексното съпротивление на веригата става чисто активно. Пълното съпротивление на веригата е:

$$z(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (7.3)$$

Вижда се, че при резонанс на напреженията, $z(\omega_0) = R$, т.е. z е възможно най-малко. Следователно честотната зависимост $z(\omega)$ има вида, показан на фиг. 7.3.



Фиг. 7.3. Честотна зависимост на $z(\omega)$

Условието за резонанс на напреженията е:

$$X_L = X_C \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (7.4)$$

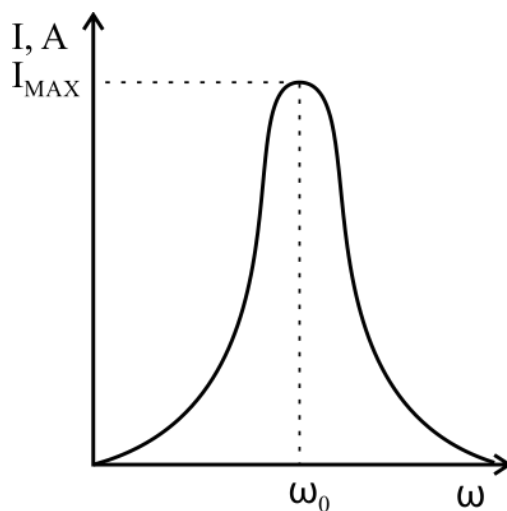
От уравнение (7.4) може да се изрази резонансната честота чрез индуктивността L и капацитета C :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (7.5)$$

Ако E е ефективната стойност на източника, за ефективната стойност на тока във веригата се получава:

$$I(\omega) = \frac{E}{z(\omega)} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (7.6)$$

От уравнение (7.6) може да се види, че токът има максимум, когато импедансът $z(\omega)$ има минимум, т.е. при резонанс (фиг. 7.4).



Фиг. 7.4. Честотна зависимост на тока във веригата $I(\omega)$

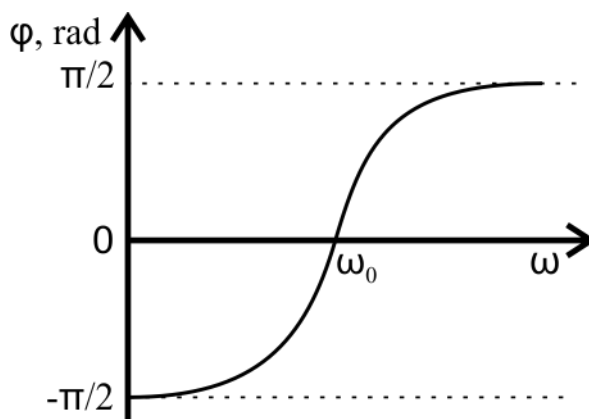
Ъгълът на фазовата разлика φ също зависи от честотата:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (7.7)$$

От уравнението (7.7) се вижда, че при честота $\omega = \omega_0$ ъгълът на фазовата разлика става:

$$\varphi(\omega_0) = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{0}{R} = 0^\circ, \quad (7.8)$$

т.е. φ може да приема стойности от -90° до $+90^\circ$, както е показано на фиг. 7.5.



Фиг. 7.5. Честотна зависимост на фазовата разлика $\varphi(\omega)$

Критични честоти при половин мощност

Мощността, която се консумира от резистора R , е:

$$P = I^2 \cdot R = \left(\frac{E}{Z}\right)^2 \cdot R. \quad (7.9)$$

Следователно, консумираната от резистора R мощност ще бъде максимална, когато токът е максимален, т.е. при резонанс:

$$P_{MAX} = I_{MAX}^2 \cdot R = \left(\frac{E}{R}\right)^2 \cdot R = \frac{E^2}{R}. \quad (7.10)$$

От уравнение (7.10) се вижда, че резисторът ще консумира половината от максималната мощност, когато токът е $\sqrt{2}$ пъти по-малък от максималния:

$$\frac{P_{MAX}}{2} = \frac{I_{MAX}^2 \cdot R}{2} = \left(\frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R = (0,707 \cdot I_{MAX})^2 \cdot R. \quad (7.11)$$

Комбинирайки уравнения (7.9), (7.10) и (7.11) може да се запише следното равенство при половин консумирана мощност:

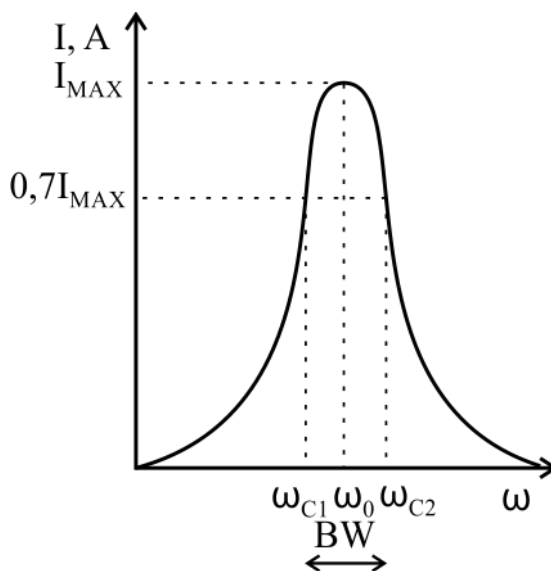
$$\frac{P_{MAX}}{2} = \frac{E^2}{2R} = \frac{E^2}{z^2} \cdot R \rightarrow \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}R. \quad (7.12)$$

Решението на уравнение (7.12) спрямо ω дава следните отговори:

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}};$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$
(7.13)

където ω_{c1} и ω_{c2} са критичните честоти, при които резисторът консумира половината от максималната мощност. Графичната интерпретация на получените зависимости е представена на фиг. 7.6. Тя реално показва, че представеният RLC контур ще пропуска всички честоти в интервала от ω_{c1} до ω_{c2} с достатъчно голяма мощност (поне половината от максималната) и няма да пропуска всички останали честоти (по-точно казано ще ги пропуска с твърде малка мощност).



Фиг. 7.6. Честотна зависимост на тока във веригата и критични честоти

Може да се докаже, че резонансната и критичните честоти са свързани по следния начин:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}.$$
(7.14)

За домашно: Можете ли да го докажете?

Критичните честоти позволяват да се дефинира понятието **широчина на честотната лента** в rad/s или в Hz :

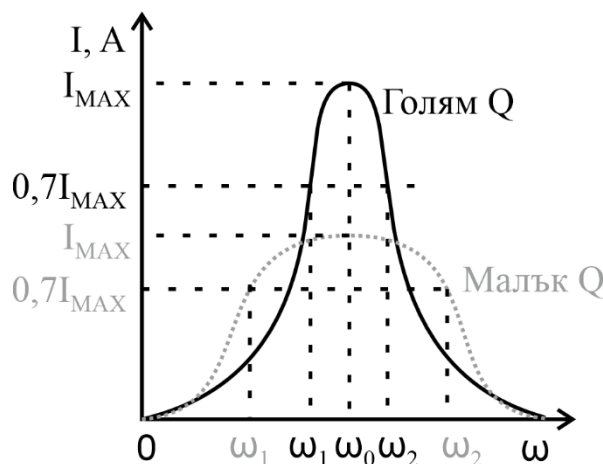
$$BW_{\omega} = \omega_{c2} - \omega_{c1}, rad \cdot s^{-1} \quad \text{или} \quad BW_f = f_{c2} - f_{c1}, Hz.$$
(7.15)

Качествен фактор на RLC верига

Понятието **качествен фактор** се дефинира като отношението на резонансната честота и широчината на честотната лента:

$$Q = \frac{f_0}{BW_f} = \frac{\omega_0}{BW_\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_{c2} - \omega_{c1}}. \quad (7.16)$$

При голям качествен фактор Q честотната лента BW е по-тясна, но пиковата стойност на тока е по-голяма. От друга страна при малък Q фактор, максималната стойност на тока е по-малка, но широчината на честотната лента се увеличава. Горното твърдение е представено графично на фиг. 7.7.



Фиг. 7.7. Широчина на честотната лента при голям и малък качествен фактор

Качественият фактор се смята за голям при $Q > 10$, а за малък - при $Q \leq 10$. В случай на последователна RLC верига Q -факторът може да се изрази чрез:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} - \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right]} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{L}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{X_L(\omega_0)}{R} = \frac{X_C(\omega_0)}{R}, \quad (7.17)$$

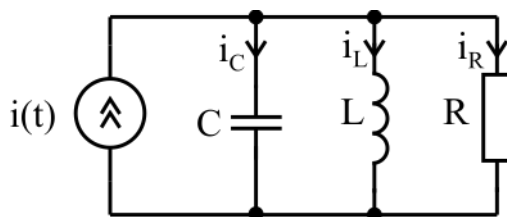
т.е. Q може да се определи като съотношението на реактивното съпротивление при резонансна честота и активното съпротивление. С други думи, с увеличаването на съпротивлението R , качествения фактор намалява, но се увеличава широчината на честотната лента.

В случай на голям качествен фактор критичните честоти могат да бъдат апроксимирани достатъчно точно чрез:

$$\omega_{c1} = \omega_0 - \frac{BW_\omega}{2} \quad \text{и} \quad \omega_{c2} = \omega_0 + \frac{BW_\omega}{2}. \quad (7.18)$$

7.2. Резонанс на токовете

Разглежда се паралелна RLC верига, захранвана от синусодален източник на ток, както е показано на фиг. 7.8.

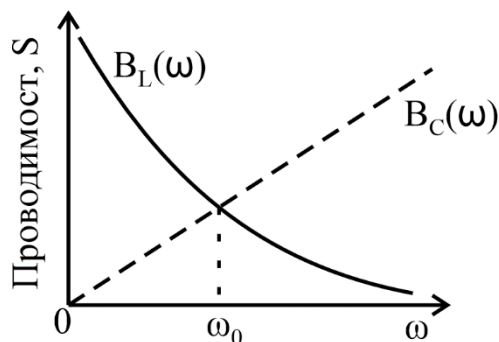


Фиг. 7.8. Паралелна RLC верига, захранвана от синусоидален източник на ток

Комплексната проводимост на веригата е:

$$Y = \frac{1}{R} - j(B_L - B_C) = G - j(B_L - B_C), \quad (7.19)$$

където двете реактивни проводимости са функция на честотата: $B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}$ и $B_C(\omega) = \omega C$. Функционалната им зависимост от честотата ω е представена графично на фигура 7.9.



Фиг. 7.9. Честотни зависимости на $B_L(\omega)$ и $B_C(\omega)$

Ситуацията, при която $B_L(\omega) = B_C(\omega)$, се нарича *резонанс на токовете*, а честотата ω_0 - *резонансна*. Вижда се, че условието за резонанс на токовете е:

$$B_L = B_C \rightarrow \frac{1}{\omega L} = \omega C, \quad (7.20)$$

т.е. резонансната честота е същата, както при последователна RLC верига:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (7.21)$$

За паралелна RLC верига може да се запише уравнение по ПЗК:

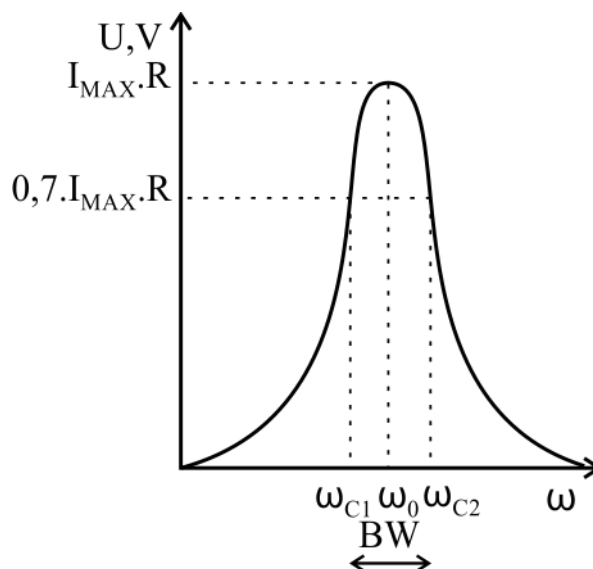
$$i = i_L + i_C + i_R. \quad (7.22)$$

Тъй като при резонанс на токовете $B_L = B_C$, токовете i_L и i_C ще бъдат равни, но с противоположна посока, т.е.:

$$i_L + i_C = 0. \quad (7.23)$$

По тази причина в условията на резонанс входният ток i и токът на резистора i_R ще бъдат равни, а i_R ще има максимум (фиг. 7.10):

$$i = i_L + i_C + i_R = 0 + i_R. \quad (7.24)$$



Фиг. 7.10. Честотна зависимост на тока през резистора при паралелен RLC контур

Аналогично на последователна RLC верига могат да се определят критичните честоти на паралелния контур, като в случая те са:

$$\omega_{C1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}; \quad (7.25)$$

$$\omega_{C2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

Широчината на честотната лента отново е:

$$BW = \omega_{C2} - \omega_{C1}. \quad (7.26)$$

За качествения фактор на паралелна RLC верига се получава:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{X_L(\omega_0)} = \frac{R}{X_C(\omega_0)}, \quad (7.27)$$

т.е. в случая с увеличаване на съпротивлението на товара R се увеличава и качественият фактор Q .

7.3. Резонансни явления в сложни вериги

В случай че в дадена верига съществуват повече от един кондензатор и бобина, могат да възникнат повече от един резонанс за различни части от веригата. Условието за възникването на резонанс на напреженията в някаква част от веригата с еквивалентно комплексно съпротивление $Z_E = R_E + jX_E$ е:

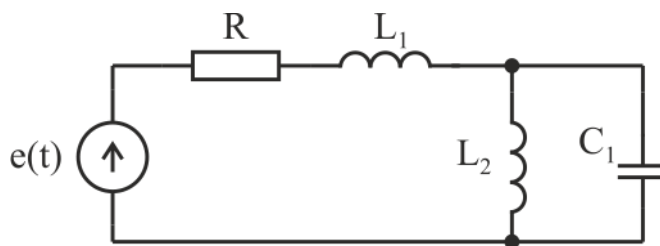
$$Z_E = R_E + jX_E = R_E \quad \text{или} \quad X_E = 0. \quad (7.28)$$

Аналогично за да възникне резонанс на токовете в някакъв участък от веригата с комплексна проводимост $Y_E = G_E - jB_E$ е необходимо:

$$Y_E = G_E - jB_E = G_E \quad \text{или} \quad B_E = 0. \quad (7.29)$$

Качественият фактор Q и широчината на честотната лента се определят аналогично на разгледаните по-горе вериги, но използвайки еквивалентните параметри.

Пример 7.1. За схемата от фиг. 7.11 да се определят условията за настъпване на резонанс на напреженията и резонанс на токовете.



Фиг. 7.11. Схема към пример 7.1

В дадената верига могат да възникнат два резонанса:

- Резонанс на токовете за L_2 и C_1 ;
- Резонанс на напреженията за L_1 , L_2 и C_1 (за цялата верига).

За да се определи условието за възникване на резонанс на токовете се определя еквивалентната комплексна проводимост на L_2 и C_1 :

$$Y_E = -\left(j\frac{1}{\omega L_2} - j\omega C_1\right) = -j\left(\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_1\right) = j0.$$

Следователно резонансната честота е:

$$\omega C_1 = \frac{1}{\omega L_2} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_2}}$$

За да се определи условието за резонанс на напреженията е необходимо да се определи еквивалентното комплексно съпротивление на цялата верига:

$$Z_E = R + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot \left(-j\frac{1}{\omega C_1}\right)}{j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_1}} = R + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega L_2 \cdot \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_1}}\right).$$

Резонанс на напреженията за цялата верига може да възникне когато реактивното съпротивление е 0, т.е. при:

$$\omega L_1 - \frac{\omega L_2 \cdot \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_1}} = 0 \rightarrow \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{1}{\omega C_1} \rightarrow \omega^2 L_1 L_2 C_1 - L_1 = L_2.$$

Следователно резонансната честота по отношение на цялата верига е:

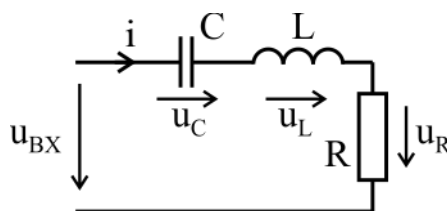
$$\omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C_1}}$$

7.4. Характерни ситуации при резонансни явления

Резонанс на напреженията при последователно съединен резистор

Вече беше разгледана последователната RLC верига. За нея (фиг. 7.12) може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = u_C(t) + u_L(t) + u_R(t). \quad (7.30)$$

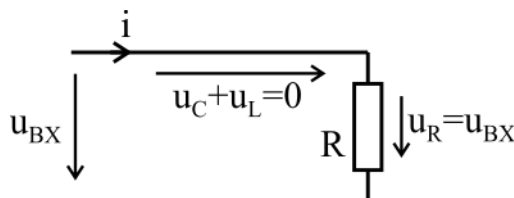


Фиг. 7.12. Последователна RLC верига

В случай на резонанс на напреженията, $X_L - X_C = 0$, поради което $u_C + u_L = 0$. Следователно ВЗК приема вида:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = u_C(t) + u_L(t) + u_R(t) = 0 + u_R(t) = u_R(t), \quad (7.31)$$

т.е. може да се създаде еквивалентната заместваща схема от фиг. 7.13.

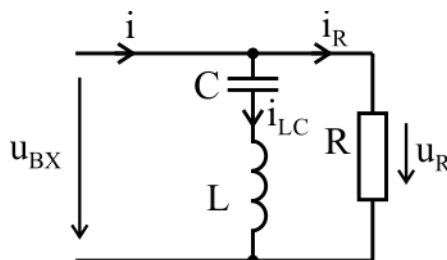


Фиг. 7.13. Еквивалентна заместваща схема на фиг. 7.12 при резонанс

На практика разглежданият пример представлява лентово-пропускателен филтър, който пропуска резонансната честота и спира честотите извън диапазона на честотната лента.

Резонанс на напреженията при паралелно съединен резистор

Друга схема, в която може да възникне резонанс на напреженията, е представена на фиг. 7.14.

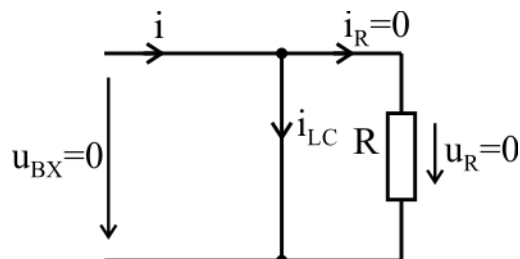


Фиг. 7.14. Друга схема, в която може да възникне резонанс на напреженията

За нея може да се запише следното уравнение по ПЗК:

$$i = i_{LC} + i_R. \quad (7.32)$$

В случай на резонанс на напреженията отново $u_C + u_L = 0$, т.е. бобината и кондензатора, взети заедно, ще представляват късо съединение. Следователно може да се създаде еквивалентната заместваща схема от фиг. 7.15.



Фиг. 7.15. Еквивалентна заместваща схема на фиг. 7.14 при резонанс

Тъй като клоновете, съдържащи R и L/C , са свързани паралелно, техните напрежения ще бъдат равни, т.е.:

$$u_R = u_L + u_C = 0 \text{ V}. \quad (7.33)$$

При тази ситуация се казва, че резисторът R е шунтиран от късото съединение, т.е. токът през него ще бъде нула:

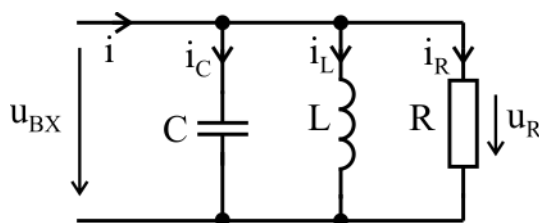
$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{0}{R} = 0 \text{ A}. \quad (7.34)$$

На практика разглежданият пример представлява лентово-задържащ филтър (режекторен филтър), който пропуска всички честоти, освен тези в близост до резонансната.

Резонанс на токовете при паралелно съединен резистор

Другата ситуация, която вече беше разгледана, е паралелното RLC съединение (фиг. 7.16). Тя също представлява лентово-пропускащ филтъра и за нея може да се запише уравнение по ПЗК:

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) + i_R(t). \quad (7.35)$$

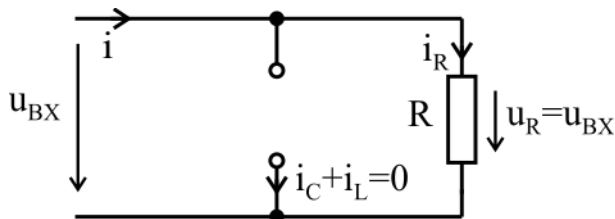


Фиг. 7.16. Паралелна RLC верига

При резонанс на токовете, $i_C + i_L = 0$, т.е. уравнение (7.35) добива вида:

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) + i_R(t) = 0 + i_R(t) = i_R(t). \quad (7.36)$$

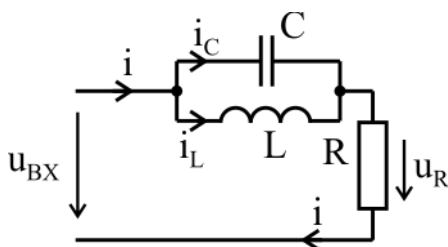
Следователно при резонанс L и C , взети заедно, представляват прекъснатата верига, поради което може да се създаде еквивалентната заместваща схема от фиг. 7.17.



Фиг. 7.17. Еквивалентна заместваща схема на фиг. 7.16 при резонанс

Резонанс на токовете при последователно съединен резистор

Друга характерна ситуация е представена на фиг. 7.18 (отново лентово-задържащ филтър), като при нея резистор е свързан последователно на паралелно свързани бобина и кондензатор.



Фиг. 7.18. Друга схема, в която е възможен резонанс на токовете

За схемата може да се запише уравнение по ПЗК:

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t). \tag{7.37}$$

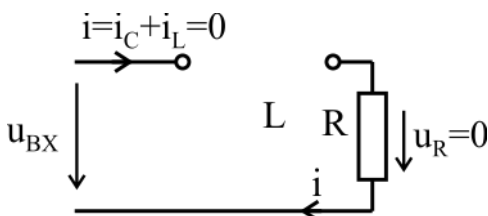
При резонанс на токовете горното уравнение става:

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t) = 0 \text{ A}, \tag{7.38}$$

т.е. във веригата няма да тече ток и напрежението върху резистора ще бъде нула:

$$u_R(t) = i(t) \cdot R = 0 \cdot R = 0 \text{ V}. \tag{7.39}$$

Това позволява при такава ситуация да се създаде еквивалентната заместваща схема от фиг. 7.19.



Фиг. 7.19. Еквивалентна заместваща схема на фиг. 7.18 при резонанс

Тема 8. Несинусоидални режими в електрическите вериги

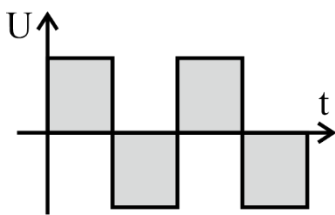
8.1. Основни понятия

8.1.1. Несинусоидални сигнали

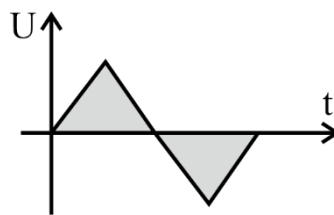
До този момент бяха разгледани електрически вериги, захранвани от постояннотокови и от синусоидални източници. Но в повечето ситуации формата на сигнала не е нито постоянна, нито синусоидална. Периодични сигнали, чиято форма не е синусоидална, се наричат *несинусоидални*, като те се характеризират със следните характеристики:

- средната им стойност може да не е нула (сигналът може да има положително или отрицателно постояннотоково отместване);
- моментната им стойност не може да бъде описана със синусоида.

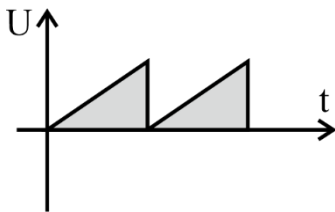
Типични несинусоидални сигнали са представени на фиг. 8.1.



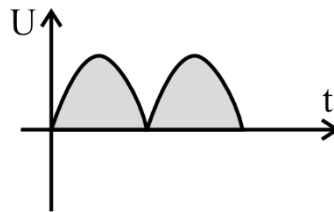
Сигнал с правоъгълна форма



Сигнал с триъгълна форма



Сигнал с трионообразна форма



Изправена синусоида

Фиг. 8.1. Примери за несинусоидални форми на сигнала

Много устройства създават несинусоидални токове и напрежения, въпреки че се захранват от синусоидални такива. Примери за това са токоизправителите (ще бъдат разгледани в Тема 12 от настоящият учебник), различните интегриращи и диференциращи вериги, а също така от различни нелинейности в елементите и източниците. В тази тема се разглежда начинът на анализиране на такива вериги, независимо от формата на сигнала.

8.1.2. Разлагане в ред на Фурие

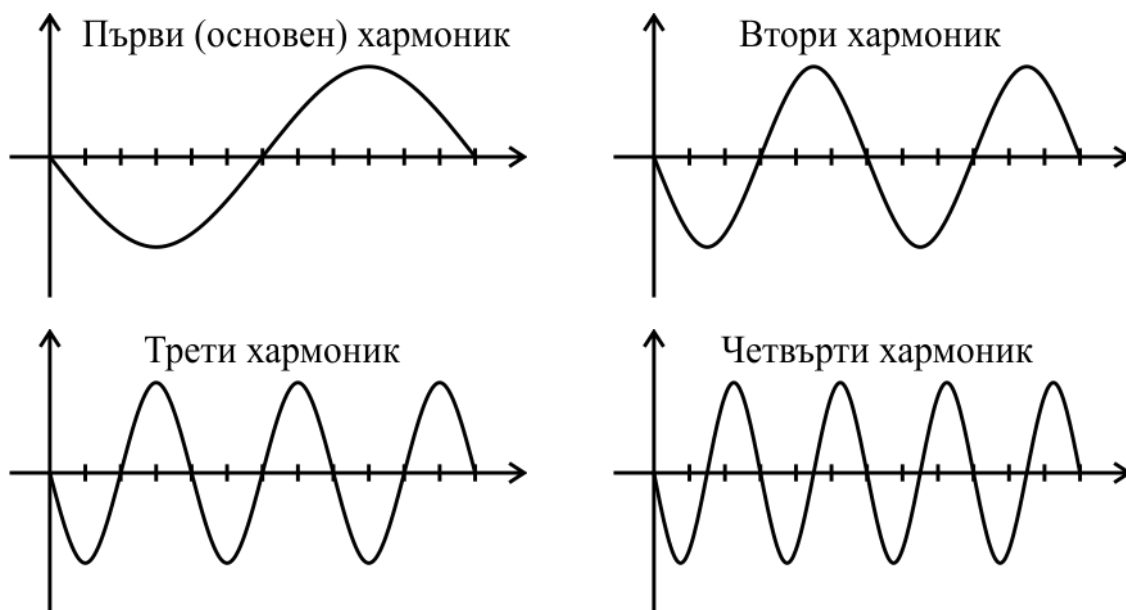
Всеки периодичен несинусоидален сигнал може да бъде представен като сума от синусоидални съставки с различни честоти, наречани *хармоници*. Получаването на тази сума се нарича *разлагане в ред на Фурие*. Всеки периодичен несинусоидален ток $i(t)$ може да бъде разложен в ред на Фурие по следния начин:

$$\begin{aligned} i(t) &= I^{(0)} + I_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_I^{(1)}) + I_m^{(2)} \sin(2\omega t + \varphi_I^{(2)}) + \dots = \\ &= I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \sin(k \cdot \omega \cdot t + \varphi_I^{(k)}), \end{aligned} \quad (8.1)$$

където $I^{(0)}$ е постоянната съставка, добавяща положително или отрицателно отместване, $A; I_m^{(k)}$ е амплитудата на k -тия хармоник, $A; \varphi_I^{(k)}$ е началната фаза на k -тия хармоник, °;

Първата синусоидална съставка ($I_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_I^{(1)})$) се нарича *основен (първи) хармоник*, като честотата на несинусоидалния сигнал е равна на тази на първия хармоник.

Честотата на k -тия хармоник е k пъти по-голяма от тази на основния, където k е цяло и положително число. С други думи, честотите на всички хармоници са кратни на тази на основния. Графичната интерпретация на последното твърдение е представено на фиг. 8.2.



Фиг. 8.2. Честотата на първите четири хармоника

Уравнение (8.1) може да се представи и по следния начин:

$$i(t) = I^{(0)} + A_1 \sin(1\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + \dots + B_1 \cos(1\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + \dots \quad (8.2)$$

или съкратено като:

$$i(t) = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)), \quad (8.3)$$

където A_k и B_k са константи. Постоянната съставка представлява средната стойност на несинусоидалната величина и може да се определи чрез:

$$I^{(0)} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt. \quad (8.4)$$

От друга страна константите A_k и B_k могат да се определят чрез:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin(k\omega t) dt; \quad (8.5)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \cos(k\omega t) dt. \quad (8.6)$$

Уравнения (8.4), (8.5) и (8.6) се отнасят за непрекъснати сигнали. В случай на дискретен сигнал $I[k]$, съдържащ N на брой дискретни стойности, се използват:

$$I^{(0)} = \frac{\sum_{k=0}^T (I[k])}{N};$$

$$A_k = \frac{2 \sum_{k=0}^T (I[k] \sin(k\omega t))}{N}; \quad (8.7)$$

$$B_k = \frac{2 \sum_{k=0}^T (I[k] \cos(k\omega t))}{N}.$$

Чрез константите A_k и B_k могат да се определят амплитудите и началните фази на хармониците, както следва:

$$I_m^{(k)} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2};$$

$$\varphi_I^{(k)} = \arctg \frac{A_k}{B_k}. \quad (8.8)$$

Разлагането в ред на Фурие е представено само с информационна цел. То няма да бъде използвано при анализа на несинусоидални вериги.

8.2. Несинусоидални токове и напрежения

8.2.1. Примери за несинусоидални сигнали

За по-добро представяне смисъла на несинусоидалните токове и напрежения се разглежда пример 8.1.

Пример 8.1. Да се скицира следното несинусоидално напрежение:

$$u(t) = -4 + 1,5 \sin(\omega t) \text{ V}$$

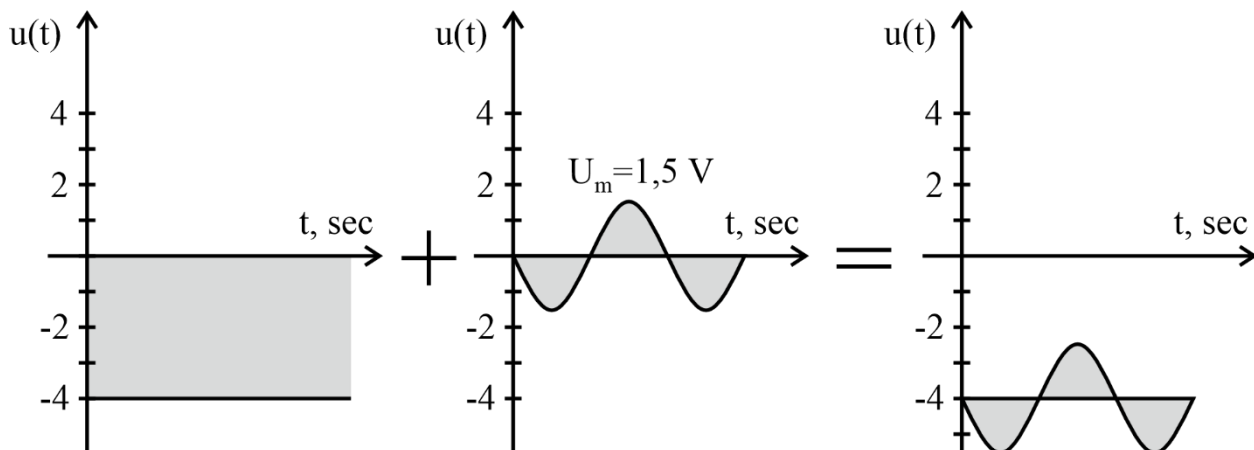
Решение: $u(t)$ има две съставки (два хармоника):

- постоянна съставка $U^{(0)} = -4 \text{ V}$;
- и синусоидална съставка $u^{(1)}(t) = 1,5 \sin(\omega t) \text{ V}$.

За да се скицира напрежението може да се изпълни следното:

- първо се скицира постоянната съставка;
- след това се скицира синусоидалната съставка;
- двете криви се събират графично за да се определи резултатното несинусоидално напрежение.

Решението на задачата е представено графично на фиг. 8.3.



Фиг. 8.3. Решение на пример 8.1

Както вече беше казано, всеки периодичен несинусоидален ток/напрежение може да се разложи в ред на Фурие, като сума от синусоидални съставки, както е показано в примери 8.2 и 8.3.

Пример 8.2. Да се анализира разлагането в ред на Фурие при някои несинусоидални форми на сигнала.

- Синусоидален сигнал:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t).$$



Фиг. 8.4. Времедиаграма и амплитуда на хармониците при синусоидален сигнал

- Правоъгълен сигнал:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) + \frac{U_m}{3} \sin(3\omega t) + \frac{U_m}{5} \sin(5\omega t) + \frac{U_m}{7} \sin(7\omega t) + \dots$$



Фиг. 8.5. Времедиаграма и амплитуда на хармониците при правоъгълен сигнал

- Триъгълен сигнал

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) - \frac{U_m}{3^2} \sin(3\omega t) + \frac{U_m}{5^2} \sin(5\omega t) - \frac{U_m}{7^2} \sin(7\omega t) + \dots$$



Фиг. 8.6. Времедиаграма и амплитуда на хармониците при триъгълен сигнал

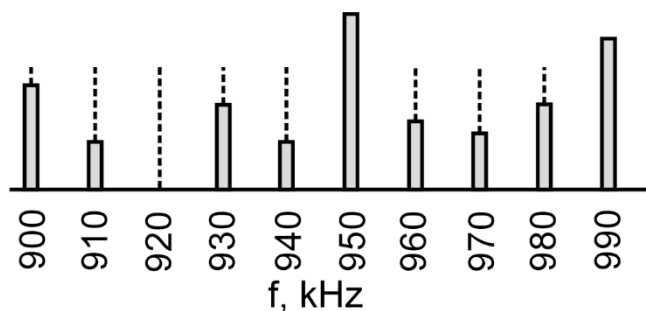
- Трионообразен сигнал

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) - \frac{U_m}{2} \sin(2\omega t) + \frac{U_m}{3} \sin(3\omega t) - \frac{U_m}{4} \sin(4\omega t) + \dots$$



Фиг. 8.7. Времедиаграма и амплитуда на хармониците при трионообразен сигнал

Пример 8.3. Друг пример за несинусоидално напрежение е сигналът, улавян от антената на радио или телевизионен приемник. Всеки канал се излъчва на определена честота, но тъй като антената улавя всички канали, сигналът е сумата от всички тях, т.е. е несинусоидален (фиг. 8.8).



Фиг. 8.8. Времедиаграма и амплитуда на хармониците при трионообразен сигнал

8.2.2. Ефективна стойност на несинусоидални токове и напрежения

Нека е даден несинусоидалният ток:

$$i(t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_I^{(1)}) + I_m^{(2)} \sin(2\omega t + \varphi_I^{(2)}) + \dots \quad (8.9)$$

Неговата ефективна стойност може да се определи съгласно:

$$I = \sqrt{(I^{(0)})^2 + \left(\frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_m^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots} = \sqrt{(I^{(0)})^2 + \frac{(I_m^{(1)})^2 + (I_m^{(2)})^2 + \dots}{2}} =$$

$$= \sqrt{(I^{(0)})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (I_m^{(k)})^2 / 2},$$
(8.10)

където $\frac{I_m^{(k)}}{\sqrt{2}}$ и $I_m^{(k)}$ са съответно ефективната и амплитудната стойност на k -тия хармоник, А. По аналогичен начин се определя ефективната стойност на напреженията в несинусоидалните вериги.

Пример 8.4. Да се определи ефективната стойност на следното несинусоидално напрежение:

$$u_1(t) = 10 + 2 \sin(\omega t) + 7 \sin(3\omega t) + 11 \sin(5\omega t) + 3 \sin(7\omega t) + 5 \sin(9\omega t) \text{ V}$$

Решение:

$$U_1 = \sqrt{(10)^2 + \frac{(2)^2 + (7)^2 + (11)^2 + (3)^2 + (5)^2}{2}} = 14,28 \text{ V.}$$

8.3. Анализ на вериги при установен несинусоидален режим

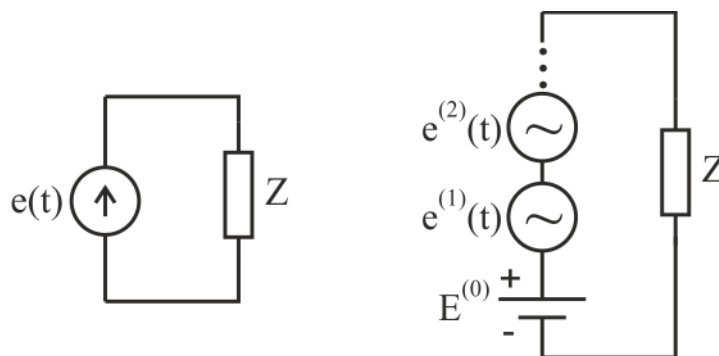
8.3.1. Принцип на наслагването

Нека несинусоидален източник на напрежение захранва товар Z , като моментната стойност на източника е:

$$e(t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_E^{(1)}) + E_m^{(2)} \sin(2\omega t + \varphi_E^{(2)}) + \dots =$$

$$= E^{(0)} + e^{(1)}(t) + e^{(2)}(t) + \dots$$
(8.11)

В Тема 1 на настоящият учебник вече беше показано, че източниците на напрежение се сумират когато са свързани последователно. С други думи, може да се създаде еквивалентна заместваща схема, в която всяка хармонична съставка е отделен източник (фиг. 8.9).



Фиг. 8.9. Еквивалентна заместваща схема на несинусоидален източник

Тъй като веригата е линейна, може да се приложи принципът на наслагването (Теоремата за суперпозицията), т.е. веригата да се анализира за всеки източник по отделно. Важат същите правила, както и при постоянотоковите вериги - когато веригата се анализира за даден източник, всички други източници се премахват, като:

- източниците на напрежение се заменят с късо съединение;
- източниците на ток се заменят с прекъснатата верига.

Съгласно принципа на наслагването, всеки източник ще създаде някакъв ток във веригата, като общият ток ще бъде сума от въздействията на отделните източници, т.е.:

$$i(t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_I^{(1)}) + I_m^{(2)} \sin(2\omega t + \varphi_I^{(2)}) + \dots \quad (8.12)$$

Следователно анализът на линейни несинусоидални вериги се свежда до прилагане на принципа на наслагването и анализ на веригата за всеки хармоник по отделно.

8.3.2. Реактивни съпротивления

Друг съществен фактор при анализа на несинусоидалните вериги е различната честота на всяка хармонична съставка. Тъй като реактивните съпротивления на бобини и кондензатори зависят от честотата на сигнала, те ще се различават за различните хармоници.

Отново се разглежда схемата от фиг. 8.9, като товарът $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ се захранва от несинусоидален източник:

$$e(t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_E^{(1)}) + E_m^{(2)} \sin(2\omega t + \varphi_E^{(2)}) + \dots \quad (8.13)$$

Съпротивленията на бобините и кондензаторите се изменят за отделните хармоници както следва:

- Постоянна съставка: $E^{(0)}$

При постоянни токове и напрежения бобината е късо съединение, а кондензаторът - прекъснатата верига. С други думи, техните съпротивления са:

$$X_L^{(0)} = \omega L = 0 \cdot L = 0 \quad X_C^{(0)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{0 \cdot C} = \infty. \quad (8.14)$$

- Първи хармоник: $E_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_E^{(1)})$

Честотата на първия хармоник е ω , т.е. съпротивленията на бобината и кондензатора са:

$$X_L^{(1)} = \omega L \quad X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C}. \quad (8.15)$$

- Втори хармоник: $E_m^{(2)} \sin(2\omega t + \varphi_E^{(2)})$

Честотата на втория хармоник е 2ω , т.е. съпротивленията на бобината и кондензатора са:

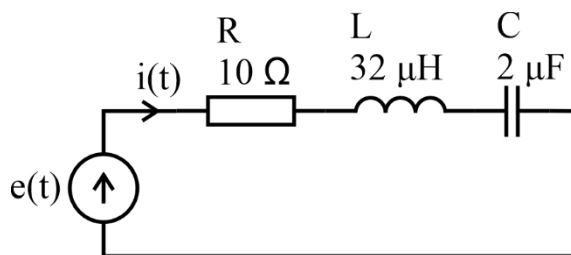
$$X_L^{(2)} = 2\omega L \quad X_C^{(2)} = \frac{1}{2\omega C} \quad (8.16)$$

- k -ти хармоник: $E_m^{(k)} \sin(k\omega t + \varphi_E^{(k)})$

Честотата на k -тия хармоник е $k\omega$, т.е. съпротивленията на бобината и кондензатора са:

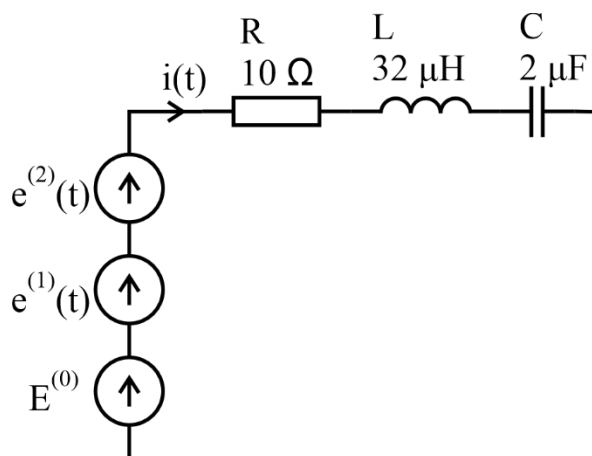
$$X_L^{(k)} = k\omega L \quad X_C^{(k)} = \frac{1}{k\omega C} \quad (8.17)$$

Пример 8.5. За схемата от фиг. 8.10 да се определят моментната и ефективната стойност на тока във веригата, ако несинусоидалният източник е зададен с $e(t) = 100 + 25 \cdot \sin(\omega t + 10^\circ) + 5 \cdot \sin(2\omega t) \text{ V}$, а честотата на основния хармоник е $f = 10 \text{ kHz}$.



Фиг. 8.10. Схема към пример 8.5

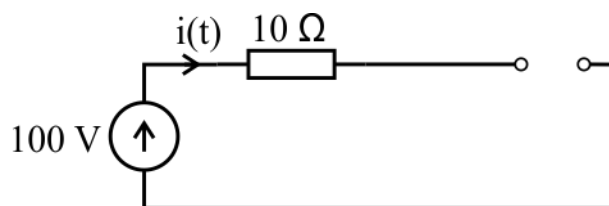
Може да се създаде следната еквивалентна заместваща схема с три източника (фиг. 8.11), за която да се приложи принципът на наслагването и да се анализира за всеки източник по отделно.



Фиг. 8.11. Еквивалентна заместваща схема към пример 8.5

Във веригата действа само постоянната съставка $E^{(0)} = 100 \text{ V}$

При постоянен ток, бобината е късо съединение, а кондензаторът прекъсва веригата. Следователно може да се създаде еквивалентната заместваща схема, представена на фиг. 8.12.



Фиг. 8.12. Еквивалентна заместваща схема за нулевия хармоник към пример 8.5

Вижда се, че веригата е прекъсната, т.е. токът, дължащ се на постоянната съставка, е:

$$I^{(0)} = 0 \text{ A.}$$

Във веригата действа само първия хармоник $e^{(1)}(t) = 25 \cdot \sin(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$

Напрежението на източника се представя в комплексна форма:

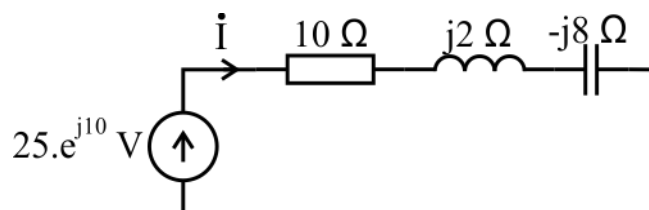
$$\dot{E} = 25 \cdot e^{j10} \text{ V.}$$

Ъгловата честота за първия хармоник е $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, т.е. индуктивното и капацитивното съпротивления са:

$$X_L^{(1)} = \omega L = 2\pi f L = 2\pi 10^4 \cdot 32 \cdot 10^{-6} = 2 \Omega;$$

$$X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 8 \Omega.$$

Създава се еквивалентна заместваща схема с комплексни числа (фиг. 8.13).



Фиг. 8.13. Еквивалентна заместваща схема за първи хармоник към пример 8.5

Записва се уравнение по ВЗК, откъдето се определя токът:

$$\dot{E} = 10\dot{I} + j2\dot{I} - j8\dot{I} \rightarrow \dot{I} = \frac{25 \cdot e^{j10}}{10 + j2 - j8} = 2,14 \cdot e^{j41,0} \text{ A.}$$

Комплексният ток се преобразува в синусоидална форма:

$$i^{(1)}(t) = 2,14 \sin(\omega t + 41,0^\circ) \text{ A.}$$

Във веригата действа само втория хармоник $e^{(2)}(t) = 5 \cdot \sin(2\omega t) \text{ V}$

Напрежението на източника се представя в комплексна форма:

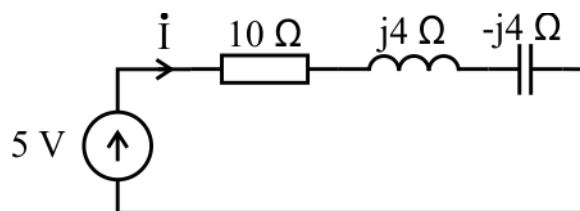
$$\dot{E} = 5 \cdot e^{j0} = 5 \text{ V.}$$

Ъгловата честота за втория хармоник е $2\omega = 2(2\pi f)$, откъдето за индуктивното и капацитивното съпротивления се получава:

$$X_L^{(2)} = 2\omega L = 2\pi f L = 4\pi 10^4 \cdot 32 \cdot 10^{-6} = 4 \Omega;$$

$$X_C^{(2)} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{1}{2(2\pi f)C} = \frac{1}{4\pi 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 4 \Omega.$$

Създава се еквивалентна заместваща схема с комплексни числа (фиг. 8.14).



Фиг. 8.14. Еквивалентна заместваща схема за втория хармоник към пример 8.5

Чрез ВЗК се изразява токът във веригата:

$$\dot{I} = \frac{5}{10 + j4 - j4} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ A},$$

след което се преобразува в синусоидална форма:

$$i^{(2)}(t) = 0,5 \sin(2\omega t) \text{ A}.$$

Пълно решение за тока

Прилага се принципът на наслагването и се определя общият ток във веригата:

$$i(t) = I^{(0)} + i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) = 0 + 2,14 \sin(\omega t + 41,0^\circ) + 0,5 \sin(2\omega t) \text{ A}$$

За ефективната стойност на тока се получава:

$$I = \sqrt{(I^{(0)})^2 + \frac{(I_m^{(1)})^2 + (I_m^{(2)})^2}{2}} = \sqrt{0 + \frac{(2,14)^2 + (0,5)^2}{2}} = 1,57 \text{ A}.$$

8.4. Мощности в несинусоидални вериги

8.4.1. Активна мощност

Като следствие от принципа на наслагването, общата консумирана (активна) мощност в несинусоидална верига може да се определи съгласно:

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + \dots \quad (8.18)$$

където $P^{(0)}$ е мощността, консумирана от постоянната съставка; $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, и т.н. са активните мощности, консумирани от всеки хармоник. Следователно за активната мощност в несинусоидална верига може да се запише:

$$\begin{aligned} P &= U^{(0)} \cdot I^{(0)} + U^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + U^{(2)} \cdot I^{(2)} \cdot \cos \varphi^{(2)} + \dots = \\ &= U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)}, \end{aligned} \quad (8.19)$$

където $U^{(k)}$ и $I^{(k)}$ са ефективните стойности на тока и напрежението за k -тия хармоник; $\varphi^{(k)}$ е фазовата разлика на k -тия хармоник.

8.4.2. Реактивна мощност

По аналогичен начин реактивната мощност може да се определи като сума от реактивните мощности на всеки хармоник:

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} + \dots \quad (8.20)$$

или

$$Q = U^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot \sin \varphi^{(1)} + U^{(2)} \cdot I^{(2)} \cdot \sin \varphi^{(2)} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)}. \quad (8.21)$$

8.4.3. Пълна мощност

Пълната мощност при несинусоидална верига се определя съгласно:

$$S = U \cdot I = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \frac{(U_m^{(1)})^2 + (U_m^{(2)})^2 + \dots}{2}} \cdot \sqrt{(I^{(0)})^2 + \frac{(I_m^{(1)})^2 + (I_m^{(2)})^2 + \dots}{2}}. \quad (8.22)$$

Може да се забележи, че в случая пълната мощност не може да бъде определена чрез активната и реактивната, като в общият случай е в сила:

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (8.23)$$

Тема 9. Преходни процеси в постояннотоковите вериги

В Тема 4 беше обосновано, че в кондензаторите и бобините се съхранява енергия под формата на електрическо и магнитно поле, чието количество е:

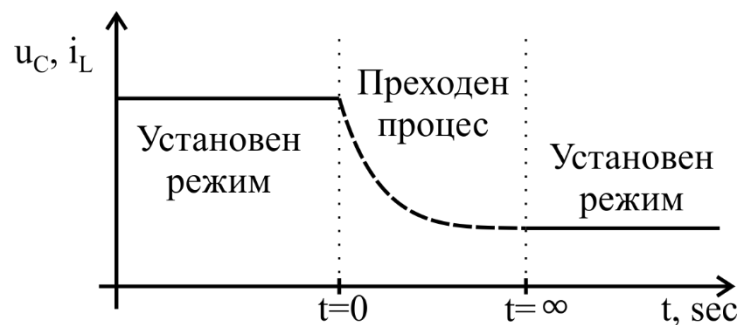
$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2 \quad W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2. \quad (9.1)$$

Но всички процеси в природата, свързани със зареждане или разреждане на енергия (независимо под каква форма), не могат да приключат мигновено, а отнемат определено време. Това зареждане/разреждане води до появата на т.н. преходни процеси.

В електрическите вериги преходните процеси възникват при наличие на бобини и кондензатори, когато веригата преминава от един установен режим в друг, което е съпроводено със зареждане или разреждане (освобождаване) на енергия. Примери за такива ситуации са:

- Верига се свързва към източник;
- Верига се разкача от източник;
- Възниква късо съединение;
- Завърта се потенциометър;
- Възниква каквото и да е изменение във веригата.

Събитието, предизвикващо преходния процес, се нарича *комутация*, а моментът от времето, в който то се случва, условно се приема за $t = 0$ (фиг. 9.1).



Фиг. 9.1. Преходен процес в електрическа верига

При възникване на преходен процес всички токове и напрежения във веригата започват да се изменят съгласно:

$$i(t) = i(\infty) + i_{\text{ПС}}(t) \quad \text{и} \quad u(t) = u(\infty) + u_{\text{ПС}}(t), \quad (9.2)$$

където $i(\infty)$ и $u(\infty)$ са новите установени стойности, след приключване на преходния процес в момента от времето $t = \infty$; $i_{\text{ПС}}(t)$ и $u_{\text{ПС}}(t)$ са преходните съставки, описващи характера и продължителността на преходния процес.

За преходните процеси са в сила две основни правила, наричани **независими начални условия**:

$$u_C(0+) = u_C(0-); \quad (9.3)$$

$$i_L(0+) = i_L(0-), \quad (9.4)$$

където моментите от времето $t = 0 +$ и $t = 0 -$ са непосредствено преди и след комутацията ($t = 0$).

С други думи, напрежението на кондензатора $u_C(t)$ и токът през бобината $i_L(t)$ запазват своите стойности в началния момент след комутацията, т.е. не могат да се изменят скокообразно.

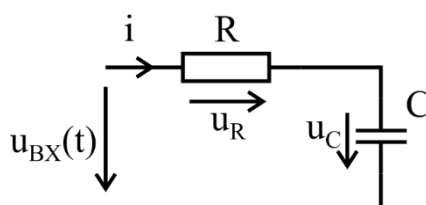
9.1. Преходни процеси от първи ред

9.1.1. Преходни процеси в последователна RC верига

Общи зависимости

Разглежда се последователна RC верига (фиг. 9.2), за която може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$u_{\text{BX}}(t) = u_R(t) + u_C(t) = i(t) \cdot R + u_C(t). \quad (9.5)$$



Фиг. 9.2. Последователна RC верига

Като се има предвид, че токът през кондензатора е $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, уравнение (9.5) добива вида:

$$u_{\text{BX}}(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t). \quad (9.6)$$

Всяка промяна във входното напрежение u_{BX} ще доведе до преходен процес. Решението на полученото обикновено диференциално уравнение е:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = u_C(\infty) + A_C \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}}, \quad (9.7)$$

където $u_C(\infty)$ е новата установена стойност на напрежението, след приключване на преходния процес, V ; A_C - константа, V ; $\tau_C = R \cdot C$ - времеконстантата на веригата, s .

A_C може да бъде определена чрез решаване на уравнение (9.7) за момента от времето $t = 0 +$:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow u_C(0+) = u_C(\infty) + A_C \cdot e^0. \quad (9.8)$$

Тъй като $e^0 = 1$, за A_C се получава:

$$A_C = u_C(0+) - u_C(\infty). \quad (9.9)$$

За да се определи токът във веригата е необходимо да се диференцира $u_C(t)$:

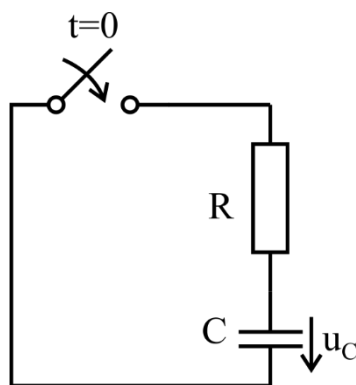
$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = -C \cdot \frac{1}{R \cdot C} A_C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{A_C}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow i(t) = -\frac{A_C}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.10)$$

Чрез Закона на Ом лесно може да се определи и пада на напрежение върху резистора:

$$u_R(t) = i(t) \cdot R. \quad (9.11)$$

Разряд на кондензатор

Разглежда се схемата от фиг. 9.3, в която кондензаторът C е предварително зареден до напрежение $u_C(0^-) = U_0$, след което се разрежда през резистора R .



Фиг. 9.3. Схема за разряд на кондензатор в последователна RC верига

Началното условие от уравнение (9.3) е изпълнено, т.е.:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = U_0, \quad (9.12)$$

а преходният процес за напрежението на кондензатора има следния вид:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_C \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.13)$$

След приключване на преходния процес ($t = \infty$) напрежението на кондензатора става $u_C(\infty) = 0 \text{ V}$, тъй като във веригата няма източници. Константата A_C може да се определи чрез анализ на уравнение (9.13) за момента от времето $t = 0+$:

$$u_C(0+) = U_0 = 0 + A_C \cdot e^{0+} = A_C \rightarrow A_C = U_0. \quad (9.14)$$

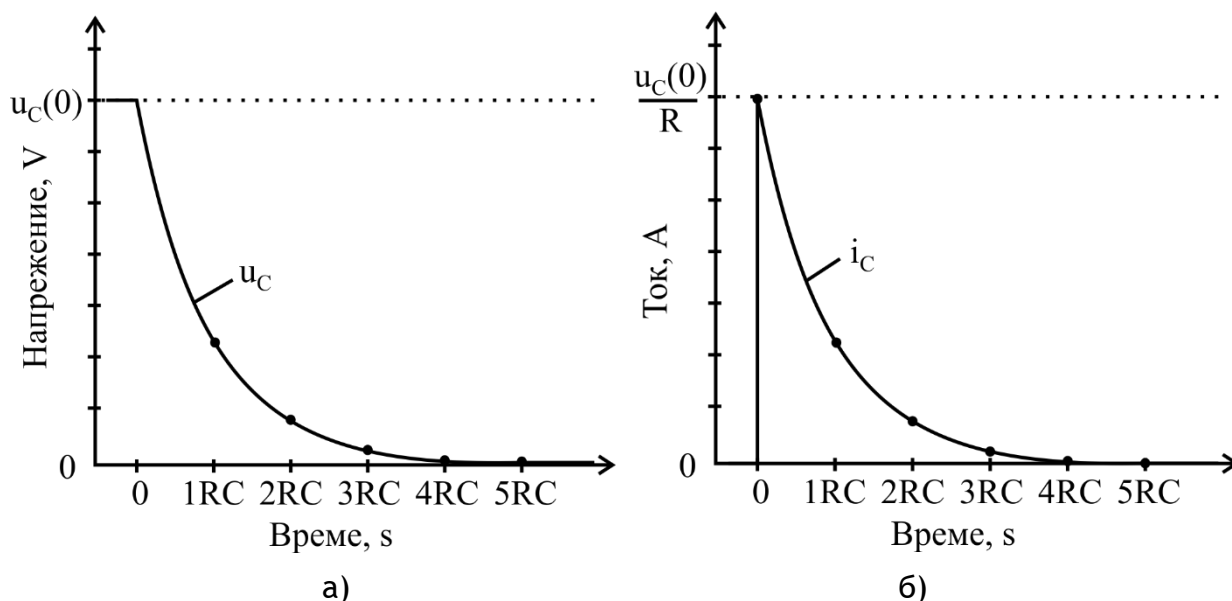
Следователно пълното решение за напрежението на кондензатора е:

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (9.15)$$

а токът във веригата се получава аналогично на уравнение (9.10):

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.16)$$

Получените зависимости са представени в графичен вид на фиг. 9.4 и в табличен вид в табл. 9.1. В практиката преходният процес се смята за приключил след 3 или 5 времеконстанти, т.е. когато големините на тока/напрежението са съответно 5% или 1% от началната си стойност.



Фиг. 9.4. Графична интерпретация на процеса „разряд на кондензатор в последователна RC верига“

Таблица 9.1. Разряд на кондензатор в последователна RC верига.

Време	0	1RC	2RC	3RC	4RC	5RC
Зареденост на кондензатора	100%	37%	14%	5%	2%	1%
Напрежение на кондензатора	U_0	$0,37 U_0$	$0,14 U_0$	$0,05 U_0$	$0,02 U_0$	$0,01 U_0$

Зареждане на кондензатор

Разглежда се последователна RC верига, която се включва към източник на постоянно напрежение E_0 в момента от времето $t = 0$ (фиг. 9.5). Приема се, че кондензаторът не е бил предварително зареден, т.е.:

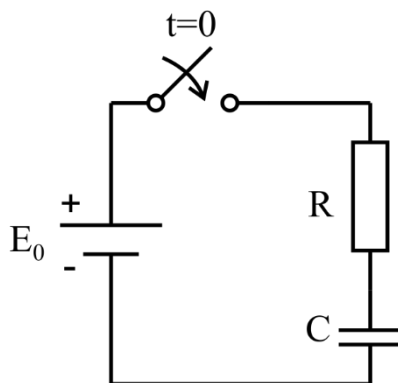
$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0 V. \tag{9.17}$$

За схемата може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$E_0 = u_R(t) + u_C(t) = i(t) \cdot R + u_C(t). \tag{9.18}$$

Законът за изменение напрежението на кондензатора след комутацията е:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_C \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{9.19}$$



Фиг. 9.5. Схема за зареждане на кондензатор през резистор

За да се определи установената съставка $u_C(\infty)$ след приключване на преходния процес е необходимо да се анализира уравнението по ВЗК за момента от времето $t = \infty$, като се има предвид, че при установен постояннотоков режим токът през кондензатора е $i(\infty) = 0$ A:

$$E_0 = i(\infty) \cdot R + u_C(\infty) = 0 \cdot R + u_C(\infty) \rightarrow u_C(\infty) = E_0. \quad (9.20)$$

Константата A_C може да се определи чрез решаване на уравнение (9.19) за момента от времето $t = 0 +$:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0 = u_C(\infty) + A_C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E_0 + A_C e^0 \rightarrow A_C = -E_0. \quad (9.21)$$

Следователно пълните решения за преходните процеси на напрежението и тока са:

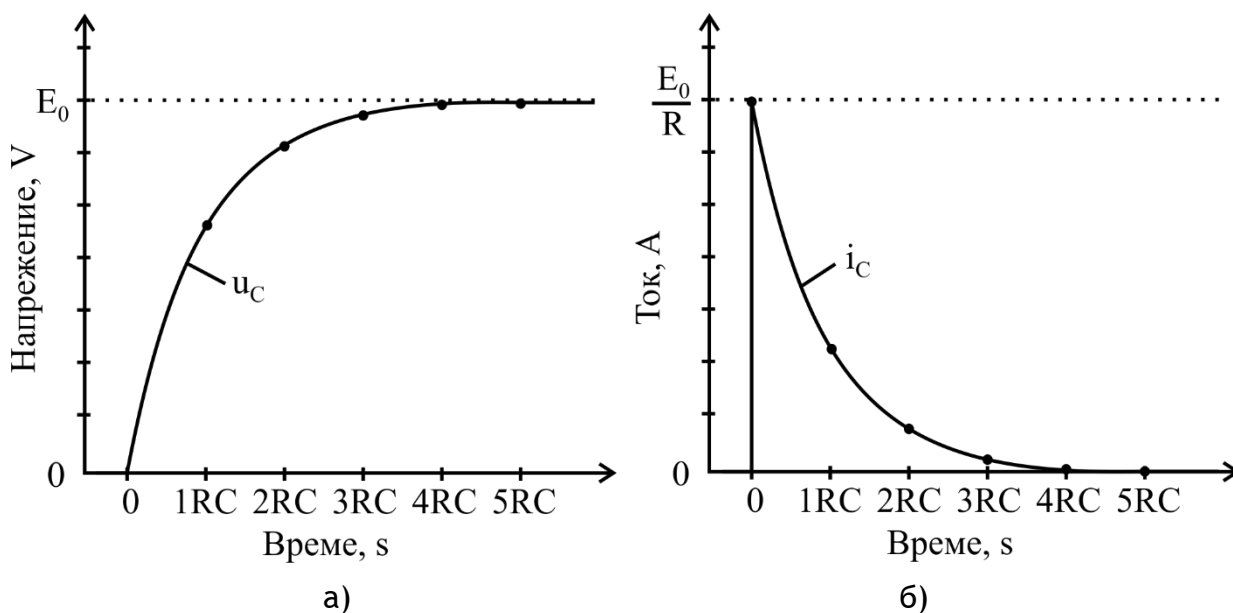
$$u_C(t) = E_0 - E_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (9.22)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.23)$$

Получените зависимости са представени в графичен и табличен вид, съответно на фиг. 9.6 и табл. 9.2.

Таблица 9.2. Зареждане на кондензатор в последователна RC верига.

Време	0	1RC	2RC	3RC	4RC	5RC
Зареденост на кондензатора	0%	63%	86%	95%	98%	99%
Напрежение на кондензатора	0	$0,63E_0$	$0,86E_0$	$0,95E_0$	$0,98E_0$	$0,99E_0$

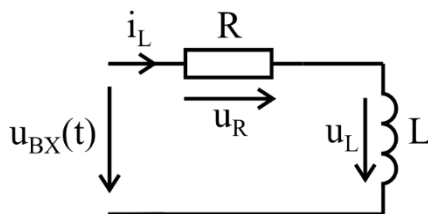


Фиг. 9.6. Графична интерпретация на процеса „зареждане на кондензатор в последователна RC верига“

9.1.2. Преходни процеси в последователна RL верига

Разглежда се последователна RL верига (фиг. 9.7), захранвана от напрежение $u_{BX}(t)$. За нея може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$u_{BX}(t) = u_R(t) + u_L(t) = i_L(t) \cdot R + u_L(t). \quad (9.24)$$



Фиг. 9.7. Последователна RL верига

Отчитайки, че падът на напрежение върху бобината е $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, уравнение (9.24) става:

$$u_{BX}(t) = i_L(t) \cdot R + L \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow \frac{u_{BX}(t)}{L} = \frac{R}{L} \cdot i_L(t) + \frac{di_L(t)}{dt}. \quad (9.25)$$

Следователно всяка промяна във входното напрежение $u_{BX}(t)$ ще доведе до промяна в тока на веригата. Решението на това обикновено диференциално уравнение има следния вид:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + A_L \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (9.26)$$

където $i_L(\infty)$ е установената съставка на тока след приключване на преходния процес, A ; A_L - константа, A ; $\frac{L}{R}$ - времеконстантата на веригата, s .

Константата A_L може да бъде определена чрез решаване на уравнение (9.26) за момента от времето $t = 0 +$:

$$i_L(0+) = i_L(\infty) + A_L \cdot e^0 \rightarrow A_L = i_L(0+) - i_L(\infty). \quad (9.27)$$

Напрежението върху бобината се определя чрез диференциране на тока $i_L(t)$:

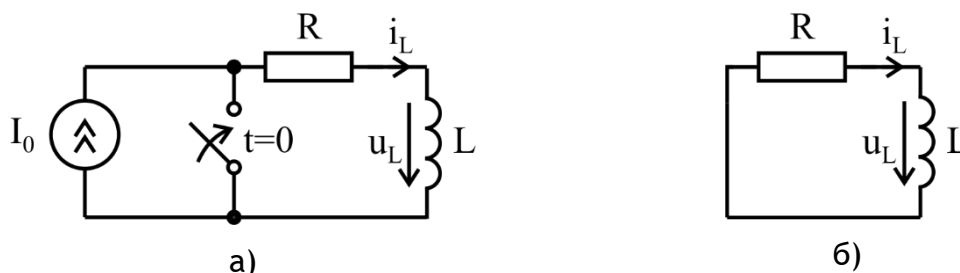
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = -RA_L e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (9.28)$$

а падът на напрежението върху резистора - чрез Закона на Ом:

$$u_R(t) = i_L(t) \cdot R. \quad (9.29)$$

Късо съединение на бобина (разреждане на бобина)

Разглежда се схемата от фиг. 9.8а, като първоначално през бобината L тече токът $i_L(0-) = I_0$. В момента от времето $t = 0$ ключът се затваря, при което веригата се дава на късо (фиг. 9.8б).



Фиг. 9.8. Схема за к.с. на последователна RL верига (а) и еквивалентна схема след к.с. (б)

Уравнението по ВЗК за веригата след комутацията е:

$$0 = u_R(t) + u_L(t) = Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow 0 = i_L(t) + \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt}, \quad (9.30)$$

а решението му спрямо тока $i_L(t)$ е:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + A_L \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.31)$$

Отчитайки че източникът е даден на късо, той не е свързан към бобината. Следователно установената стойност на тока след комутацията е:

$$i_L(\infty) = 0 A. \quad (9.32)$$

Константата A_L може да се определи чрез решаване на уравнение (9.31) за момента от времето $t = 0 +$:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = I_0 = i_L(\infty) + A_L \cdot e^0 \rightarrow A_L = I_0. \quad (9.33)$$

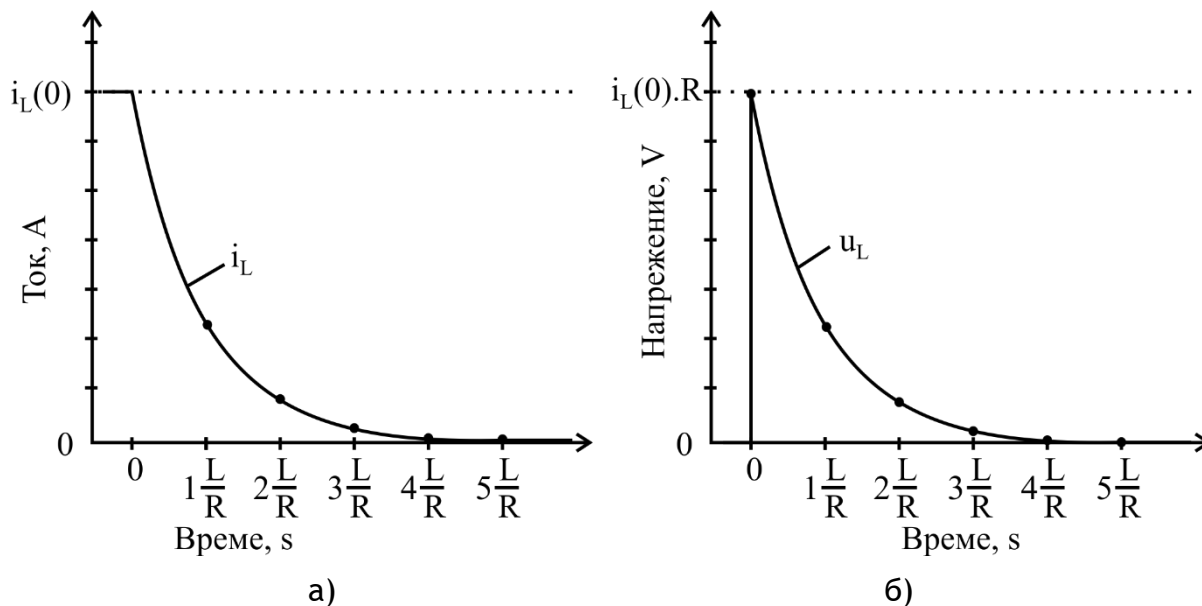
Следователно токът през бобината се изменя съгласно:

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (9.34)$$

а нейният пад на напрежение е:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = I_0 \cdot R \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.35)$$

Получените зависимости са представени в графичен и табличен вид, съответно на фиг. 9.9 и табл. 9.3.



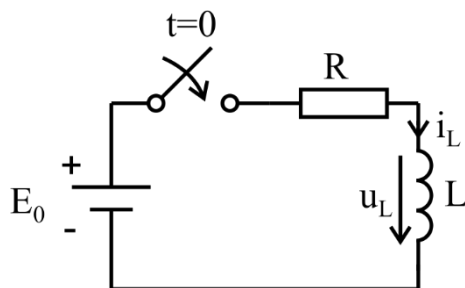
Фиг. 9.9. Графична интерпретация на процеса „късо съединение на последователна RL верига“

Таблица 9.3. Късо съединение на последователна RL верига.

Време	0	$1 \frac{L}{R}$	$2 \frac{L}{R}$	$3 \frac{L}{R}$	$4 \frac{L}{R}$	$5 \frac{L}{R}$
Зареденост на бобината	100%	37%	14%	5%	2%	1%
Ток на бобината	I_0	$0,37 \cdot I_0$	$0,14 \cdot I_0$	$0,05 \cdot I_0$	$0,02 \cdot I_0$	$0,01 \cdot I_0$

Включване на бобина към източник на напрежение (зареждане на бобина)

Нека една последователна RL верига, през която първоначално не тече ток, се включва към източник на постоянно напрежение в момента от времето $t = 0$ (фиг. 5.10).



Фиг. 9.10. Включване на последователна RL верига към източник на напрежение

От началното условие за бобината следва:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0 \text{ A.} \quad (9.36)$$

Уравнението по ВЗК е:

$$E_0 = u_R(t) + u_L(t) = R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}, \quad (9.37)$$

а решението на обикновеното диференциално уравнение е:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + A_L \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.38)$$

Установената стойност в момента от времето $t = \infty$ е:

$$i_L(\infty) = \frac{E_0}{R}, \quad (9.39)$$

а константата A_L може да се определи чрез анализ на уравнение (9.38) за момента от времето $t = 0+$:

$$i_L(0+) = 0 = i_L(\infty) + A_L \cdot e^0 \quad \rightarrow \quad A_L = -\frac{E_0}{R}. \quad (9.40)$$

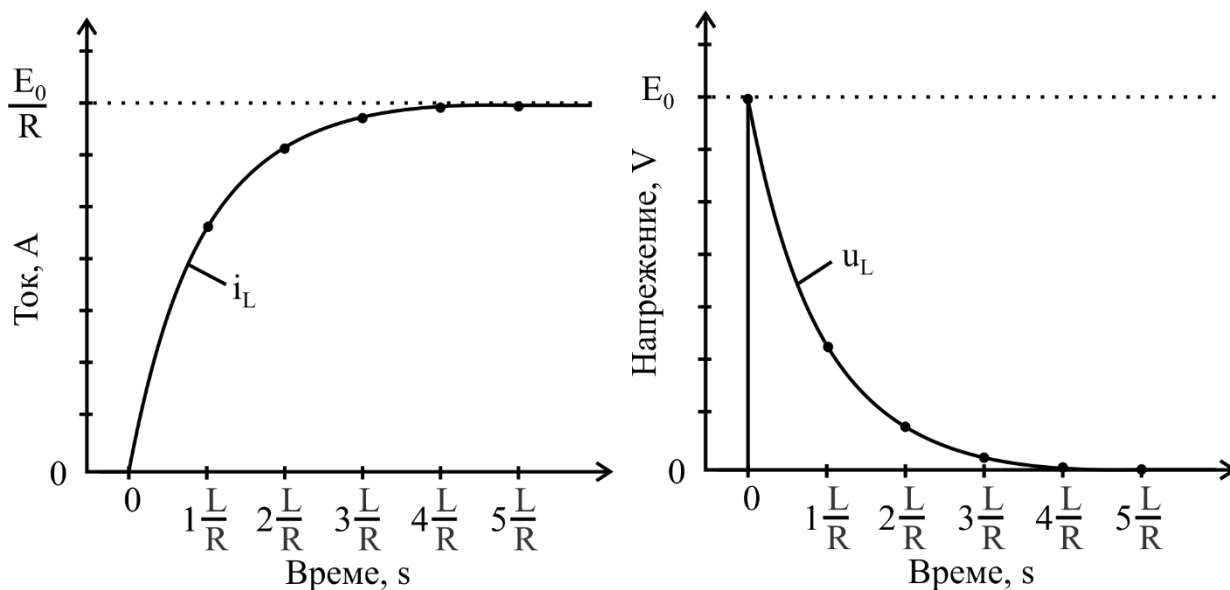
Следователно пълното решени за тока е:

$$i_L(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (9.41)$$

а за пада на напрежение върху бобината се получава:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = E_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.42)$$

Получените зависимости са представени в графичен и табличен вид, съответно на фиг. 9.11 и табл. 9.4.

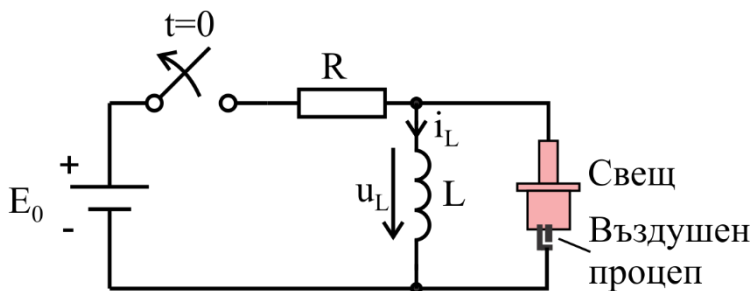


Фиг. 9.11. Графична интерпретация на процеса „включване на последователна RL верига към източник на напрежение“

Таблица 9.4. Включване на последователна RL верига към източник на напрежение.

Време	0	$1 \frac{L}{R}$	$2 \frac{L}{R}$	$3 \frac{L}{R}$	$4 \frac{L}{R}$	$5 \frac{L}{R}$
Зареденост на бобината	0%	63%	86%	95%	98%	99%
Ток на бобината	0	$0,63 \cdot \frac{E_0}{R}$	$0,86 \cdot \frac{E_0}{R}$	$0,95 \cdot \frac{E_0}{R}$	$0,98 \cdot \frac{E_0}{R}$	$0,99 \cdot \frac{E_0}{R}$

Пример 9.1. На фиг. 9.12 е представена простена схема на система за запалване на автомобил, като ключът се отваря в момента от времето $t = 0$.



Фиг. 9.12. Опростена схема за запалване на автомобил

Анализ: Първоначално (при $t < 0$) през бобината тече ток с големина:

$$i_L(0-) = \frac{E_0}{R}.$$

В момента от времето $t = 0$ захранването към бобината се прекъсва, но за бобината е в сила независимото начално условие:

$$i_L(0+) = i_L(0-).$$

Следователно:

- след разкъсване на веригата първоначалният ток през бобината се запазва същия.
- тъй като първоначалната верига е прекъсната, той ще протече от друго място - през свещите на автомобила.

Свещите съдържат малка въздушна междина, като при протичане на тока през нея се получава искра или дъга, която служи за запалване на горивото.

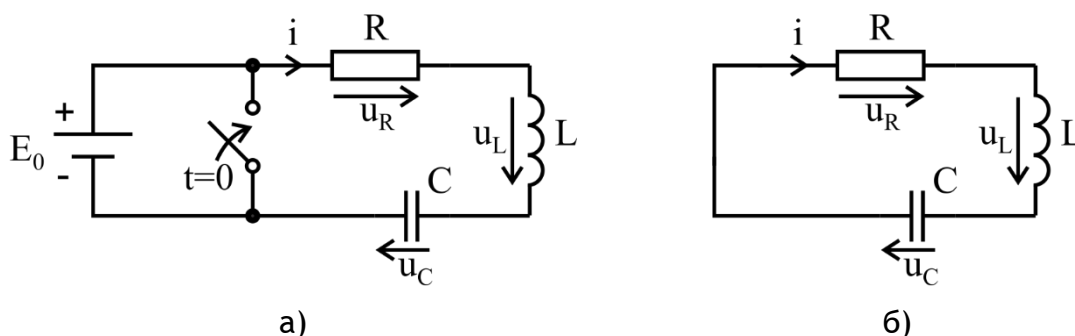
Съвременните автомобили използват малко по-различна схема с индуктивно-свързани бобини (вместо бобина) и кондензатор, но принципът на действие е аналогичен.

9.2. Преходни процеси от втори ред

Веригите от втори ред, са такива електрически вериги, които съдържат 2 елемента, способни да съхраняват енергия (бобини и/или кондензатори), като те се характеризират с диференциално уравнение от втори ред.

9.2.1. Разряд на кондензатор в последователна RLC верига

Разглежда се последователно съединение на резистор R , бобина L и кондензатор C , които първоначално са били свързани към източник E_0 (фиг. 9.13а).



Фиг. 9.13. Схема за разряд на кондензатор в последователна RLC верига (а) и еквивалентна схема след комутация (б)

Тъй като кондензаторът не пропуска постоянен ток, началните условия за веригата са:

$$\begin{aligned} i_L(0-) &= i_L(0+) = 0, A; \\ u_C(0-) &= u_C(0+) = E_0, V. \end{aligned} \quad (9.43)$$

В момента от времето $t = 0$ ключът се затваря, при което RLC веригата се дава на късо (фиг. 5.13б), т.е. за $t \geq 0$ уравнението по ВЗК е:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = 0 \rightarrow i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt + u_C(0) = 0. \quad (9.44)$$

За да се премахне интегралът, уравнение (9.44) се диференцира:

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt + u_C(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = 0. \quad (9.45)$$

От веригите от първи ред вече е известно, че преходните процеси имат експоненциален характер, т.е. може да се положи:

$$i = A \cdot e^{pt}. \quad (9.46)$$

Следователно първата и втората производна на тока са:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(A \cdot e^{pt})}{dt} = pA \cdot e^{pt}; \quad (9.47)$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2(A \cdot e^{pt})}{dt^2} = p^2 A \cdot e^{pt}. \quad (9.48)$$

Замествайки уравнения (9.46), (9.47) и (9.48) в уравнение (9.45), се получава:

$$p^2 A \cdot e^{pt} + \frac{R}{L} pA \cdot e^{pt} + \frac{1}{L \cdot C} A \cdot e^{pt} = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{L \cdot C} = 0. \quad (9.49)$$

Уравнение (9.49) се нарича *характеристично* на RLC контура и може да се представи в следния вид:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0, \quad (9.50)$$

където $\alpha = \frac{R}{2L}$ се нарича *коэффициент на затихване*, а $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ е *резонансната честота на контура*.

Характеристичното уравнение има две решения:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (9.51)$$

Двете стойности p_1 и p_2 показват, че има два тока, които отчитат влиянието на двата реактивни елемента (бобина и кондензатор).

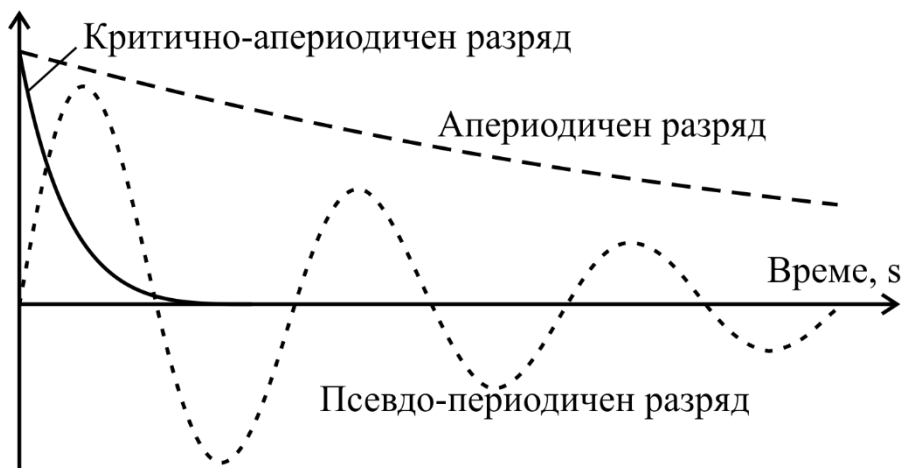
$$i_1 = A_1 \cdot e^{p_1 t}; \quad i_2 = A_2 \cdot e^{p_2 t}. \quad (9.52)$$

Като се има предвид, че се разглежда линейна електрическа верига, може да се приложи принципът на наслагването (Теоремата за суперпозицията), т.е. пълното решение за тока във веригата е:

$$i(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}. \quad (9.53)$$

В зависимост от вида на корените p_1 и p_2 са възможни три решения за преходния процес (фиг. 9.14):

1. Аperiодичен преходен процес - при $\alpha > \omega_0$;
2. Псевдопериодичен преходен процес - при $\alpha < \omega_0$;
3. Критично-аperiодичен преходен процес - при $\alpha = \omega_0$.



Фиг. 9.14. Възможни преходни процеси в последователна RLC верига

Апериодичен разряд

Ако $\alpha > \omega_0$, корените p_1 и p_2 са отрицателни и реални числа. Това условие е изпълнено, когато:

$$\alpha > \omega_0 \rightarrow \frac{R}{2 \cdot L} > \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \rightarrow R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9.54)$$

В този случай решението за преходния процес има вида, указан в уравнение (9.53) - $i(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$.

За да се определят интеграционните константи A_1 и A_2 , уравнението трябва да бъде анализирано за момента от времето $t = 0 +$. Но в случая има две неизвестни и само едно уравнение. За целта се добавя второ уравнение, което представлява първата производна на първото:

$$\begin{cases} i(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} \\ \frac{di(t)}{dt} = A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 t} \end{cases} \quad (9.55)$$

Необходимо е системата (9.55) да се анализира за момента от времето $t = 0 +$:

$$\begin{cases} i(0+) = A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 \\ \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0+} = A_1 \cdot p_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot p_2 \cdot e^0 \end{cases} \quad (9.56)$$

Стойността на производната $\frac{di(t)}{dt}$ в момента от времето $t = 0 +$ може да се определи от напрежението на бобината:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L} \rightarrow \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{u_L(0+)}{L} \quad (9.57)$$

Уравнението за фиг. 9.136 по ВЗК в момента от времето $t = 0 +$ е:

$$u_R(0+) + u_L(0+) + u_C(0+) = 0 \rightarrow i(0+) \cdot R + u_L(0+) + u_C(0+) = 0 \quad (9.58)$$

От началните условия за веригата (уравнение (9.43)), е известно:

$$\begin{aligned} u_C(0+) &= -u_C(0+) = -E_0 \text{ V}; \\ i(0+) &= i(0-) = 0 \text{ A}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Полагайки уравнение (9.59) в (9.58), за $u_L(0+)$ се получава:

$$i(0+).R + u_L(0+) + u_C(0+) = 0 \rightarrow 0 + u_L(0+) - E_0 = 0 \rightarrow u_L(0+) = E_0. \quad (9.60)$$

Следователно за производната на тока в момента от времето $t = 0+$ (уравнение (9.57)) се получава:

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{u_L(0+)}{L} = -\frac{E_0}{L}, \quad (9.61)$$

а система (9.56) добива следния вид:

$$\begin{vmatrix} 0 = A_1 + A_2 \\ -\frac{E_0}{L} = A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{E_0}{L} \end{vmatrix}. \quad (9.62)$$

За решаването ѝ е необходимо да се определят детерминантите:

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = p_2 - p_1; \\ \Delta_1 &= \text{Det} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{E_0}{L} & p_2 \end{vmatrix} = p_2 + \frac{E_0}{L}; \\ \Delta_2 &= \text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & -\frac{E_0}{L} \end{vmatrix} = -\frac{E_0}{L} - p_1, \end{aligned} \quad (9.63)$$

а за двете константи се получава:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p_2 + \frac{E_0}{L}}{p_2 - p_1}; \\ A_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-\frac{E_0}{L} - p_1}{p_2 - p_1}. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Падовете на напрежение върху елементите във веригата могат да се определят чрез тока:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= i(t).R = R.A_1.e^{p_1 t} + R.A_2.e^{p_2 t}; \\ u_L(t) &= L.\frac{di(t)}{dt} = L.A_1.p_1.e^{p_1 t} + L.A_2.p_2.e^{p_2 t}; \\ u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t)dt + u_C(0) = \frac{1}{p_1.C} A_1.e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2.C} A_2.e^{p_2 t} + E_0. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Псевдо-периодичен разряд

Ако $\alpha < \omega_0$, корените p_1 и p_2 са комплексно-спрегнати числа:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + j\omega_D; \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_D, \quad (9.66)$$

където $j = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица, а $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ е честотата на затихване. Токът във веригата отново има две съставки:

$$i(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}. \quad (9.67)$$

Замествайки корените p_1 и p_2 в уравнение (9.67), се получава:

$$i(t) = A_1 \cdot e^{(-\alpha + j\omega_D)t} + A_2 \cdot e^{(-\alpha - j\omega_D)t} = e^{-\alpha t} (A_1 \cdot e^{j\omega_D t} + A_2 \cdot e^{-j\omega_D t}). \quad (9.68)$$

Съгласно формулата на Ойлер, $e^{j\omega_D t}$ и $e^{-j\omega_D t}$ могат да се представят като:

$$\begin{aligned} e^{j\omega_D t} &= \cos(\omega_D t) + j \sin(\omega_D t); \\ e^{-j\omega_D t} &= \cos(\omega_D t) - j \sin(\omega_D t). \end{aligned} \quad (9.69)$$

Следователно законът за изменение на тока във веригата става:

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\alpha t} (A_1 \cdot e^{j\omega_D t} + A_2 \cdot e^{-j\omega_D t}) = \\ &= e^{-\alpha t} (A_1 \cos(\omega_D t) + jA_1 \sin(\omega_D t) + A_2 \cos(\omega_D t) - jA_2 \sin(\omega_D t)). \end{aligned} \quad (9.70)$$

Уравнение (9.70) може да се опрости, като се положи $B_1 = A_1 + A_2$ и $B_2 = j(A_1 - A_2)$, при което се получава:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos(\omega_D t) + B_2 \sin(\omega_D t)). \quad (9.71)$$

Полученото уравнение е решението при псевдо-периодичен разряд. Константите B_1 и B_2 могат да бъдат определени аналогично на аperiодичния разряд, като се добави второ уравнение, което е производна на първото.

$$\left| \begin{aligned} i(t) &= e^{-\alpha t} (B_1 \cos(\omega_D t) + B_2 \sin(\omega_D t)) \\ \frac{di(t)}{dt} &= -\alpha \cdot e^{-\alpha t} (B_1 \cos(\omega_D t) + B_2 \sin(\omega_D t)) + \\ &\quad + e^{-\alpha t} (-B_1 \omega_D \sin(\omega_D t) + B_2 \omega_D \cos(\omega_D t)) \end{aligned} \right. \quad (9.72)$$

То също следва да бъде анализирано при $t = 0 +$:

$$\left| \begin{aligned} i(0+) &= e^0 (B_1 \cos(0) + B_2 \sin(0)) \\ \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0+} &= -\alpha \cdot e^0 (B_1 \cos(0) + B_2 \sin(0)) + \\ &\quad + e^0 (-B_1 \omega_D \sin(0) + B_2 \omega_D \cos(0)) \end{aligned} \right. \quad (9.73)$$

След решаване на системата се получат следните решения за B_1 и B_2 :

$$B_1 = i(0+) = i(0-) = 0; \quad B_2 = \frac{E_0}{L \cdot \omega_D} = \frac{E_0}{L \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (9.74)$$

Критично-апериодичен разряд

В случай че $\alpha = \omega_0$, двата корена са реални и равни: $p_1 = p_2$. Тази ситуация се нарича *критично-апериодичен разряд*, като за нея е характерно, че преходният процес приключва възможно най-бързо. Условието за критично-апериодичен разряд е:

$$\alpha = \omega_0 \rightarrow \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \rightarrow R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9.75)$$

За да се установи решението на псевдо-периодичния преходен процес е необходимо да се пренапише диференциалното уравнение (9.45) по следния начин:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{d^2 i}{dt^2} + \alpha \frac{di}{dt} + \alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) + \alpha \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) = 0. \quad (9.76)$$

Ако в уравнение (9.76) се положи $f = \frac{di}{dt} + \alpha i$, се получава диференциално уравнение от първи ред:

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = 0, \quad (9.77)$$

чието решение е известно:

$$f = A_1 \cdot e^{-\alpha t}. \quad (9.78)$$

Известно е също така, че A_1 е константа. Замествайки $f = \frac{di}{dt} + \alpha i$ в уравнение (9.78) се получава:

$$\frac{di}{dt} + \alpha i = A_1 \cdot e^{-\alpha t} \rightarrow e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha i = A_1. \quad (9.79)$$

Последното уравнение може да се запише по следния начин:

$$e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha i = e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + i \frac{de^{\alpha t}}{dt} = \frac{d}{dt} (ie^{\alpha t}) = A_1, \quad (9.80)$$

т.е.

$$\frac{d}{dt} (ie^{\alpha t}) = A_1. \quad (9.81)$$

След интегриране на уравнение (9.81) се получава:

$$ie^{\alpha t} = A_1 \cdot t + A_2 \quad (9.82)$$

или

$$i(t) = (A_1 \cdot t + A_2) \cdot e^{-\alpha t}, \quad (9.83)$$

където A_2 също е константа.

Константите A_1 и A_2 се определят аналогично на другите две ситуации - създава се второ уравнение, което е производна на първото и системата се анализира за $t = 0 +$:

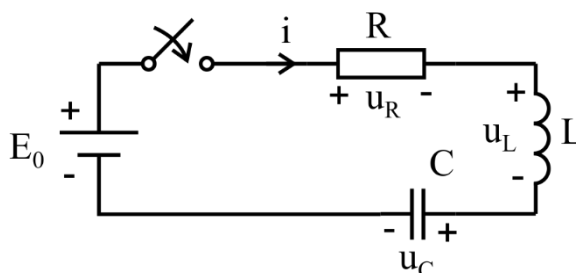
$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} i(t) &= (A_1 \cdot t + A_2) \cdot e^{-\alpha t} \\ \frac{di(t)}{dt} &= A_1 \cdot e^{-\alpha t} - (A_1 \cdot t + A_2) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t} \end{aligned} \right. \\ & \rightarrow \left| \begin{aligned} i(0+) &= (A_1 \cdot 0 + A_2) \cdot e^0 \\ \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0+} &= A_1 \cdot e^0 - (A_1 \cdot 0 + A_2) \cdot \alpha \cdot e^0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (9.84)$$

В случая може да се докаже, че решенията за A_1 и A_2 са:

$$A_2 = i(0+) = 0; \quad A_1 = \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0+} = \frac{E_0}{L}. \quad (9.85)$$

9.2.2. Включване на последователна RLC верига към източник на напрежение

Разглежда се схемата от фиг. 9.15, при която последователна RLC верига се включва към източник на напрежение E_0 .



Фиг. 9.15. Включване на последователна RLC верига към източник на напрежение

Като се има предвид, че при $t < 0$ бобината и кондензатора не са били свързани към източник, началните им зарядености могат да бъдат приети за нулеви:

$$\begin{aligned} u_C(0-) &= u_C(0+) = 0; \\ i_L(0-) &= i_L(0+) = 0. \end{aligned} \quad (9.86)$$

За $t \geq 0$ (след като ключът се затвори) може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = E_0. \quad (9.87)$$

Този път се определя $u_C(t)$, като се замества $i = C \frac{du_C}{dt}$:

$$R \cdot C \frac{du_C}{dt} + LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = E_0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E_0}{LC} \quad (9.88)$$

Решението на уравнение (9.88) има две съставки - преходната съставка $u_{\text{ПС}}(t)$ и установената съставка $u_C(\infty)$:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + u_{\text{ПС}}(t). \quad (9.89)$$

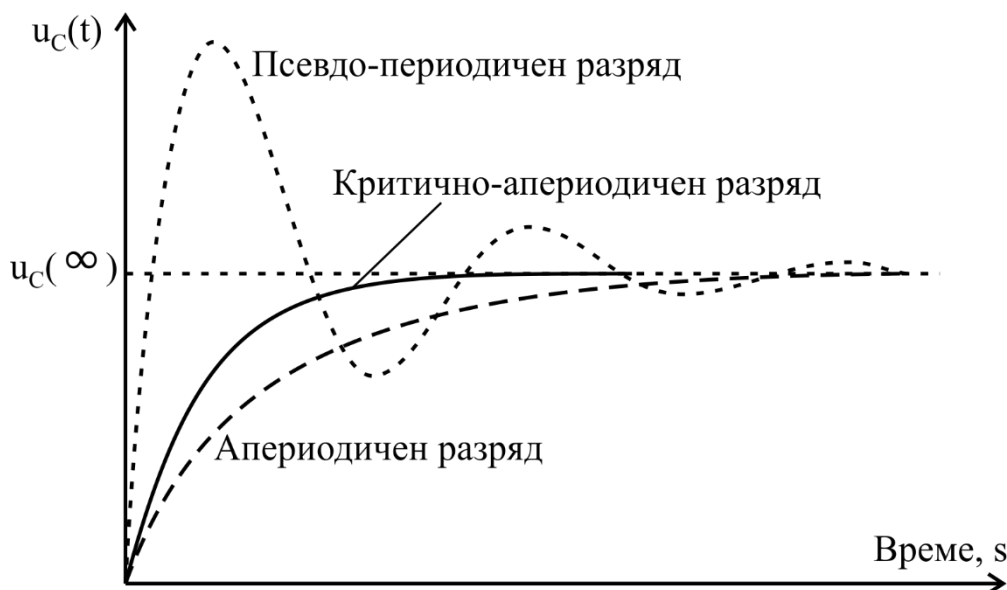
Установената съставка се определя при $t = \infty$, т.е.:

$$u_C(\infty) = E_0. \quad (9.90)$$

Обикновеното диференциално уравнение (9.88) има същото характеристично уравнение, като при „разряд на кондензатор в последователна RLC верига“:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{L \cdot C} = 0, \quad (9.91)$$

което показва, че и преходната съставка ще бъде същата. С други думи, отново съществуват три възможни реализации на преходния процес, като в случая $u_C(t)$ се стреми към новата си установена стойност $u_C(\infty) = E_0$ (фиг. 9.16):



Фиг. 9.16. Възможни преходни процеси при включване на последователна RLC верига към източник на напрежение

1. Апериодичен преходен процес:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}, \quad (9.92)$$

където $p_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

2. Псевдо-периодичен преходен процес:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + e^{-\alpha t} (B_1 \cos(\omega_D t) + B_2 \sin(\omega_D t)), \quad (9.93)$$

където $p_{12} = -\alpha \pm j\omega_D = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

3. Критично-апериодичен преходен процес:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + (A_1 \cdot t + A_2) \cdot e^{-\alpha t}, \quad (9.94)$$

където $p_1 = p_2 = \alpha$.

9.3. Анализ на преходни процеси в линейни електрически вериги

9.3.1. Класически метод за анализ на преходни процеси

Класическият метод за анализ на преходни процеси включва следните стъпки:

Стъпка 1. Чертае се схемата за $t < 0$ и се определят началните условия $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$;

Стъпка 2. Чертае се схемата за $t \geq 0$ и се записва система от уравнения по кой да е от изучените методи;

Стъпка 3. Определя се характеристичното уравнение на веригата и корените му;

Стъпка 4. Решава се системата от стъпка 2 за момента от времето $t = \infty$ и се определят новите установени стойности;

Стъпка 5. Решава се уравнението на преходния процес за момента от времето $t = 0+$ и ако е нужно предварително се решава системата от стъпка 2 за $t = 0+$.

Стъпка 3 може да се изпълни по няколко начина:

Първи начин: Създава се операторна заместваща схема на веригата за $t \geq 0$, като се замени:

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \frac{1}{pC}; \\ L &\rightarrow pL. \end{aligned} \quad (9.95)$$

След това схемата се пасивира (източниците на напрежение се заместват с късо съединение, а източниците на ток - с прекъсната верига) и се прекъсва на кое да е място, като се търси входното ѝ съпротивление $Z(p)$. Характеристичното уравнение се определя от:

$$Z(p) = 0. \quad (9.96)$$

Забележка: Операторът на Лаплас p и операторната заместваща схема ще бъдат представени по-подробно в раздел 9.3.2.

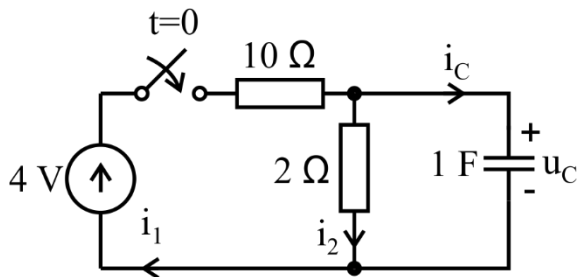
Втори начин: В системата от стъпка 2 се замества:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &\rightarrow p \cdot i; \\ \int i dt &\rightarrow \frac{1}{p} i. \end{aligned} \quad (9.97)$$

В новополучената система се определя детерминантата на матрицата с коефициентите и се приравнява на 0:

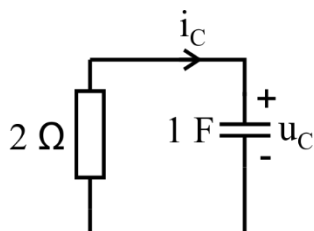
$$\Delta = 0. \quad (9.98)$$

Пример 9.2. За схемата от фиг. 9.17 да се определят токът i_C и напрежението u_C на кондензатора.



Фиг. 9.17. Схема към пример 9.2

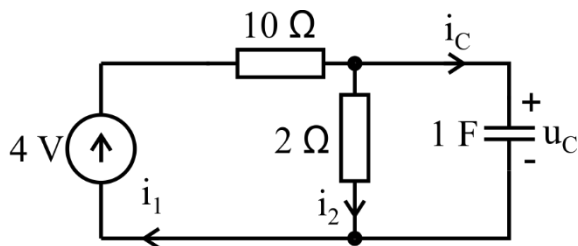
Стъпка 1. Чертае се схемата за $t < 0$, за да се определи $u_C(0-)$. Вижда се, че кондензаторът не е свързан към източник и следователно $u_C(0-) = 0V$.



Фиг. 9.18. Еквивалентна схема към пример 9.2 за $t < 0$

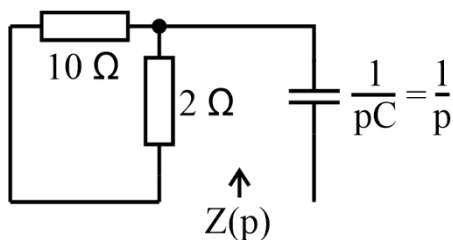
Стъпка 2. Чертае се схемата за $t \geq 0$ и се записва система от уравнения по някой от методите (в случая по метода със законите на Кирхоф):

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_C \\ 4 = 10i_1 + 2i_2 \\ u_C - 2i_2 = 0 \end{cases}$$



Фиг. 9.19. Еквивалентна схема към пример 9.2 за $t \geq 0$

Стъпка 3. За да се намери характеристичното уравнение се създава пасивна операторна заместваща схема, която се прекъсва на произволно място.



Фиг. 9.20. Операторна заместваща схема към пример 9.2 за определяне на характеристичното уравнение

Входното съпротивление $Z(p)$ е:

$$Z(p) = \frac{10.2}{10 + 2} + \frac{1}{p} = 0 \quad \rightarrow \quad p = -\frac{12}{20} = -0,6 \text{ s}^{-1}.$$

Следователно напрежението на кондензатора се изменя съгласно:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A \cdot e^{-0,6t}.$$

Стъпка 4. Решава се системата от стъпка (2) за $t = \infty$, когато режимът е установен, т.е. когато през кондензатора не тече ток: $i_C(\infty) = 0 \text{ A}$

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_C \\ 4 = 10i_1 + 2i_2 \\ u_C - 2i_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} i_1(\infty) = i_2(\infty) + 0 \\ 4 = 10i_1(\infty) + 2i_2(\infty) \\ u_C(\infty) - 2i_2(\infty) = 0 \end{cases}.$$

Замества се първото уравнение във второто:

$$\begin{cases} 4 = 10i_2(\infty) + 2i_2(\infty) \\ u_C(\infty) - 2i_2(\infty) = 0 \end{cases}.$$

Получава се $i_2(\infty) = \frac{4}{12} \text{ A}$, откъдето за $u_C(\infty)$ се получава:

$$u_C(\infty) = 2 \frac{4}{12} = \frac{2}{3} = 0,667 \text{ V}.$$

Стъпка 5. За да се определи константата A е необходимо задачата да се реши за момента от времето $t = 0 +$. Известно е, че $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$, т.е.:

$$u_C(t) = 0,667 + A e^{-0,6t} \quad \rightarrow \quad u_C(0+) = 0 = 0,667 + A \cdot e^0 \quad \rightarrow \quad A = -0,667 \text{ V}.$$

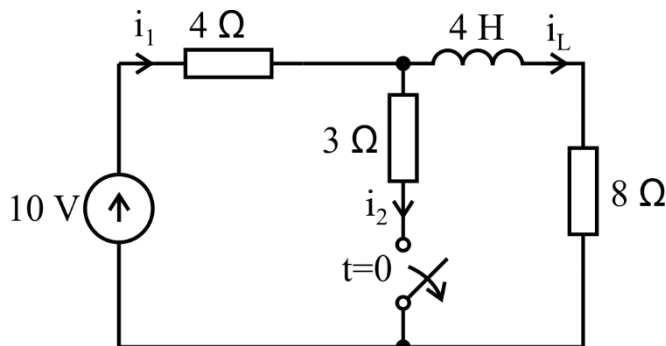
Следователно пълното решение за преходния процес на напрежението u_C е:

$$u_C(t) = 0,667 - 0,667 \cdot e^{-0,6t} \text{ V}.$$

За тока на кондензатора се получава:

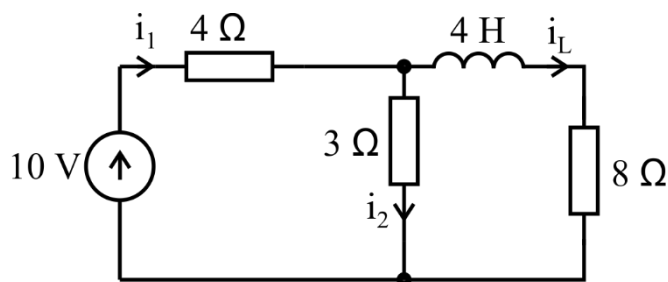
$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 0,4002 \cdot e^{-0,6t} \text{ A}.$$

Пример 9.3. За схемата от фиг. 9.21 да се определят токът i_L и напрежението u_L на бобината.



Фиг. 9.21. Схема към пример 9.3

Стъпка 1. Чертае се схемата за $t < 0$ за да се определи $i_L(0-)$:



Фиг. 9.22. Еквивалентна заместваща схема към пример 9.3 за $t < 0$

Записва се система от уравнения за токовете във веригата:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_L \\ 10 = 4i_1 + 3i_2 \\ 8i_L - 3i_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix}$$

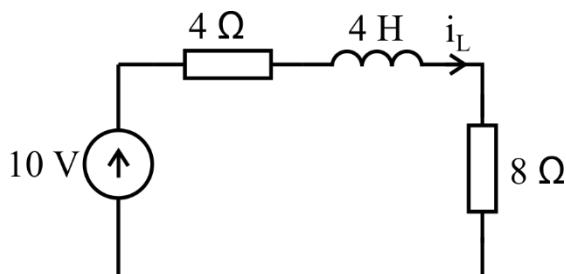
В случая интерес представлява единствено токът през бобината:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 12 - 32 = -68;$$

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow i_L(0-) = \frac{-30}{-68} = 0,44 \text{ A.}$$

Стъпка 2. Чертае се схемата за $t \geq 0$ и се записва система от уравнения (от 1 уравнение) по някой от методите:

$$|u_L(t) + 4i_L(t) + 8i_L(t) = 10$$



Фиг. 9.23. Еквивалентна заместваща схема към пример 9.3 за $t \geq 0$

Стъпка 3. Намира се характеристичното уравнение, като за целта в системата се замества $\frac{di_L}{dt} \rightarrow pi_L$.

$$\left| L \frac{di_L}{dt} + 12i_L = 10 \rightarrow |4pi_L + 12i_L = 10.$$

Детерминантата на матрицата на коефициентите (в случая е единична матрица) се приравнява на 0:

$$\Delta |12 + 4p| = 0 \rightarrow 12 + 4p = 0 \rightarrow p = -\frac{12}{4} = -3 \text{ s}^{-1}.$$

Следователно решението за тока на бобината има следната форма:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + Ae^{-3t}.$$

Стъпка 4. Решава се системата за момента от времето $t = \infty$. Режимът е установен, т.е. върху бобината няма пад - $u_L(\infty) = 0 V$:

$$u_L(\infty) + 12i_L(\infty) = 10 \rightarrow 0 + 12i_L(\infty) = 10 \rightarrow i_L(\infty) = 0,83 A.$$

Стъпка 5. Решава се задачата за $t = 0 +$ за да се определи константата A , като се използва началното условие $i_L(0+) = i_L(0-) = 0,44 A$:

$$i_L(0+) = 0,44 = 0,83 + Ae^0 \rightarrow A = -0,39 A.$$

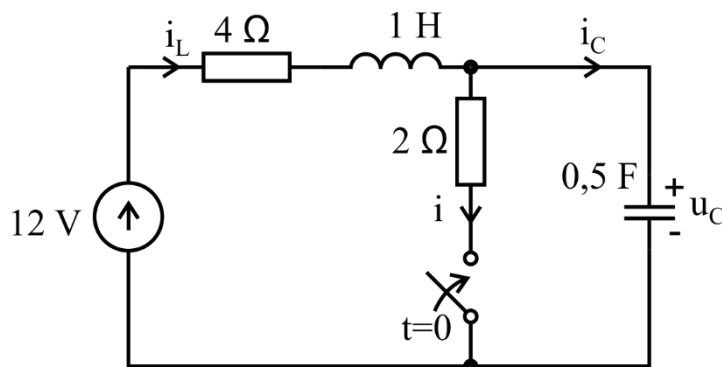
Следователно пълното решение за тока на бобината е:

$$i_L(t) = 0,83 - 0,39e^{-3t} A,$$

а за пада на напрежение върху бобината се получава:

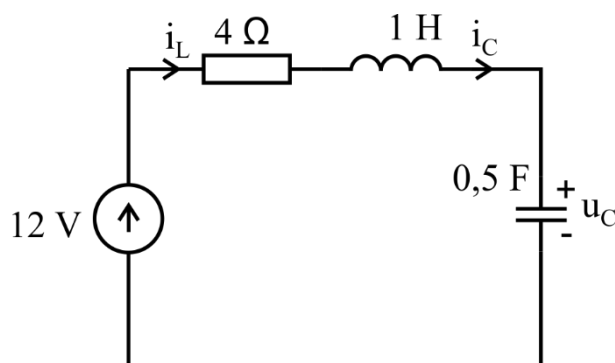
$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 4,0,39 \cdot 0,5 \cdot e^{-3t} = 0,78e^{-3t} V.$$

Пример 9.4. За схемата от фиг. 9.24 да се определи напрежението на кондензатора $u_C(t)$.



Фиг. 9.24. Схема към пример 9.4

Стъпка 1. Чертае се схемата за $t < 0$ (фиг. 9.25) и се определят началните условия.



Фиг. 9.25. Еквивалентна заместваща схема към пример 9.4 за $t < 0$

През кондензатора не тече постоянен ток, така че:

$$i_L(0-) = i_C(0-) = 0 A.$$

От ВЗК може да се определи $u_C(0-)$:

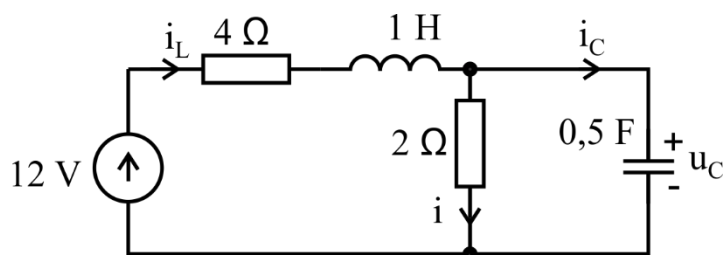
$$12 = i_L(t) \cdot R + u_L(t) + u_C(t).$$

Тъй като $i_L(0^-) = 0$ и $u_C(0^-) = 0$ се получава:

$$12 = 0 \cdot R + 0 + u_C(0^-) \rightarrow u_C(0^-) = 12 \text{ V.}$$

Стъпка 2. Чертае се схемата за $t \geq 0$ (фиг. 9.26) и се записва системата уравнения по метода със законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} i_L(t) = i_C(t) + i(t) \\ 12 = 4i_L(t) + u_L(t) + 2i(t). \\ u_C(t) - 2i(t) = 0 \end{cases}$$



Фиг. 9.26. Еквивалентна заместваща схема към пример 9.4 за $t \geq 0$

Стъпка 3. Определя се характеристикното уравнение, като в системата от стъпка 2 се замести $\int i dt \rightarrow \frac{1}{p} i$ и $\frac{di}{dt} \rightarrow p \cdot i$.

$$\begin{cases} i_L = i_C + i \\ 12 = 4i_L + L \frac{di_L}{dt} + 2i \\ \frac{1}{C} \int i_C dt - 2i = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_C + i - i_L = 0 \\ 4i_L + pi_L + 2i = 12 \\ \frac{2}{p} i_C - 2i = 0 \end{cases}$$

Определя се матрицата на коефициентите и детерминантата ѝ се приравнява на нула:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4+p & 0 & 2 \\ 0 & \frac{2}{p} & -2 \end{vmatrix} = (4+p) \frac{2}{p} + \frac{4}{p} + 2(4+p) = 0 \rightarrow$$

$$4 + p + 2 + 4p + p^2 = 0 \rightarrow p^2 + 5p + 6 = 0 \rightarrow$$

$$p_1 = -2 \text{ s}^{-1}, \quad p_2 = -3 \text{ s}^{-1}.$$

Корените са реални и следователно решението има следния вид:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_1 \cdot e^{-2t} + A_2 \cdot e^{-3t}.$$

Стъпка 4. Решава се системата от стъпка 2 за $t = \infty$, знаейки че режимът е установен, т.е. $i_C(\infty) = 0 \text{ A}$ и $u_L(\infty) = 0 \text{ V}$:

$$\begin{cases} i_L(t) = i_C(t) + i(t) \\ 12 = 4i_L(t) + u_L(t) + 2i(t) \\ u_C(t) - 2i(t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_L(\infty) = 0 + i(\infty) \\ 12 = 4i_L(\infty) + 0 + 2i(\infty). \\ u_C(\infty) - 2i(\infty) = 0 \end{cases}$$

Решенията на системата са:

$$i_L(\infty) = i(\infty) = \frac{12}{6} = 2 \text{ A};$$

$$u_C(\infty) = 2i(\infty) = 4 \text{ V.}$$

Стъпка 5. В решението на преходния процес за $u_C(t)$ има две неизвестни, поради което се добавя второ уравнение, което е производната на първото.

$$\begin{cases} u_C(t) = 4 + A_1 \cdot e^{-2t} + A_2 \cdot e^{-3t} \\ \frac{du_C(t)}{dt} = -2A_1 \cdot e^{-2t} - 3A_2 \cdot e^{-3t} \end{cases}$$

За да се реши системата за момента от времето $t = 0 +$ следва да се определи производната $\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0+}$, което може да стане от уравнението по ПЗК:

$$i_L(0+) = i(0+) + i_C(0+).$$

Тъй като резисторът и кондензаторът са свързани паралелно (т.е. напрежението им е едно и също и равно на $u_C(0+)$), токът през резистора и токът през кондензатора са съответно:

$$i(0+) = \frac{u_C(0+)}{2};$$

$$i_C(0+) = \frac{1}{2} \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0+}$$

Тогава уравнението по ПЗК става:

$$\begin{aligned} i_L(0+) = i(0+) + i_C(0+) &= \frac{u_C(0+)}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0+} \\ \rightarrow 0 = \frac{12}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0+} &\rightarrow \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0+} = -12 \frac{\text{V}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Сега вече системата може да се реши за момента от времето $t = 0 +$:

$$\begin{cases} u_C(0+) = 4 + A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0 \\ \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0+} = -2 \cdot A_1 \cdot e^0 - 3 \cdot A_2 \cdot e^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12 = 4 + A_1 + A_2 \\ -12 = -2 \cdot A_1 - 3 \cdot A_2 \end{cases}$$

Решенията са:

$$A_1 = 12 \text{ V} \quad A_2 = -4 \text{ V.}$$

Следователно пълното решение за $u_C(t)$ е:

$$u_C(t) = 4 + 12 \cdot e^{-2t} - 4 \cdot e^{-3t} \text{ V.}$$

9.3.2. Операторен метод за анализ на преходни процеси

Преобразоване на Лаплас

Преобразованието на Лаплас представлява преобразуване на функцията $f(t)$ от функция на времето във функция на комплексната честота $F(p)$:

$$f(t) \rightarrow F(p) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (9.99)$$

където p е комплексният оператор (оператор на Лаплас):

$$p = \tau + j\omega. \quad (9.100)$$

За да се премине обратно от комплексната област във времевата област, се използва обратното преобразование на Лаплас. Нека $F(p)$ има следния вид:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}, \quad (9.101)$$

където числителят $N(p)$ и знаменателят $D(p)$ са полиноми. Корените на уравнението $D(p) = 0$ са решенията на $F(p)$, като има три възможни решения:

- Реални корени;
- Кратни корени;
- Комплексни корени.

Реални корени

Ако $F(p)$ има само реални корени, $D(p)$ представлява следното произведение:

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)}. \quad (9.102)$$

Горното уравнение може да се разложи на:

$$F(p) = \frac{k_1}{(p + p_1)} + \frac{k_2}{(p + p_2)} + \dots + \frac{k_n}{(p + p_n)}, \quad (9.103)$$

където коефициентите k_i се определят съгласно:

$$k_i = (p + p_i) \cdot F(p) \Big|_{p = -p_i}. \quad (9.104)$$

Когато всички коефициент k_i -са известни, обратното преобразование на Лаплас може да се запише като:

$$f(t) = (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t}). \quad (9.105)$$

Комплексни корени

Разглежда се ситуацията, при която има една двойка комплексно-спрегнати корени, а $F(p)$ е:

$$F(p) = \frac{A_1 \cdot p + A_2}{p^2 + \alpha p + b} + F_1(p), \quad (9.106)$$

където $F_1(p)$ е останалата част от $F(p)$, която няма за решение двойката корени. Ако знаменателят се представи като:

$$p^2 + \alpha p + b = p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2 = (p + \alpha)^2 + \beta^2, \quad (9.107)$$

а числителя като:

$$A_1 \cdot p + A_2 = A_1(p + \alpha) + B_1\beta, \quad (9.108)$$

$F(p)$ става:

$$F(p) = \frac{A_1(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B_1\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + F_1(p). \quad (9.109)$$

Следователно за обратното преобразование се получава:

$$f(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + B_1 e^{-\alpha t} \sin \beta t + f_1(t). \quad (9.110)$$

Кратни корени

Ако $F(p)$ има n повтарящи се решения при $p = p_1$ тогава $F(p)$ може да се представи като:

$$F(p) = \frac{k_1}{(p + p_1)^1} + \frac{k_2}{(p + p_1)^2} + \dots + \frac{k_n}{(p + p_1)^n} + F_1(p), \quad (9.111)$$

където $F_1(p)$ е останалата част от $F(p)$, която няма за решение $p = p_1$. Константите $k_n \dots k_1$ могат да се определят съгласно:

$$\begin{aligned} k_n &= (p + p_1)^n \cdot F(p) \Big|_{p = -p_1}; \\ k_{n-1} &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dp} [(p + p_1)^n \cdot F(p)] \Big|_{p = -p_1}; \\ k_{n-m} &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dp^m} [(p + p_1)^n \cdot F(p)] \Big|_{p = -p_1}. \end{aligned} \quad (9.112)$$

За обратното преобразование на Лаплас се получава:

$$f(t) = k_1 e^{-p_1 t} + \frac{k_2}{1!} t e^{-p_1 t} + \dots + \frac{k_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-p_1 t}. \quad (9.113)$$

Някои от преобразуванията са представени в табличен вид в табл. 9.5.

Таблица 9.5. Някои примери за обратното преобразование на Лаплас.

$f(t)$		$F(p)$
$A = const$		$\frac{A}{p}$
$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$		$\frac{p \cdot \sin \varphi + \omega \cdot \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$

$f(t)$	$F(p)$
t	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$t \cdot e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$

Операторна заместваща схема

Основните елементи могат да бъдат представени в операторна заместваща схема, както е посочено в табл. 5.6.

Таблица 9.6. Създаване на операторна заместваща схема.

	Оригинал	Операторна заместваща схема
Резистор	$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R}$	$I_R(p) = \frac{U_R(p)}{R}$
Бобина	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$U_L(p) = pL \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0)$
	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0)$	$I_L(p) = \frac{U_L(p)}{p \cdot L} + \frac{i_L(0)}{p}$

	Оригинал	Операторна заместваща схема
Кондензатор	$i_c = C \frac{du_c}{dt}$	$I_c(p) = pC \cdot U_c(p) - C \cdot u_c(0)$
	$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt + u_c(0)$	$U_c(p) = \frac{I_c(p)}{p \cdot C} + \frac{u_c(0)}{p}$
DC източник		

Операторен метод

Целта на операторния метод за анализ на преходни процеси е да се избегнат операциите диференциране и интегриране, като се заменят съответно с операциите деление и умножение. Методът включва следните стъпки:

Стъпка 1. Начертава се схемата за $t < 0$ и се определят началните условия $i_L(0^-)$ и $u_C(0^-)$;

Стъпка 2. Създава се операторна заместваща схема за $t \geq 0$ и се съставя система от уравнения по кой да е от изучените методи;

Стъпка 3. Изразява се търсената величина (ток или напрежение) като отношение на два полинома:

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}. \tag{9.114}$$

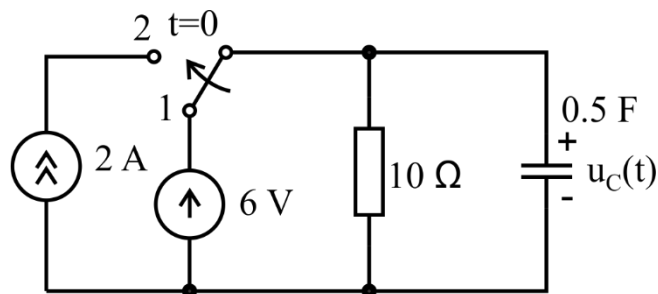
Стъпка 4. Определят се корените на характеристичното уравнение чрез решаване на уравнението:

$$D(p) = 0. \quad (9.115)$$

Стъпка 5. Извършва се обратното преобразование на Лаплас върху $X(p)$, за да се определи оригиналът $x(t)$:

$$x(t) = L^{-1}(X(p)). \quad (9.116)$$

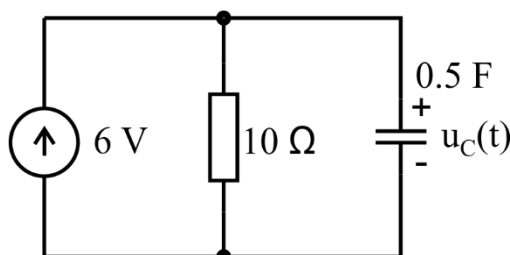
Пример 9.5. За схемата от фиг. 9.27 да се определи напрежението $u_C(t)$ за $t \geq 0$, ако ключът се превключва от позиция 1 към 2 в момента от времето $t = 0$.



Фиг. 9.27. Схема към пример 9.5

Стъпка 1. Чертае се схемата за $t < 0$. Вижда се, че трите елемента са свързани паралелно, т.е. имат едно и също напрежение:

$$u_C(0-) = 6 \text{ V}.$$

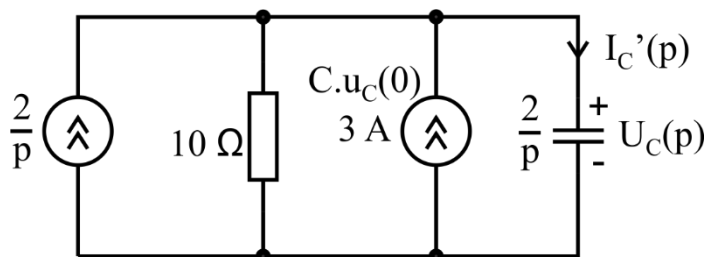


Фиг. 9.28. Еквивалентна схема към пример 9.5 при $t < 0$

Стъпка 2. Създава се операторна заместваща схема за $t \geq 0$. В случая е удобно кондензаторът да се замени с паралелно свързани кондензатор и източник на ток, с големина съответно:

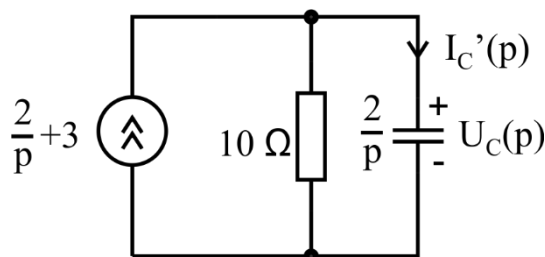
$$\frac{1}{pC} = \frac{1}{p \cdot 0,5} = \frac{2}{p} \quad \text{и} \quad C \cdot u_C(0) = 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ A},$$

а източникът на ток 2 A се заменя с източник с големина $\frac{2}{p}$:



Фиг. 9.29. Операторна заместваща схема към пример 9.5 при $t \geq 0$

В случая двата източника на ток са свързани паралелно и съпосочно, т.е. могат да бъдат заменени с еквивалентен източник, с големина $\frac{2}{p} + 3$.



Фиг. 9.30. Еквивалентна операторна заместваща схема към пример 9.5

Стъпка 3. Схемата представлява делител на ток, т.е. токът през кондензатора е:

$$I_C'(p) = \left(\frac{2}{p} + 3\right) \cdot \frac{10}{10 + \frac{2}{p}}$$

Тогава съгласно Закона на Ом напрежението на кондензатора $U_C(p)$ е:

$$U_C(p) = I_C'(p) \cdot \frac{2}{p} = \frac{2 + 3p}{p} \cdot \frac{10}{5p + 1} = \frac{4 + 6p}{p(p + 0,2)}$$

Стъпка 4. Определят се корените на характеристичното уравнение:

$$p(p + 0,2) = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = 0 \quad \text{и} \quad p_2 = -0,2.$$

Стъпка 5. Напрежението $U_C(p)$ се преобразува до:

$$U_C(p) = \frac{4 + 6p}{p(p + 0,2)} = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p + 0,2} = \frac{20}{p} - \frac{14}{p + 0,2}$$

където коефициентите k_1 и k_2 се определят съгласно:

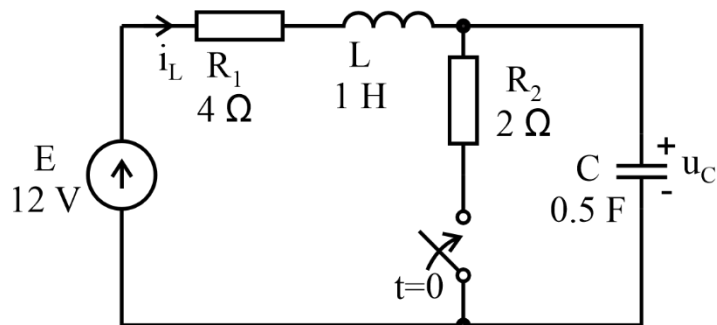
$$k_1(p = 0) = p \cdot \frac{4 + 6p}{p(p + 0,2)} = \frac{4 + 6p}{(p + 0,2)} = \frac{4}{0,2} = 20;$$

$$k_2(p = -0,2) = (p + 0,2) \cdot \frac{4 + 6p}{p(p + 0,2)} = \frac{4 + 6p}{p} = \frac{4 - 6 \cdot 0,2}{-0,2} = -14.$$

Следователно напрежението $u_C(t)$ на кондензатора е:

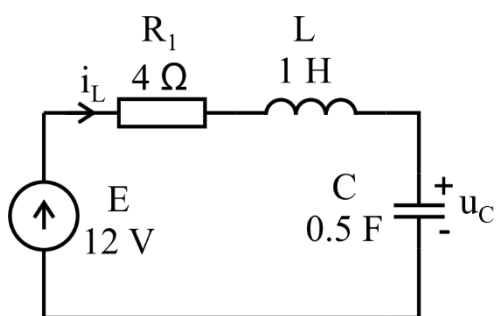
$$u_C(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} = 20 \cdot e^0 - 14 \cdot e^{-0,2 \cdot t} = 20 - 14 e^{-0,2 \cdot t} \text{ V.}$$

Пример 9.6. За схемата от фиг. 9.31 да се определи изменението на $u_C(t)$ за $t \geq 0$, ако ключът се затваря в момента от времето $t = 0$.



Фиг. 9.31. Схема към пример 9.6

Стъпка 1. Чертае се схемата за $t < 0$.



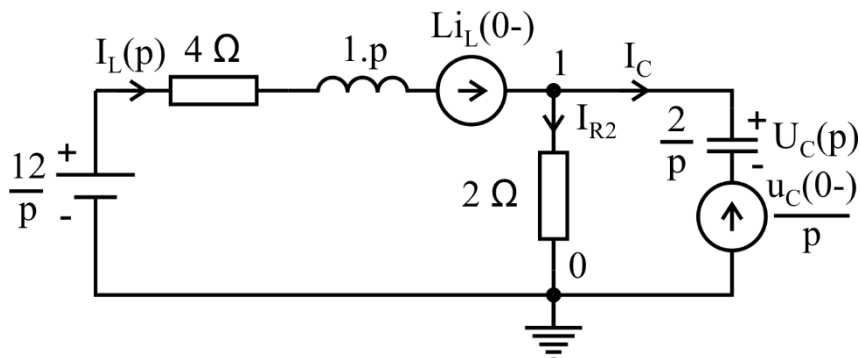
Фиг. 9.32. Еквивалентна схема към пример 9.6 при $t < 0$

Тъй като през кондензатора не тече постоянен ток, началните условия са:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0 \text{ A};$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = E = 12 \text{ V}.$$

Стъпка 2. Чертае се операторна заместваща схема за $t \geq 0$:



Фиг. 9.33. Операторна заместваща схема към пример 9.6 при $t \geq 0$

Големините на добавъчните източници са:

$$L \cdot i_L(0-) = 1.0 = 0 \text{ V};$$

$$\frac{u_C(0-)}{p} = \frac{12}{p} \text{ V}.$$

Схемата има 2 възела, т.е. удобно е да се реши по метода с възловите потенциали. Уравнението по ПЗК е:

$$I_L(p) = I_{R2}(p) + I_C(p).$$

Изразяват се трите тока по Закона на Ом, чрез потенциала $U_1(p)$ и се заместват в уравнението по ПЗК:

$$\frac{\frac{12}{p} + Li_L(0-) - U_1(p)}{4 + 1 \cdot p} = \frac{U_1(p)}{2} + \frac{U_1(p) - \frac{12}{p}}{\frac{2}{p}}.$$

Стъпка 3. Изразява се възловият потенциал от горното уравнение:

$$U_1(p) = \frac{24 + 48p + 12p^2}{(p^2 + 5p + 6)p}.$$

Стъпка 4. Определят се корените на характеристичното уравнение:

$$(p^2 + 5p + 6)p = 0 \rightarrow$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 - 24}}{2} = -2, \quad p_2 = \frac{-5 + \sqrt{25 - 24}}{2} = -3.$$

Стъпка 5. Възловият потенциал се изразява като:

$$U_1(p) = \frac{24 + 48p + 12p^2}{p(p+2)(p+3)} = \frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p+3} = \frac{4}{p} + \frac{12}{p+2} - \frac{4}{p+3},$$

където коефициентите k_0 , k_1 и k_2 се определят съгласно:

$$k_0(p=0) = p \cdot \frac{24 + 48p + 12p^2}{p(p+2)(p+3)} = \frac{24 + 48p + 12p^2}{(p+2)(p+3)} = 4;$$

$$k_1(p=-2) = (p+2) \cdot \frac{24 + 48p + 12p^2}{p(p+2)(p+3)} = \frac{24 + 48p + 12p^2}{p \cdot (p+3)} = 12;$$

$$k_2(p=-3) = (p+3) \cdot \frac{24 + 48p + 12p^2}{p(p+2)(p+3)} = \frac{24 + 48p + 12p^2}{p \cdot (p+2)} = -4.$$

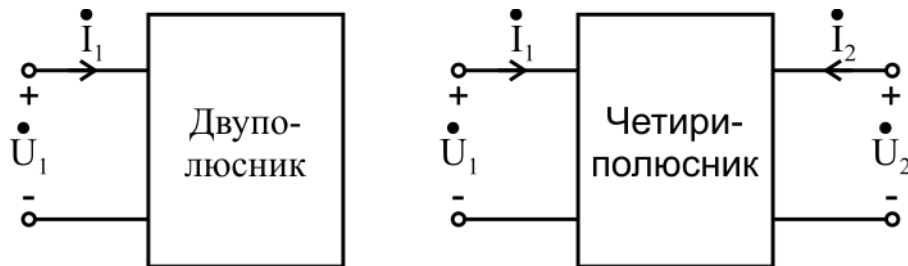
В случая потенциалът $u_1(t)$ и напрежението $u_C(t)$ са една и съща величина, т.е. напрежението на кондензатора се определя чрез обратното преобразование на Лаплас:

$$u_C(t) = u_1(t) = 4 + 12 \cdot e^{-2t} - 4 \cdot e^{-3t} \text{ V.}$$

Тема 10. Четириполюсници

10.1. Първични параметри на четириполюсниците

Двойка изводи (полюси) на дадена електрическа верига могат да бъдат нейн вход или изход. Когато дадена електрическа верига има само 1 вход/изход, тя се нарича *двуполусник*, а когато има два - *четириполюсник* (фиг. 10.1). Разглежданите до тук елементи (резистори, бобини, кондензатори и източници), са двуполусници, но в общия случай една електрическа верига може да има n на брой входове/изходи.



Фиг. 10.1. Принципно представяне на двуполусник и четириполюсник

Разглежда се по-подробно един четириполюсник. Той може да се дефинира условно като електрическа верига с 1 вход и 1 изход. Разглеждайки дадена електрическа верига като четириполюсник позволява тя да бъде третирана като „черна кутия“, която е част от някаква по-сложна верига. Теорията на четириполюсниците намира голямо приложение в комуникационните системи, енергийните системи, електрониката, проектирането на филтри и др.

Четириполюсникът се характеризира с 4 основни величини, наречани *първични параметри*. Това са неговите входни и изходни токове и напрежения \dot{U}_1 , \dot{I}_1 , \dot{U}_2 и \dot{I}_2 . Нека даден четириполюсник е захранен с източник \dot{U}_1 , и натоварен с товар Z_T (фиг. 10.2).



Фиг. 10.2. Четириполюсник, като част от по-сложна верига

Това позволява да се дефинират следните негови предавателни параметри и съпротивления:

- Входно съпротивление:

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} [\Omega]. \quad (10.1)$$

- Изходно съпротивление:

$$Z_{\text{ИЗХ}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} [\Omega]. \quad (10.2)$$

- Коефициент на предаване по ток

$$k_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}. \quad (10.3)$$

- Коефициент на предаване по напрежение:

$$k_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}. \quad (10.4)$$

Изходното съпротивление също така може да се разглежда като съпротивление на еквивалентния генератор (Теорема на Тевенен), гледано от към товара.

Съществуват няколко класификации на четириполюсниците.

Според структурата си, четириполюсниците могат да се класифицират като:

- **Пасивни** - не съдържат източници на ток/е.д.н. или ако съдържат, те взаимно се компенсират - например филтър, трансформатор, атенюатор и т.н.;
- **Активни** - съдържат източници на ток/е.д.н. - например транзисторен усилвател, инвертиращ операционен усилвател и т.н.

Според това дали входът и изходът са равнопоставени, четириполюсниците биват:

- **Симетрични** - входът и изходът са взаимнозаменяеми.
- **Несиметрични** - входът и изходът не са взаимнозаменяеми.

Според това дали имат равни взаимни съпротивления/проводимости (ще бъде обяснено малко по-късно), четириполюсниците биват:

- **Взаимни** - четириполюсникът се характеризира с три независими параметъра и съдържа единствено резистори, бобини и кондензатори.
- **Невзаимни** - четириполюсникът се характеризира с четири независими параметъра и освен пасивни елементи може да съдържа и източници.

10.2. Параметри и еквивалентни заместващи схеми на четириполюсници

Между първичните параметри на четириполюсниците съществува функционална зависимост:

$$f(\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2) = 0. \quad (10.5)$$

Връзката между \dot{U}_1 , \dot{I}_1 , \dot{U}_2 и \dot{I}_2 на всеки линеен четириполюсник може да се даде чрез системи от уравнения, като се използват така наречените Z , Y , H , G , A и B параметри.

10.2.1. Z параметри (параметри на съпротивлението)

Нека четириполюсник се захранва от два източника на ток \dot{I}_1 и \dot{I}_2 :



Тъй като четириполюсникът е линеен, може да се приложи принципът на наслагването (Теоремата за суперпозицията), за да се определят напреженията \dot{U}_1 и \dot{U}_2 като сума от въздействията на двата източника:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.6)$$

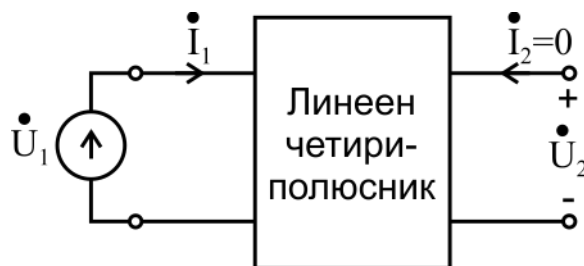
Системата може да се запише в матричен вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (10.7)$$

където матрицата $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ съдържа Z -параметрите, измервани в $[\Omega]$. Ако $Z_{11} = Z_{22}$, четириполюсникът е симетричен, а при $Z_{12} = Z_{21}$ - четириполюсникът е взаимен.

Определяне на Z -параметрите

Z -параметрите могат да бъдат определени по долуописания начин. Първо се приема, че четириполюсникът е захранен от източник на напрежение \dot{U}_1 , а изходът му е отворен (на празен ход), както е показано на фиг. 10.3.



Фиг. 10.3. Четириполюсник при п.х. на изхода

Това означава, че изходния ток е $\dot{I}_2 = 0$, при което системата с уравнения добива следния вид:

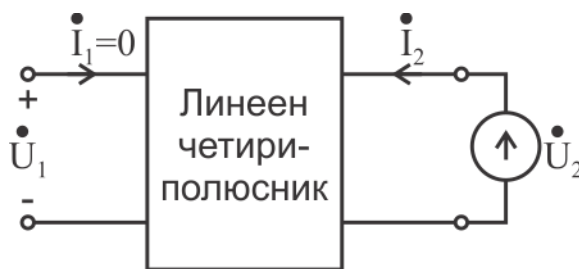
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12} \cdot 0 = Z_{11}\dot{I}_1 + 0 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22} \cdot 0 = Z_{21}\dot{I}_1 + 0 \end{cases} \quad (10.8)$$

От уравнение (10.8) може да се определят Z_{11} и Z_{21} :

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2 = 0} \quad Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2 = 0} \quad (10.9)$$

За да се определят другите два параметъра се разглежда схемата от фиг. 10.4. При нея четириполюсният е захранен от към изхода си, а входът му е в режим на празен ход. Тъй като $\dot{I}_1 = 0$, системата добива следния вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = Z_{11} \cdot 0 + Z_{12}\dot{I}_2 = 0 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = Z_{21} \cdot 0 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.10)$$



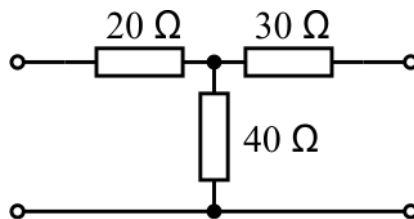
Фиг. 10.4. Четириполюсник при п.х. на входа

Следователно Z_{12} и Z_{22} са:

$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1 = 0} \quad Z_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1 = 0} \quad (10.11)$$

Посочената последователност от действия представлява методика за определяне на Z параметрите на четириполюсник.

Пример 10.1. За схемата от фиг. 10.5 да се определят Z параметрите на четириполюсника.

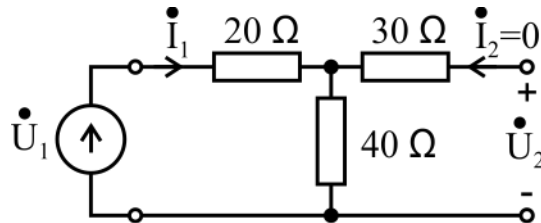


Фиг. 10.5. Схема към пример 10.1

Решение: Системата със Z параметрите има следния вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Системата се анализира за две ситуации: при $\dot{I}_2 = 0$ и при $\dot{I}_1 = 0$. Първо се свързва източник на напрежение \dot{U}_1 към входа на веригата, а изходът е на п.х. (фиг. 10.6).



Фиг. 10.6. Схема към пример 10.1 при п.х. на изхода

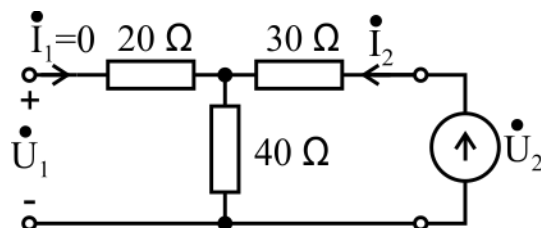
Първото и второто уравнения добиват следния вид:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{20 + 40}} = 60 \Omega;$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{40\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 40 \Omega.$$

Забележка: За удобство на \dot{U}_1 може да се даде някаква конкретна стойност (например $\dot{U}_1 = 1 V$).

За да се определят другите два параметъра се свързва източник \dot{U}_2 към изхода на веригата, а входът е отворен (фиг. 10.7).



Фиг. 10.7. Схема към пример 10.1 при п.х. на входа

Уравненията от системата със Z параметрите стават:

$$\dot{U}_1 = Z_{12}\dot{I}_2 \rightarrow Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{40\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = 40 \Omega;$$

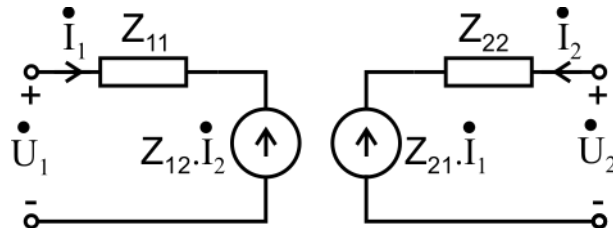
$$\dot{U}_2 = Z_{22}\dot{I}_2 \rightarrow Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2}{\frac{\dot{U}_2}{30 + 40}} = 70 \Omega.$$

Следователно Z параметрите на четириполюсника са:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 60 \Omega & 40 \Omega \\ 40 \Omega & 70 \Omega \end{vmatrix}.$$

Заместваща схема със Z - параметри

Разглежда се схемата от фиг. 10.8.



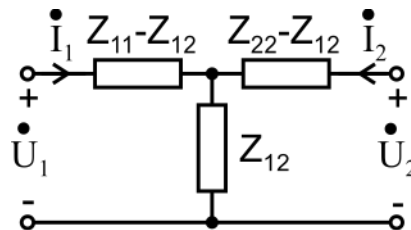
Фиг. 10.8. Еквивалентна заместваща схема със Z параметри

За нея могат да се запишат две уравнения по ВЗК:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 - Z_{12} \cdot \dot{I}_2 &= Z_{11} \cdot \dot{I}_1 \rightarrow \dot{U}_1 = Z_{11} \cdot \dot{I}_1 + Z_{12} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 - Z_{21} \cdot \dot{I}_1 &= Z_{22} \cdot \dot{I}_2 \rightarrow \dot{U}_2 = Z_{21} \cdot \dot{I}_1 + Z_{22} \cdot \dot{I}_2. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Вижда се, че получените уравнения са идентични с тези, в системата със Z параметрите. С други думи, на фиг. 10.8 е представена еквивалентна заместваща схема на четириполюсник. Тя е валидна в най-общият случай, когато четириполюсникът се характеризира с 4 независими параметъра.

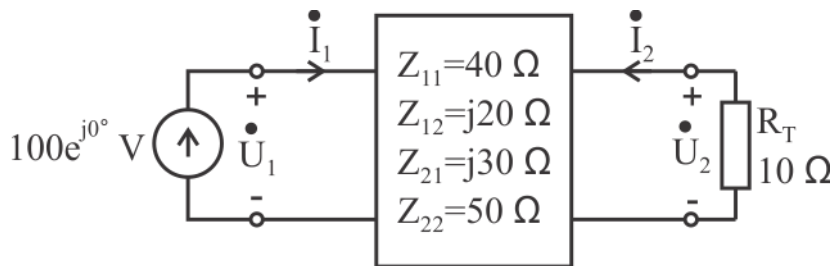
В случай че четириполюсникът е взаимен, може да се използва еквивалентна T -образна заместваща схема (фиг. 10.9).



Фиг. 10.9. Еквивалентна T -образна заместваща схема на четириполюсник

За домашно: Можете ли да докажете, че схемата от фиг. 10.9 е еквивалентна на четириполюсник, представен със Z параметрите си?

Пример 10.2. За схемата от фиг. 10.10 да се определят токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , както и мощността, достигаща до товара R_T , ако източникът е дефиниран със своята комплексна амплитудна стойност.



Фиг. 10.10. Схема към пример 10.2

Решение 1: Тъй като се търсят единствено токовете, е възможно в системата със Z параметрите директно да се замести $\dot{U}_1 = 100e^0$ и $\dot{U}_2 = -R_T \dot{I}_2 = -10\dot{I}_2$:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 100 = 40\dot{I}_1 + j20\dot{I}_2 \\ -10\dot{I}_2 = j30\dot{I}_1 + 50\dot{I}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = 2\dot{I}_1 + j\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = j2\dot{I}_2 \end{cases}$$

Второто уравнение се замества в първото и се изразява \dot{I}_2 :

$$5 = j4\dot{I}_2 + j\dot{I}_2 \rightarrow \dot{I}_2 = -j = 1e^{-j90^\circ} \text{ A.}$$

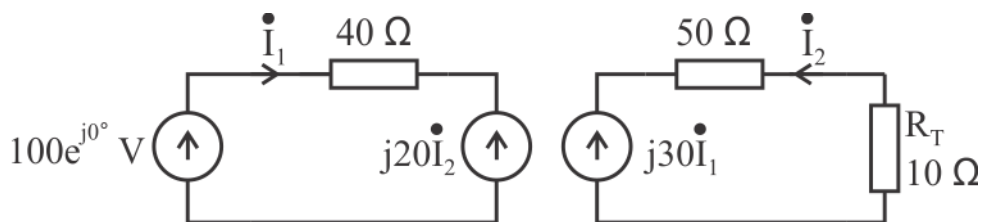
Следователно входният ток е:

$$\dot{I}_1 = j2\dot{I}_2 = j2(-j) = 2 \text{ A.}$$

За разсейваната в R_T мощност се получава:

$$P = \left(\frac{I_{m,2}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R_T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 10 = 5 \text{ W.}$$

Решение 2: Втори начин за анализ на тази задача е чрез еквивалентна заместваща схема. Четириполусникът се характеризира с 4 независими параметъра, така че следва да се използва обобщената заместваща схема от фиг. 10.11.



Фиг. 10.11. Еквивалентна схема към пример 10.2

За нея могат да се запишат уравнения по ВЗК:

$$\begin{cases} 100 - j20\dot{I}_2 = 40\dot{I}_1 \\ -j30\dot{I}_1 = (50 + 10)\dot{I}_2 \end{cases}$$

Получената система е същата, като при първото решение, а следователно и решението ѝ ще бъде същото.

10.2.2. Y параметри (параметри на проводимостта)

Вече бяха дефинирани Z параметрите на четириполюсник, но те не винаги съществуват. Например идеалният трансформатор не може да бъде описан със Z параметри. Ето защо се разглежда четириполюсник, който се захранва от два източника на напрежение (фиг. 10.12).



Фиг. 10.12. Схема на четириполюсник с два източника на напрежение

И тук можем да се приложи принципът на наслагването, за да се определят токовете I_1 и I_2 като сума въздействията на двата източника:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad (10.13)$$

В матрична форма системата добива следния вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (10.14)$$

където матрицата $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ съдържа параметрите на проводимостта, измервани в $[S]$. И в този случай четириполюсникът е взаимен при $Y_{12} = Y_{21}$.

Определяне на Y параметрите

Y параметрите могат да бъдат определени чрез анализ на четириполюсника при две ситуации: к.с. на изхода ($\dot{U}_2 = 0$) и к.с. на входа ($\dot{U}_1 = 0$). При първата ситуация четириполюсникът се захранва с източник на ток I_1 на входа му, а изходът се дава на късо (фиг. 10.13).



Фиг. 10.13. Четириполюсник с к.с. на изхода му

Тогава уравненията от системата стават:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = Y_{11}\dot{U}_1 + 0; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + 0. \end{aligned} \quad (10.15)$$

От тях могат да се определят два от Y параметрите:

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0} \quad Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0} \quad (10.16)$$

По аналогичен начин може да се свърже източник на ток \dot{I}_2 към изхода на четириполюсника, а входът му да се даде на късо (фиг. 10.14). Уравненията стават:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = 0 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = 0 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (10.17)$$

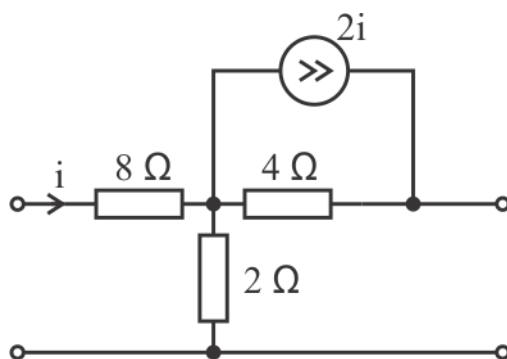


Фиг. 10.14. Четириполюсник с к.с. на входа му

Следователно другите два Y параметъра са:

$$Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1 = 0} \quad Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1 = 0} \quad (10.18)$$

Пример 10.3. За схемата от фиг. 10.15 да се определят Y параметрите на четириполюсника.

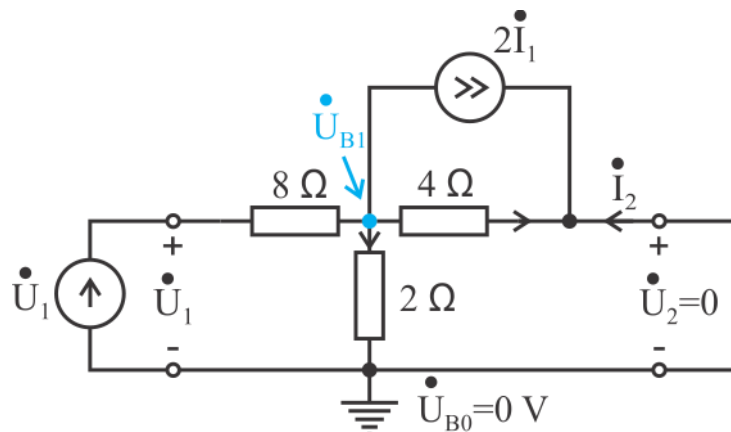


Фиг. 10.15. Схема към пример 10.3

Решение: Системата с уравнения за Y параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

Следователно схемата трябва да бъде анализирана при $\dot{U}_2 = 0$ (к.с. на изхода) и при $\dot{U}_1 = 0$ (к.с. на входа). Разглежда се първата ситуация, като схемата се анализира чрез метода с възловите потенциали (фиг. 10.16).



Фиг. 10.16. Схемата от фиг. 10.3 с к.с. на изхода

След даване на късо, веригата остава само с два възела. Единият от тях се заземява, записва се уравнение по ПЗК, а токовете се изразяват чрез възловите потенциали:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1} + \dot{U}_1}{8} &= 2 \cdot \frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1} + \dot{U}_1}{8} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_{B0}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_{B0}}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{B1}}{8} = 2 \cdot \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{B1}}{8} + \frac{\dot{U}_{B1}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1}}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow -0,125\dot{U}_1 = \dot{U}_{B1}(0,125 - 0,25 + 0,25 + 0,5) \rightarrow \dot{U}_1 = -5\dot{U}_{B1}. \end{aligned}$$

Токът \dot{I}_1 се определя чрез Закона на Ом:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{B1}}{8} = -0,75\dot{U}_{B1}.$$

Токът \dot{I}_2 може да се определи от ПЗК:

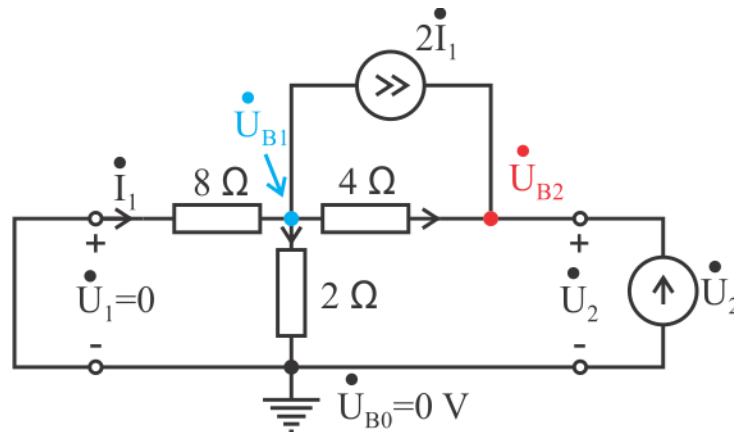
$$\dot{I}_2 + 2\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_{B1}}{4} = 0 \rightarrow \dot{I}_2 = -0,25\dot{U}_{B1} + 1,5\dot{U}_{B1} = 1,25\dot{U}_{B1}.$$

Следователно два от Y параметрите са:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{-0,75\dot{U}_{B1}}{-5\dot{U}_{B1}} = 0,15 \text{ S} \quad Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1,25\dot{U}_{B1}}{-5\dot{U}_{B1}} = -0,25 \text{ S}.$$

За определяне на другите 2 параметъра, системата се анализира при късо съединение на входа (фиг. 10.17).

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 10. Четириполюсници



Фиг. 10.17. Схемата от фиг. 10.3 с к.с. на входа

Схемата има 3 възела. Единият се заземява ($\dot{U}_{B0} = 0$), а втория е известен (тъй като \dot{U}_2 е свързан между в. 0 и в. 2): $\dot{U}_{B2} = \dot{U}_2$. Записва се едно уравнение по ПЗК:

$$\frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1}}{8} = 2 \frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1}}{8} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_2}{4} + \frac{\dot{U}_{B1} - \dot{U}_{B0}}{2} \rightarrow$$

$$\frac{\dot{U}_2}{4} = \frac{\dot{U}_{B1}}{8} - 2 \frac{\dot{U}_{B1}}{8} + \frac{\dot{U}_{B1}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1}}{2} \rightarrow \dot{U}_2 = 2,5 \cdot \dot{U}_{B1}.$$

\dot{I}_1 може да се определи от Закона на Ом, а \dot{I}_2 - от ПЗК:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{B1}}{8} = -\frac{\dot{U}_{B1}}{8}$$

$$-\frac{\dot{U}_{B1}}{4} + \frac{\dot{U}_{B1} - 2,5\dot{U}_{B1}}{4} + \dot{I}_2 = 0 \rightarrow \dot{I}_2 = 0,625 \cdot \dot{U}_{B1}.$$

По този начин могат да се определят другите два Y параметъра:

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = \frac{-\frac{\dot{U}_{B1}}{8}}{2,5\dot{U}_{B1}} = -0,05 \text{ S} \quad Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{0,625\dot{U}_{B1}}{2,5\dot{U}_{B1}} = 0,25 \text{ S}.$$

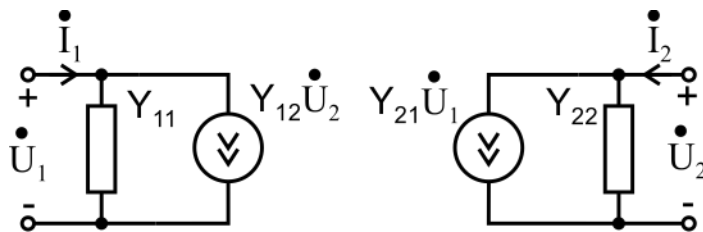
Следователно Y параметрите на четириполюсника са:

$$Y = \begin{vmatrix} 0,15 \text{ S} & -0,05 \text{ S} \\ -0,25 \text{ S} & 0,25 \text{ S} \end{vmatrix}.$$

Еквивалентна заместваща схема

Разглежда се схемата от фиг. 10.18, за която могат да се запишат две уравнения по ПЗК:

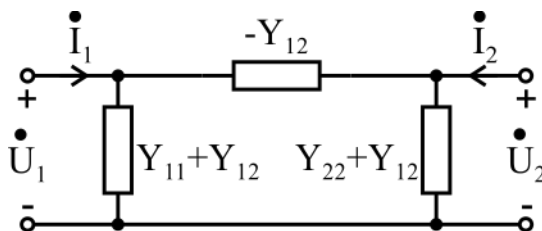
$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \cdot \dot{U}_1 + Y_{12} \cdot \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \cdot \dot{U}_1 + Y_{22} \cdot \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (10.19)$$



Фиг. 10.18. Еквивалентна заместваща схема с Y параметри

Очевидно е, че това са двете уравнения на Y параметрите. Тази заместваща схема може да се използва в най-общия случай, когато четириполюсникът се характеризира с 4 независими Y параметъра.

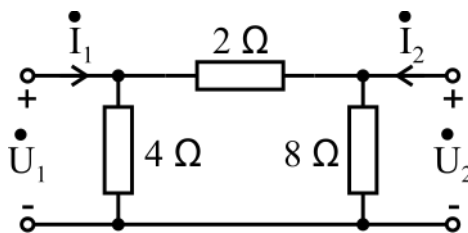
В случай на взаимен четириполюсник ($Y_{12} = Y_{21}$) може да се използва Π -образната заместваща схема от фиг. 10.19.



Фиг. 10.19. Еквивалентна Π -образна заместваща схема на четириполюсник

За домашно: Можете ли да докажете, че схемата от фиг. 10.19 е еквивалентна на четириполюсник, представен с Y параметрите си?

Пример 10.4. За схемата от фиг. 10.20 да се определят Y параметрите на четириполюсника.



Фиг. 10.20. Схема към пример 10.4

Решение: Тъй като това е Π -образен четириполюсник, могат директно да се определят неговите Y параметри:

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ S.}$$

Другите два параметъра са:

$$Y_{11} + Y_{12} = \frac{1}{4} \rightarrow Y_{11} = 0,25 + 0,5 = 0,75 \text{ S;}$$

$$Y_{22} + Y_{12} = \frac{1}{8} \rightarrow Y_{22} = 0,125 + 0,5 = 0,625 \text{ S.}$$

Пълното решение е:

$$Y = \begin{vmatrix} 0,75 \text{ S} & -0,5 \text{ S} \\ -0,5 \text{ S} & 0,625 \text{ S} \end{vmatrix}$$

10.2.3. H параметри (хибридни параметри)

Z и Y параметрите не винаги съществуват, поради което са нужни и други методи за описване на четириполюсници. Трети вид параметри изразяват \dot{U}_1 и \dot{I}_2 чрез \dot{I}_1 и \dot{U}_2 :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad (10.20)$$

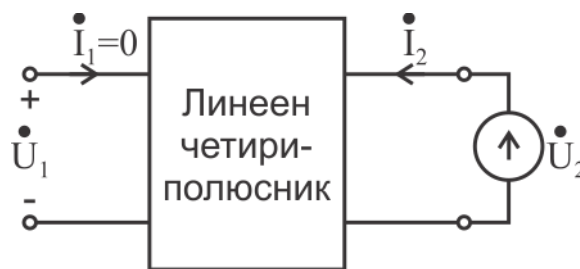
Системата може да се запише в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (10.21)$$

където матрицата $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ съдържа хибридните параметри на четириполюсника. Този набор от параметри е полезен при описване на някои електронни устройства като транзисторите, защото при тях е много по-удобно да се измерят H параметрите, отколкото Z или Y параметрите.

Определяне на H параметрите

За определяне на хибридните параметри следва да се анализира системата уравнения при $\dot{I}_1 = 0$ и при $\dot{U}_2 = 0$. Разглежда се четириполюсният при п.х. на входа му ($\dot{I}_1 = 0$), ако изходът му е захранен от източник на е.д.н. (фиг. 10.21).



Фиг. 10.21. Четириполюсник при п.х. на неговия вход

От системата с H параметри могат да се определят два от тях:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 = 0 + H_{12}\dot{U}_2 & \rightarrow H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1 = 0} \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 = 0 + H_{22}\dot{U}_2 & \rightarrow H_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1 = 0} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Другите два параметъра могат да се определят при к.с. на изхода ($\dot{U}_2 = 0$), като входът на четириполюсника се захрани с източник на ток (фиг. 10.22).



Фиг. 10.22. Четириполюсник при к.с. на неговия изход

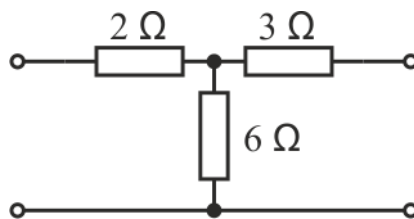
Получава се:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 = H_{11}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0} \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0} \end{aligned} \quad (10.23)$$

Може да се забележи, че H параметрите имат различна размерност:

- H_{11} е входното съпротивление при късо съединение на изхода на четириполюсника, измервано в Омега [Ω];
- H_{12} е коефициентът на обратна връзка по напрежение при празен ход на входа на четириполюсника (безразмерен коефициент);
- H_{21} е коефициентът на предаване по ток при късо съединение на изхода (безразмерен коефициент);
- H_{22} е изходната проводимост при отворена верига на входа на четириполюсника, измервана в Сименси [S].

Пример 10.5. За схемата от фиг. 10.23 да се определят H параметрите на четириполюсника.

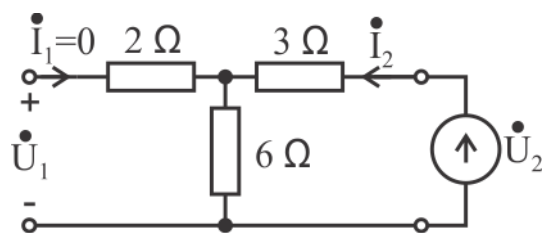


Фиг. 10.23. Схема към пример 10.5

Решение: Системата уравнения с H параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

Четириполюсникът се анализира при празен ход на входа (фиг. 10.24).



Фиг. 10.24. Схема към пример 10.5 при п.х. на входа

Лесно може да се определи токът I_2 :

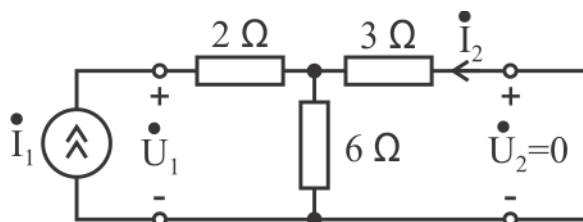
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{3 + 6} = \frac{\dot{U}_2}{9}.$$

Тогава два от H параметрите са:

$$\dot{I}_2 = 0 + H_{22}\dot{U}_2 \rightarrow H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{\frac{\dot{U}_2}{9}}{\dot{U}_2} = 0,111 \text{ S};$$

$$\dot{U}_1 = 0 + H_{12}\dot{U}_2 \rightarrow H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{6\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{6 \cdot \frac{\dot{U}_2}{9}}{\dot{U}_2} = 0,667.$$

След това четириполюсникът се анализира при к.с. на изхода (фиг. 10.25).



Фиг. 10.25. Схема към пример 10.5 при к.с. на изхода

\dot{U}_1 се изразява чрез \dot{I}_1 (определяйки еквивалентното съпротивление на веригата - резисторите с големина 3Ω и 6Ω са свързани успоредно, след което са свързани последователно на 2Ω):

$$\dot{U}_1 = \left(2 + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6}\right) \dot{I}_1 = 4\dot{I}_1.$$

От ВЗК се изразява \dot{I}_2 :

$$\dot{U}_1 = 2\dot{I}_1 - 3\dot{I}_2 \rightarrow 4\dot{I}_1 = 2\dot{I}_1 - 3\dot{I}_2 \rightarrow \dot{I}_2 = -\frac{2}{3}\dot{I}_1.$$

Следователно другите два H параметъра са:

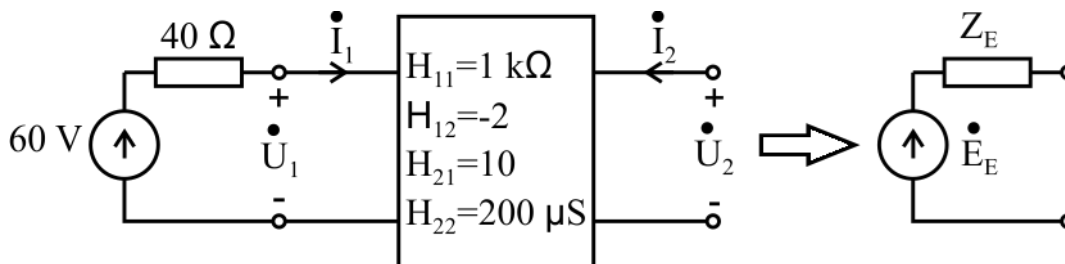
$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{4\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 4 \Omega.$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + 0 \rightarrow H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-\frac{2}{3}\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = -0,667.$$

Пълното решение на задачата е:

$$H = \begin{vmatrix} 4 \Omega & 0,667 \\ -0,667 & 0,111 \text{ S} \end{vmatrix}$$

Пример 10.6. Схемата от фиг. 10.26 да се представи като еквивалентен генератор на напрежение (Теорема на Тевенен) и да се определят параметрите му.



Фиг. 10.26. Схема към пример 10.6

Необходимо е да се определят \dot{E}_E и Z_E на еквивалентния генератор, което може да стане с:

$$\dot{E}_E = \dot{U}_{2\text{ПХ}}; \quad Z_E = \frac{\dot{U}_{2\text{ПХ}}}{-I_{2\text{КС}}}$$

където $\dot{U}_{2\text{ПХ}}$ и $\dot{I}_{2\text{КС}}$ са съответно напрежението на празен ход и токът на късо съединение на изхода на четириполюсника.

Съществуват разнообразни възможности за определяне на двете величини, но в случая ще се приложат директно H параметрите. Може да се запише уравнение по ВЗК за входа на четириполюсника:

$$60 = 40\dot{I}_1 + \dot{U}_1 \quad \rightarrow \quad \dot{U}_1 = 60 - 40\dot{I}_1$$

При празен ход на изхода на четириполюсника, се замества $\dot{I}_2 = 0$ и $\dot{U}_1 = 60 - 40\dot{I}_1$ в системата с H параметри:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 60 - 40\dot{I}_1 = 1000\dot{I}_1 - 2\dot{U}_2 \\ 0 = 10\dot{I}_1 + 200 \cdot 10^{-6}\dot{U}_2 \end{cases}$$

От второто уравнение се получава:

$$\dot{I}_1 = -\frac{200 \cdot 10^{-6}}{10} \dot{U}_2 = -2 \cdot 10^{-5} \dot{U}_2$$

\dot{I}_1 се полага в първото уравнение, откъдето се определя $\dot{U}_{2\text{ПХ}}$:

$$\begin{aligned} 60 &= 1040\dot{I}_1 - 2\dot{U}_2 = -1040 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \dot{U}_2 - 2\dot{U}_2 \\ &\rightarrow \dot{U}_{2\text{ПХ}} = \dot{U}_2 = \frac{-60}{2,0208} = -29,69 \text{ V.} \end{aligned}$$

За определяне тока на късо съединение $\dot{I}_{2\text{КС}}$ на четириполюсника, може да се замести $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{U}_1 = 60 - 40\dot{I}_1$ в системата с H параметри:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 60 - 40\dot{I}_1 = 1000\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = 10\dot{I}_1 \end{cases}$$

От второто уравнение се изразява $\dot{I}_1 = 0,1\dot{I}_2$ и се полага в първото:

$$60 = 1040\dot{I}_1 = 1040 \cdot 0,1 \cdot \dot{I}_2 \rightarrow \dot{I}_{2\text{КС}} = \dot{I}_2 = \frac{60}{104} = 0,577 \text{ A.}$$

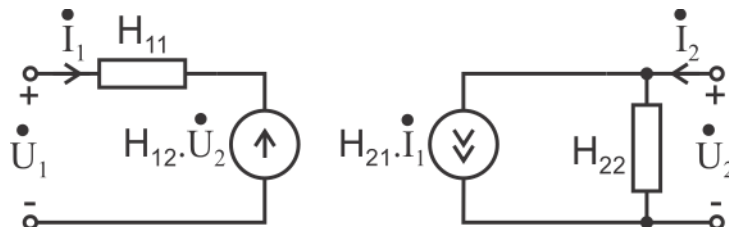
Следователно еквивалентният генератор на напрежение има следните напрежение и съпротивление:

$$E_E = \dot{U}_{2\text{ПХ}} = -29,69 \text{ V} \quad Z_E = \frac{\dot{U}_{2\text{ПХ}}}{-\dot{I}_{2\text{КС}}} = \frac{-29,69}{-0,577} = 51,46 \Omega.$$

Забележка: В случая токът $\dot{I}_{2\text{КС}}$ участва със знак минус (-), тъй като в еквивалентната схема от фиг. 10.26 токът и напрежението трябва да са с една и съща посока.

Еквивалентна заместваща схема

Еквивалентната заместваща схема с хибридните параметри е:



Фиг. 10.27. Еквивалентна заместваща схема на четириполюсник с H параметри

За домашно: Можете ли да докажете, че схемата от фиг. 10.27 е еквивалентна на четириполюсник, представен с H параметрите си?

10.2.4. G параметри (обратни хибридни параметри)

Друг набор от параметри на четириполюсник са G параметрите. В случая зависимите променливи са \dot{I}_1 и \dot{U}_2 :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.24)$$

Записано в матрична форма, уравнението става:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (10.25)$$

където матрицата $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ съдържа обратните хибридни параметри.

Определяне на G параметрите

G параметрите могат да бъдат определени, като се анализира системата им при $\dot{I}_2 = 0$ и $\dot{U}_1 = 0$.

При празен ход на изхода на четириполюсника ($\dot{I}_2 = 0$) се намират два от параметрите:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 = G_{11}\dot{U}_1 + 0 \quad \rightarrow \quad G_{11} = -\left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2 = 0} \\ \dot{U}_2 &= G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + 0 \quad \rightarrow \quad G_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2 = 0} \end{aligned} \quad (10.26)$$

При късо съединение на входа му ($\dot{U}_1 = 0$) се определят другите два:

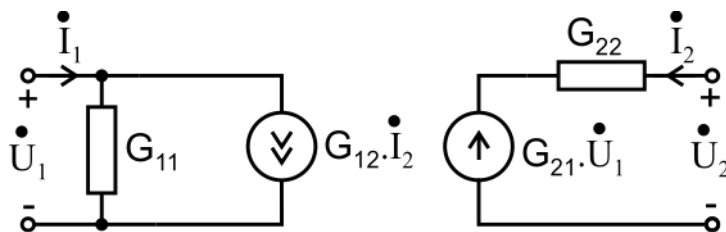
$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 = 0 + G_{12}\dot{I}_2 \quad \rightarrow \quad G_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_1 = 0} \\ \dot{U}_2 &= G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 = 0 + G_{22}\dot{I}_2 \quad \rightarrow \quad G_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_1 = 0} \end{aligned} \quad (10.27)$$

Вижда се, че G параметрите също имат различна размерност:

- G_{11} е входната проводимост на четириполюсника в Сименси [S], при празен ход на изхода му;
- G_{12} е обратния коефициент на предаване по ток, при късо съединение на входа на четириполюсника (безразмерна величина);
- G_{21} е коефициентът на предаване по напрежение на четириполюсника, при празен ход на входа (безразмерна величина);
- G_{22} е изходното съпротивление на четириполюсника в Оме [Ω], при късо съединение на входа му.

Еквивалентна заместваща схема

Еквивалентната заместваща схема на четириполюсник чрез неговите G параметри е представена на фигурата 10.28.



Фиг. 10.28. Еквивалентна заместваща схема на четириполюсник с G параметрите му

10.2.5. A параметри (предавателни параметри)

Остава да се дефинират още два типа параметри, първите от които са така наречените A параметри (предавателни параметри), наричани още $ABCD$ параметри. При тях зависимите променливи са \dot{U}_1 и \dot{I}_1 . Тъй като идеята за предаването предполага, че токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 са с една и съща посока, токът \dot{I}_2 се взема със знак минус и противоположна посока (фиг. 10.29).



Фиг. 10.29. Четириполюсник с обърната посока на изходящия ток

Това се прави, тъй като когато има каскадно свързани четириполюсници, логично е токът \dot{I}_2 да се възприема като излизащ от предишния четириполюсника и влизащ в следващия. Системата с A параметрите има следния вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 \end{cases} \quad (10.28)$$

В матрична форма системата добива следния вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (10.29)$$

където матрицата $A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ съдържа предавателните параметри. В някои литературни източници се използва $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, вместо $ABCD$.

Предавателните параметри са удобни при анализ на предавателни линии, като телефонни линии, високочестотни мрежи, радари и др.

Определяне на A параметрите

За да се определят предавателните параметри е необходимо да се анализира системата при $\dot{U}_2 = 0$ и при $\dot{I}_2 = 0$.

При късо съединение на изхода на четириполюсника ($\dot{U}_2 = 0$) се определят два от A параметрите:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 = 0 - B\dot{I}_2 &\rightarrow B = -\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2 = 0}; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 = 0 - D\dot{I}_2 &\rightarrow D = -\left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2 = 0}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Другите два параметъра се определят при празен ход на изхода на четириполюсника ($\dot{I}_2 = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 = A\dot{U}_2 &\rightarrow A = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2 = 0}; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 = C\dot{U}_2 &\rightarrow C = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2 = 0}. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Забелязва се, че A параметрите също имат различна размерност и значение:

- A е коефициентът на обратна връзка по напрежение при празен ход на изхода на четириполюсника (безразмерна величина);
- B има размерност на съпротивление в Омове $[\Omega]$;
- C има размерност на проводимост в Сименси $[S]$;
- D е коефициентът на обратна връзка по ток при късо съединение на изхода на четириполюсника (безразмерна величина).

За взаимен четириполюсник може да се докаже, че:

$$AD - BC = 1. \quad (10.32)$$

Еквивалентна заместваща схема

Не съществува еквивалентна заместваща схема на четириполюсник, използваща неговите A параметри.

10.2.6. B параметри (обратни предавателни параметри)

Последните параметри, които ще бъдат разгледани, са така наречените B параметри, които са противоположни на A параметрите:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = a\dot{U}_1 - b\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = c\dot{U}_1 - d\dot{I}_1 \end{cases} \quad (10.33)$$

В матрична форма се записват като:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ -\dot{I}_1 \end{bmatrix}, \quad (10.34)$$

където матрицата $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ съдържа обратните предавателни параметри на четириполюсника.

Определяне на B параметрите

B параметрите се определят по аналогичен начин, съответно при късо съединение ($\dot{U}_1 = 0$) и празен ход ($\dot{I}_1 = 0$) на входа:

$$\begin{aligned} a &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_1 = 0} & b &= - \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_1 = 0} \\ c &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_1 = 0} & d &= - \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_1 = 0} \end{aligned} \quad (10.35)$$

За взаимен четириполюсник може да се докаже, че:

$$ad - bc = 1. \quad (10.36)$$

Еквивалентна заместваща схема

Не съществува еквивалентна заместваща схема на четириполюсник, използваща неговите B параметри.

10.2.7. Връзки между параметрите

Знаейки кои да е параметри на четириполюсник, могат да се изразят всички останали (ако съществуват). Например нека са известни Z параметрите на четириполюсник:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (10.37)$$

От тях лесно могат да се получат Y параметрите чрез определяне на обратната матрица:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = Z^{-1} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (10.38)$$

Детерминантата и адюнгираните количества на матрицата Z са:

$$\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}. \quad (10.39)$$

Следователно Y параметрите, изразени чрез Z параметрите, са:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta_Z} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}. \quad (10.40)$$

Всички възможни преминавания от едни параметри в други са представени в таблица 10.1.

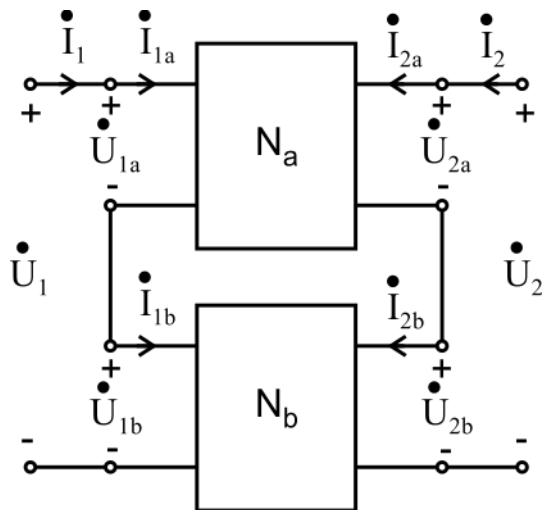
Таблица 10.1. Преминаване между различните параметри на четириполюсник.

	Z	Y	H	G	A	B
Z	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} & -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y} \\ -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{G_{11}} & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{11}} & \frac{\Delta_G}{G_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_A}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{d}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{\Delta_B}{c} & \frac{a}{c} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta_H}{H_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta_A}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{\Delta_B}{b} & \frac{d}{b} \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta_Y}{Y_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{G_{22}}{\Delta_G} & -\frac{G_{12}}{\Delta_G} \\ -\frac{G_{21}}{\Delta_G} & \frac{G_{11}}{\Delta_G} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_A}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{\Delta_B}{a} & \frac{c}{a} \end{bmatrix}$
G	$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{11}} & -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{H_{22}}{\Delta_H} & -\frac{H_{12}}{\Delta_H} \\ -\frac{H_{21}}{\Delta_H} & \frac{H_{11}}{\Delta_H} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta_A}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{c}{d} & -\frac{1}{d} \\ \frac{\Delta_B}{d} & -\frac{b}{d} \end{bmatrix}$
A	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ -\frac{\Delta_Y}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta_H}{H_{21}} & -\frac{H_{11}}{H_{21}} \\ -\frac{H_{22}}{H_{21}} & -\frac{1}{H_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}} \\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{\Delta_G}{G_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta_B} & \frac{b}{\Delta_B} \\ \frac{c}{\Delta_B} & \frac{a}{\Delta_B} \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & \frac{\Delta_Z}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{Y_{11}}{Y_{12}} & -\frac{1}{Y_{12}} \\ -\frac{\Delta_Y}{Y_{12}} & -\frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{H_{12}} & \frac{H_{11}}{H_{12}} \\ \frac{H_{22}}{H_{12}} & \frac{\Delta_H}{H_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta_G}{G_{12}} & -\frac{G_{22}}{G_{12}} \\ \frac{G_{11}}{G_{12}} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{\Delta_A} & \frac{B}{\Delta_A} \\ \frac{C}{\Delta_A} & \frac{A}{\Delta_A} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

10.3. Свързване на четириполюсници

10.3.1. Последователно съединение на четириполюсници

Нека два четириполюсника са свързани по начина, показан на фиг. 10.30. Такова свързване се нарича *последователно*.



Фиг. 10.30. Последователно съединение на четириполюсници

Нека системите със Z параметрите на двата четириполюсника са съответно:

$$\begin{cases} \dot{U}_{1a} = Z_{11a}\dot{I}_{1a} + Z_{12a}\dot{I}_{2a} \\ \dot{U}_{2a} = Z_{21a}\dot{I}_{1a} + Z_{22a}\dot{I}_{2a} \end{cases} \quad (10.41)$$

и

$$\begin{cases} \dot{U}_{1b} = Z_{11b}\dot{I}_{1b} + Z_{12b}\dot{I}_{2b} \\ \dot{U}_{2b} = Z_{21b}\dot{I}_{1b} + Z_{22b}\dot{I}_{2b} \end{cases} \quad (10.42)$$

От схемата се вижда, че:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b} \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2b}, \quad (10.43)$$

където \dot{I}_1 и \dot{I}_2 са входния и изходен ток на цялото съединение (на еквивалентния четириполюсник). Могат да се запишат две уравнения по ВЗК за входа и изхода на четириполюсниците:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b}. \quad (10.44)$$

Замествайки уравнения (10.41) и (10.42) в (10.44) се получава:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11a}\dot{I}_{1a} + Z_{12a}\dot{I}_{2a} + Z_{11b}\dot{I}_{1b} + Z_{12b}\dot{I}_{2b} = (Z_{11a} + Z_{11b})\dot{I}_1 + (Z_{12a} + Z_{12b})\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21a}\dot{I}_{1a} + Z_{22a}\dot{I}_{2a} + Z_{21b}\dot{I}_{1b} + Z_{22b}\dot{I}_{2b} = (Z_{21a} + Z_{21b})\dot{I}_1 + (Z_{22a} + Z_{22b})\dot{I}_2. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Следователно Z параметрите на цялото съединение (на еквивалентния четириполюсник) са:

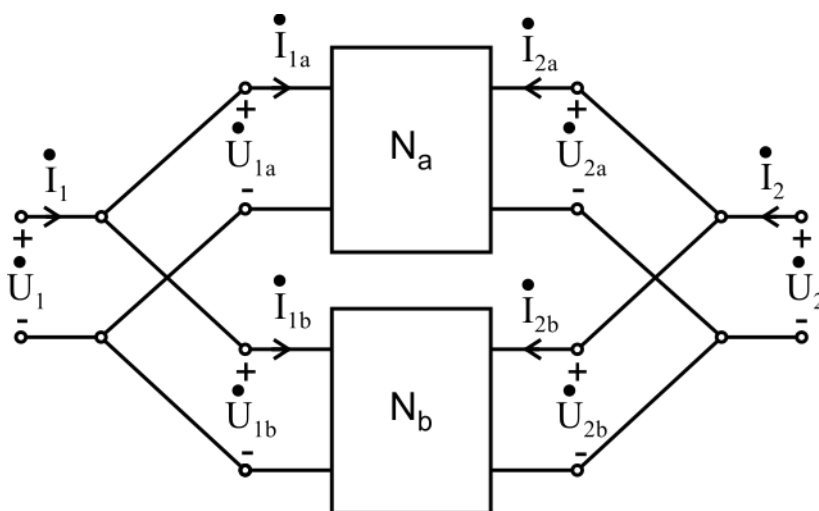
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11a} + Z_{11b} & Z_{12a} + Z_{12b} \\ Z_{21a} + Z_{21b} & Z_{22a} + Z_{22b} \end{bmatrix}. \quad (10.46)$$

С други думи, когато четириполюсници са свързани последователно, еквивалентните Z параметри на цялото съединение могат да се определят като сума на техните Z параметрите:

$$Z = Z_a + Z_b. \quad (10.47)$$

10.3.2. Паралелно съединение на четириполюсници

Нека два четириполюсника са свързани по начина, показан на фиг. 10.31. Такова съединение се нарича *паралелно*.



Фиг. 10.31. Паралелно съединение на четириполюсници

Нека двата четириполюсника са дефинирани с техните Y параметри:

$$\begin{cases} \dot{I}_{1a} = Y_{11a}\dot{U}_{1a} + Y_{12a}\dot{U}_{2a} \\ \dot{I}_{2a} = Y_{21a}\dot{U}_{1a} + Y_{22a}\dot{U}_{2a} \end{cases} \quad (10.48)$$

и

$$\begin{cases} \dot{I}_{1b} = Y_{11b}\dot{U}_{1b} + Y_{12b}\dot{U}_{2b} \\ \dot{I}_{2b} = Y_{21b}\dot{U}_{1b} + Y_{22b}\dot{U}_{2b} \end{cases} \quad (10.49)$$

От фигурата се вижда, че:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b}, \quad (10.50)$$

където \dot{U}_1 и \dot{U}_2 са напреженията на цялото съединение (на еквивалентния четириполюсник).

Могат да се запишат следните две уравнения по ПЗК за входа и изхода на веригата:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2a} + \dot{I}_{2b}. \quad (10.51)$$

Замествайки уравнения (10.48) и (10.49) в (10.51) се получава:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11a}\dot{U}_{1a} + Y_{12a}\dot{U}_{2a} + Y_{11b}\dot{U}_{1b} + Y_{12b}\dot{U}_{2b} = \\ &= (Y_{11a} + Y_{11b})\dot{U}_1 + (Y_{12a} + Y_{12b})\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21a}\dot{U}_{1a} + Y_{22a}\dot{U}_{2a} + Y_{21b}\dot{U}_{1b} + Y_{22b}\dot{U}_{2b} = \\ &= (Y_{21a} + Y_{21b})\dot{U}_1 + (Y_{22a} + Y_{22b})\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Следователно общите Y параметри на цялото съединение са:

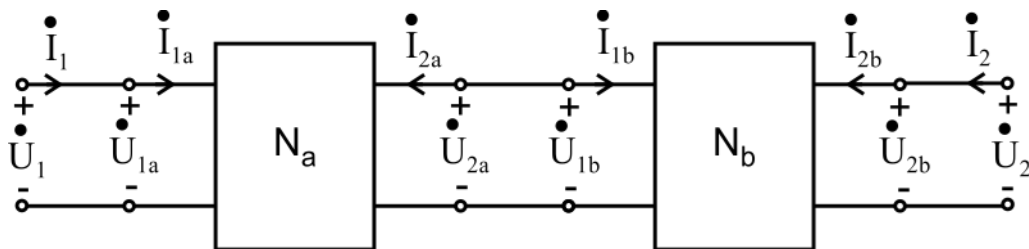
$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} + Y_{11b} & Y_{12a} + Y_{12b} \\ Y_{21a} + Y_{21b} & Y_{22a} + Y_{22b} \end{bmatrix}. \quad (10.53)$$

С други думи, Y параметрите на паралелно съединение могат да се определят като сума от Y параметрите на отделните четириполюсници:

$$Y = Y_a + Y_b. \quad (10.54)$$

10.3.3. Каскадно (верижно) съединение на четириполюсници

Представеното на фиг. 10.32 съединение на четириполюсници се нарича *каскадно* или *верижно*.



Фиг. 10.32. Каскадно (верижно) съединение на четириполюсници

Нека двата четириполюсника са зададени с техните A параметри:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix} \quad (10.55)$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix}. \quad (10.56)$$

От схемата се вижда, че изходът на първия четириполюсник се явява вход за втория, така че могат да се запишат следните равенства:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (10.57)$$

Замествайки уравнения (10.57) в матрицата на първото уравнение се получава:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{I}_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2a} \\ -\dot{I}_{2a} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix}. \quad (10.58)$$

След това се замества втората матрица в уравнение (10.58):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{I}_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2b} \\ -\dot{I}_{2b} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Следователно A параметрите на цялата верига са:

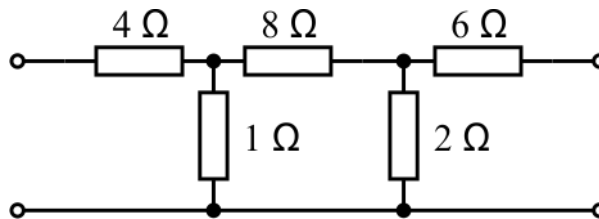
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}. \quad (10.60)$$

С други думи, еквивалентните предавателни параметри на верижно свързани четириполюсници могат да се определят чрез матрично умножение на A параметрите им:

$$A = A_a \cdot A_b. \quad (10.61)$$

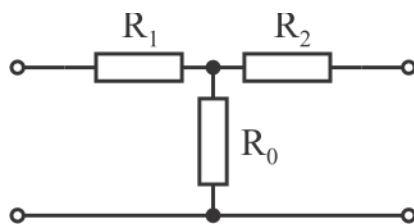
Важно: Умножението на матриците трябва да бъде извършено по реда, по който те са свързани.

Пример 10.7. Да се определят A параметрите на схемата от фиг. 10.33.



Фиг. 10.33. Схема към пример 10.7

Решение: A параметрите ще бъдат определени чрез представяне на четириполюсника като два каскадно свързани Т-образни четириполюсници. Ще се използват следните зависимости за A параметрите на Т-образен четириполюсник:



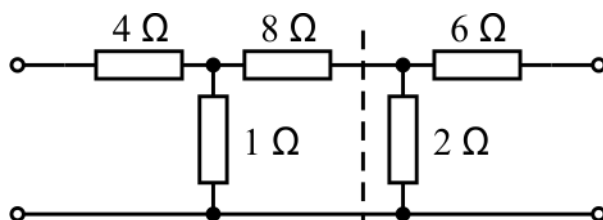
Фиг. 10.34. T-образен четириполюсник

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_0}; \quad B = R_2 + \frac{R_1(R_2 + R_0)}{R_0};$$

$$C = \frac{1}{R_0}; \quad D = 1 + \frac{R_2}{R_0}.$$

За домашно: Можете ли да докажете горните 4 уравнения?

Схемата се разглежда като два каскадно свързани T-образни четириполюсника (фиг. 10.35).



Фиг. 10.35. Схема към пример 10.7, разглеждана като 2 каскадно свързани четириполюсника

A параметрите на първия T-образен четириполюсник са:

$$A = 1 + \frac{4}{1} = 5; \quad B = 8 + \frac{4(1 + 8)}{1} = 44 \Omega;$$

$$C = \frac{1}{1} = 1 \text{ S}; \quad D = 1 + \frac{8}{1} = 9.$$

В матрична форма:

$$A_a = \begin{bmatrix} 5 & 44 \Omega \\ 1 \text{ S} & 9 \end{bmatrix}.$$

За втория верижно-свързан четириполюсник е известно, че $R_1 = 0 \Omega$, така че A параметрите му са:

$$A = 1; \quad B = 6 \Omega;$$

$$C = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ S}; \quad D = 1 + \frac{6}{2} = 4.$$

В матрична форма:

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 6 \Omega \\ 0,5 \text{ S} & 4 \end{bmatrix}.$$

Следователно A параметрите на цялото съединение са:

$$A = A_a \cdot A_b = \begin{bmatrix} 5 & 44 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0,5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 44 \cdot 0,5 & 5 \cdot 6 + 44 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 9 \cdot 0,5 & 1 \cdot 6 + 9 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 206 \Omega \\ 5,5 \text{ S} & 42 \end{bmatrix}$$

10.3.4. Други съединения на четириполюсници

Съществуват и хибридни съединения, при които се използват съответно H и G параметрите:

- При **последователно-паралелно съединение** (входовете на четириполюсниците са свързани последователно, а изходите - паралелно):

$$H = H_a + H_b. \quad (10.62)$$

- При **паралелно-последователно съединение** (входовете на четириполюсниците са свързани паралелно, а изходите - последователно):

$$G = G_a + G_b. \quad (10.63)$$

10.4. Приложения на теорията за четириполюсниците

В тази тема бяха разгледани 6 вида параметри на четириполюсници, с които могат да се опишат различни устройства. Едно важно приложение на тази теория е при транзисторните схеми.

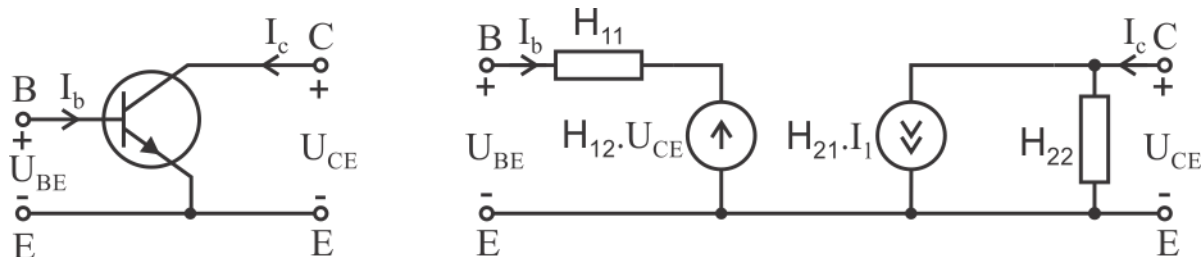
Анализ на транзисторни схеми

При тях най-удобни са H параметрите, защото могат да бъдат лесно установени експериментално (измерени), като често са дадени от производителя в спецификацията на елементите. Но H параметрите на транзисторите имат специфично значение:

- H_{11} е входното съпротивление, при късо съединение на изхода за променливотоковата съставка на напрежението;
- H_{12} е коефициентът на обратна връзка по напрежение, при отворена входна верига за променливотоковата съставка на тока;
- H_{21} е коефициентът на усилване по ток, при късо съединение на изхода за променливотоковата съставка на напрежението;
- H_{22} е изходната проводимост, при отворена входна верига за променливотоковата съставка на тока.

От горепосоченото се вижда, че в случая H параметрите се дефинират само за променливотоковата съставка, т.е. при зададена работна точка по постоянен ток на входа и изхода на транзистора.

На фиг. 10.36 е представена еквивалентната заместваща схема на транзисторен усилвател с H параметрите му.



Фиг. 10.36. Еквивалентна заместваща схема на транзистор

Верижни схеми

Теорията на четириполюсниците намира приложение и при проектирането на верижни схеми и филтри. Използвайки различните видове връзки между четириполюсници (най-често верижни съединение), могат лесно да се определят техните предавателни функции.

Тема 11. Вериги с разпределени параметри

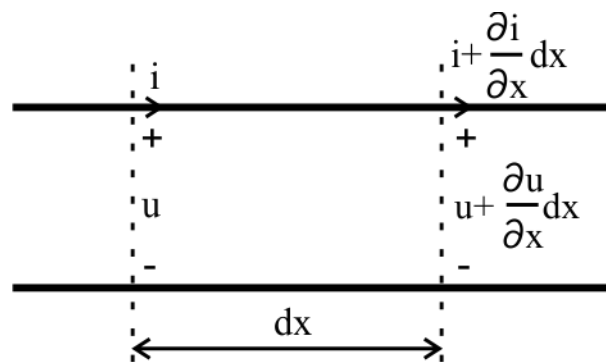
11.1. Основни понятия за предавателните линии

В рамките на този учебник бяха разглеждани само вериги със съсредоточени параметри. При тях енергията или се съхранява под формата на електрическо/магнитно поле, или се разсейва (преобразува в друг вид енергия), като тези процеси са концентрирани в рамките на елементите на веригата - бобини, кондензатори и резистори.

Във веригите с разпределени параметри енергията се съхранява и преобразува по същите правила, но това се случва равномерно или неравномерно по дължина на цялата верига. Примери за линии с разпределени параметри са телефонните линии, антените, мрежовите кабели, USB кабелите и т.н. Навивките на електрически машини и трансформатори също могат да се разглеждат като вериги с разпределени параметри.

Разглежда се една двупроводна предавателна линия с равномерно разпределени параметри (фиг. 11.1), където:

- dx е дължината на един елементарен (много къс) участък от веригата;
- u и i са съответно напрежението и тока в началото на участъка;
- $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ са съответно напрежението и тока в края на участъка.



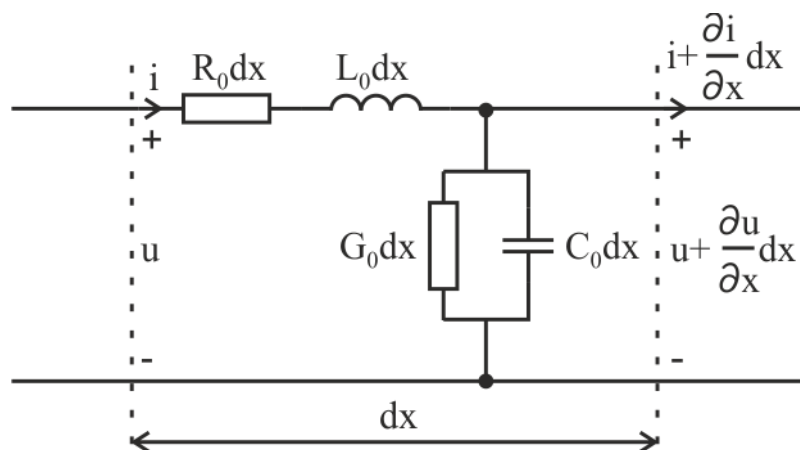
Фиг. 11.1. Двупроводна предавателна линия

В случая е важно да се отбележи, че токът и напрежението в началото на участъка не са същите, като тези в края на участъка. Това е така, защото всеки елементарен участък се характеризира с:

- $R_0 dx$ е съпротивлението на участъка в Омове [Ω];
- $L_0 dx$ е индуктивността на участъка в Хенри [H];
- $G_0 dx$ е проводимостта на участъка в Сименци [S];
- $C_0 dx$ е капацитивността на участъка във Фаради [F],

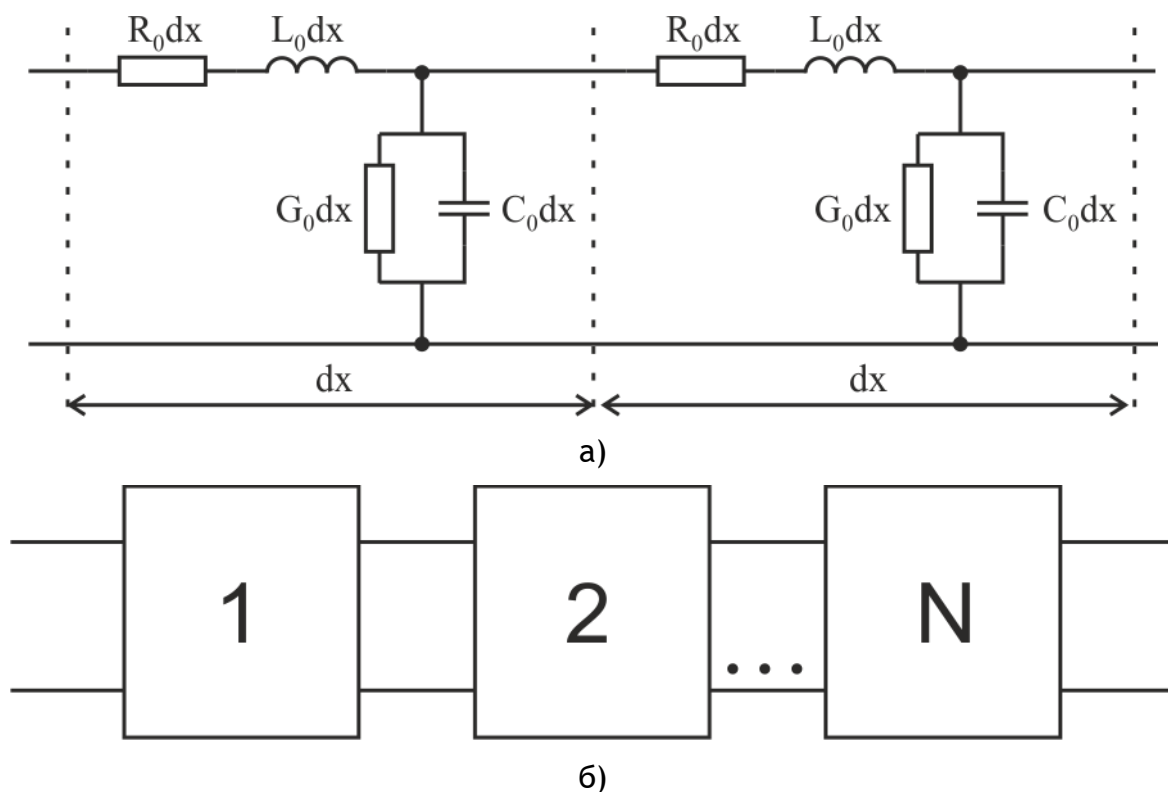
където величините R_0 , L_0 , G_0 и C_0 са параметрите на предавателната линия и се измерват съответно в [Ω/m], [H/m], [S/m] и [C/m].

Казано с други думи, всеки елементарен участък на двупроводна предавателна може да се представи със заместващата схема (четириполюсника) от фиг. 11.2.



Фиг. 11.2. Еквивалентна заместваща схема на двупроводна предавателна линия

Следователно една предавателна линия може да бъде разглеждана като множество верижно (каскадно) свързани четириполусници (фиг. 11.3). Това също така означава, че предавателната линия може да бъде разглеждана като един еквивалентен четириполусник.



Фиг. 11.3. Предавателната линия, разглеждана като верижно свързани четириполусници

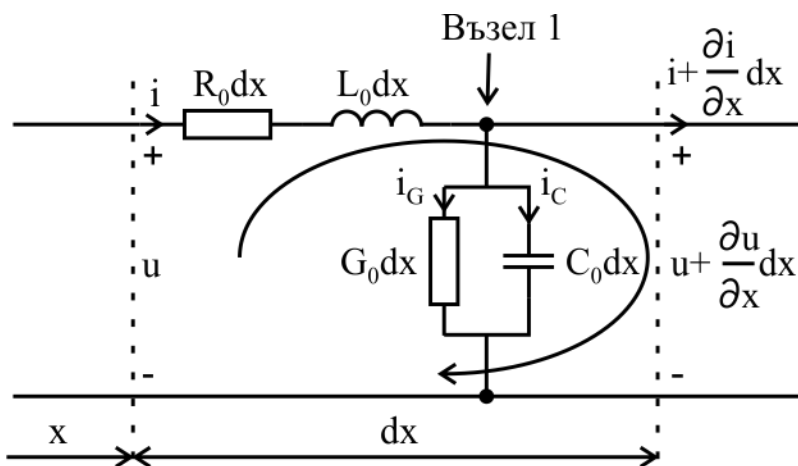
11.1.1. Телеграфни уравнения

Напрежението и токът на предавателните линии зависят не само от времето t , но също така и от дължината x на линията:

$$u = f(x, t) \quad i = f(x, t). \quad (11.1)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Стойността на x може да се измерва, считано от началото или от края на линията или от коя да е друга точка в нея. Прието е за начало на линията да се смята тази страна, към която е свързан източникът, а за край - тази, към която е свързан товарът. Ако се разгледа един елементарен участък от предавателна линия (фиг. 11.4), за него могат да се запишат уравнения по ВЗК и ПЗК:



Фиг. 11.4. Анализ на елементарен участък от предавателна линия

$$u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + u_R + u_L = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + iR_0 dx + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (11.2)$$

$$i = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx + i_G + i_C = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx + G_0 dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \partial \frac{C_0 dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)}{\partial t}.$$

Уравнения (11.2) могат да бъдат представени по следния начин:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} dx &= R_0 dx \cdot i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} dx &= G_0 \left(dx \cdot u + \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 \right) + \partial \frac{C_0 \left(dx \cdot u + \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 \right)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Тъй като dx е много малък участък, следователно dx^2 може да се смята за безкрайно малко число. Това позволява да се премахне съставката $\frac{\partial u}{\partial x} dx^2$, при което последното уравнение става:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = G_0(dx \cdot u) + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (11.4)$$

Получените зависимости се наричат *телеграфни уравнения на предавателна линия с равномерно разпределени параметри*:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (11.5)$$

11.1.2. Предавателна линия със синусоидални токове и напрежения

Нека една двупроводна предавателна линия се захранва от синусоиден източник на напрежение, с честота ω . Тогава системата (11.5) може да се представи в комплексен вид:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = R_0\dot{I} + j\omega L_0\dot{I} = Z_0\dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = G_0\dot{U} + j\omega C_0\dot{U} = Y_0\dot{U} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = Z_0\dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U} \end{cases}, \quad (11.6)$$

където $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ е комплексното съпротивление на един елементарен участък dx ; $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ е комплексната проводимост на един елементарен участък dx .

Ако се изрази токът от първото уравнение и се положи във второто, се получава:

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U} \rightarrow \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0Y_0\dot{U}. \quad (11.7)$$

Дефинира се т.нар. **константа на предаване** γ по следния начин:

$$\gamma = \sqrt{Z_0Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta, \quad (11.8)$$

където реалната съставка α е константата на затихване, а имагинерната съставка β се нарича **константа на фазата**.

Следователно уравнение (11.7) добива следния вид:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2\dot{U} \rightarrow \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\dot{U} = 0. \quad (11.9)$$

Това е обикновено диференциално уравнение от втори ред, чието решение е:

$$\dot{U} = \dot{U}^+e^{-\gamma x} + \dot{U}^-e^{\gamma x}, \quad (11.10)$$

където \dot{U} е напрежението в коя да е точка x от предавателната линия, а \dot{U}^+ и \dot{U}^- са константи.

Токът в предавателната линия може да се определи, като във второто уравнение от (11.6) се замести уравнение (11.10):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = -\frac{1}{Z_0} \frac{d(\dot{U}^+e^{-\gamma x} + \dot{U}^-e^{\gamma x})}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (\dot{U}^+e^{-\gamma x} - \dot{U}^-e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{(\dot{U}^+e^{-\gamma x} - \dot{U}^-e^{\gamma x})}{\frac{Z_0}{\gamma}} = \frac{(\dot{U}^+e^{-\gamma x} - \dot{U}^-e^{\gamma x})}{Z_C}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Съставката $Z_c = \frac{Z_0}{\gamma}$ има размерност на съпротивление и се нарича **характеристично (или вълново) съпротивление на линията**:

$$Z_c = \frac{Z_0}{\gamma} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}. \quad (11.12)$$

Следователно токът във веригата може да се запише като:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c} e^{\gamma x}. \quad (11.13)$$

С други думи, при синусоидални токове и напрежения системата с телеграфните уравнения има следните решения:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^+ e^{-\gamma x} + \dot{U}^- e^{\gamma x} \\ \dot{i} = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c} e^{\gamma x} \end{cases} \quad (11.14)$$

където $\frac{\dot{U}^+}{Z_c}$ и $-\frac{\dot{U}^-}{Z_c}$ са амплитудите на тока в права и в обратна посока. За да се определят \dot{U}^+ и \dot{U}^- е необходимо да се анализира система (11.14) за $x = 0$ (т.е. при дължина на линията 0 m), като се предполага, че входното напрежение \dot{U}_1 напрежение и ток \dot{I}_1 са известни:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^+ e^{-\gamma x} + \dot{U}^- e^{\gamma x} \\ \dot{i} = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c} e^{\gamma x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}^+ + \dot{U}^- \\ Z_c \dot{I}_1 = \dot{U}^+ - \dot{U}^- \end{cases} \quad (11.15)$$

Решенията на система (11.15) са:

$$\begin{aligned} \dot{U}^+ &= 0,5 (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) = U^+ e^{j\varphi_1} \\ \dot{U}^- &= 0,5 (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) = U^- e^{j\varphi_2}, \end{aligned} \quad (11.16)$$

където U^+ и U^- са модулите на комплексните числа, а φ_1 и φ_2 - ъглите им.

11.1.3. Права и отразена вълна в предавателна линия

Ако в първото уравнение от (11.14) се положат уравнение (11.16) се получава:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}^+ e^{-\gamma x} + \dot{U}^- e^{\gamma x} = (U^+ e^{j\varphi_1}) e^{-(\alpha+j\beta)x} + (U^- e^{j\varphi_2}) e^{(\alpha+j\beta)x} = \\ &= (U^+ e^{-\alpha x}) e^{j(\varphi_1-\beta x)} + (U^- e^{\alpha x}) e^{j(\varphi_2+\beta x)}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Ако \dot{U} е комплексна амплитудна стойност, уравнение (11.17) може да бъде преобразувано в синусоидална форма по следния начин:

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$u(x, t) = U^+ e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x) + U^- e^{\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x). \quad (11.18)$$

Ако характеристикното съпротивление се представи в експоненциална форма ($Z_C = z_C e^{j\varphi_C}$), по подобен начин можем да се преобразува и токът в линията (второто уравнение от (11.14)):

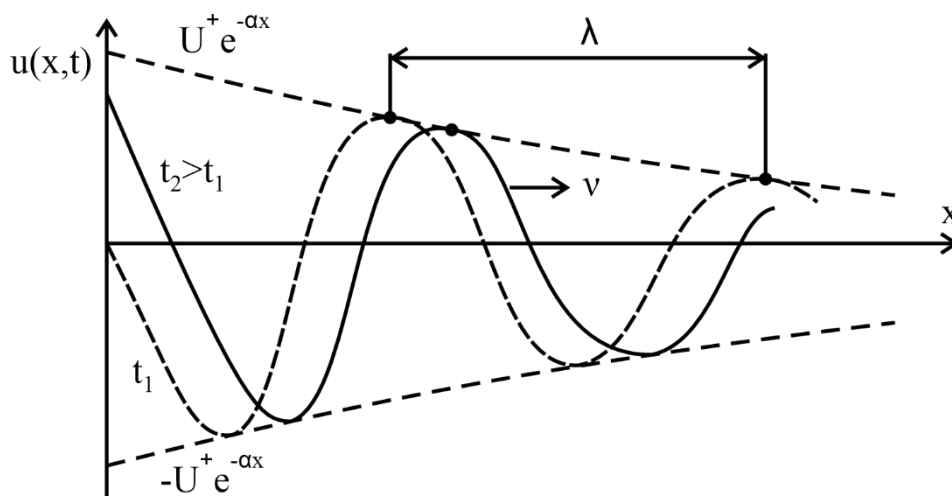
$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}^-}{Z_C} e^{\gamma x} = \frac{U^+ e^{j\varphi_1}}{z_C e^{j\varphi_C}} e^{-(\alpha+j\beta)x} - \frac{U^- e^{j\varphi_2}}{z_C e^{j\varphi_C}} e^{(\alpha+j\beta)x} = \\ &= \frac{U^+}{z_C} e^{-\alpha x} e^{j(\varphi_1 - \beta x - \varphi_C)} - \frac{U^-}{z_C} e^{\alpha x} e^{j(\varphi_2 + \beta x - \varphi_C)}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

В синусоидална форма токът става:

$$i(x, t) = \frac{U^+}{z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x - \varphi_C) - \frac{U^-}{z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x - \varphi_C). \quad (11.20)$$

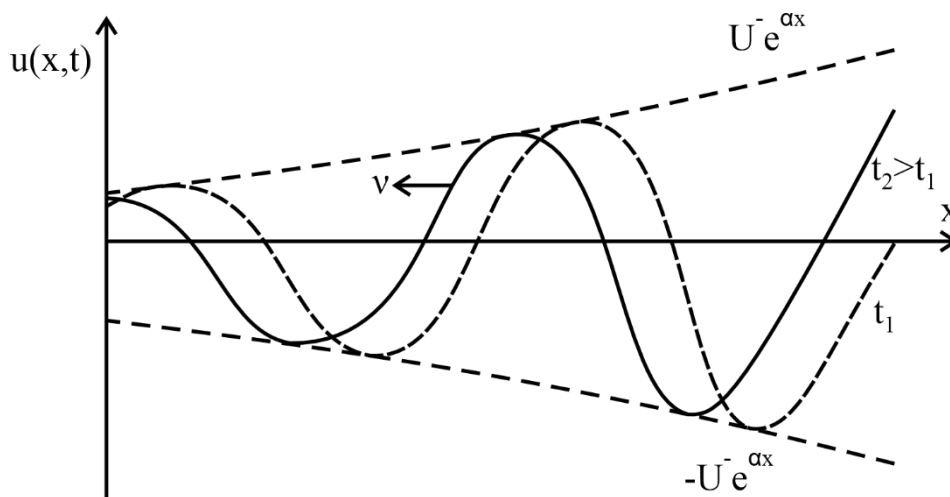
Синусоидалната форма на напрежението (уравнение (11.18)) представлява сума от две синусоидални съставки, които имат следния смисъл:

- Съставката $U^+ e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x)$ се нарича **права вълна**, като графичното ѝ изображение е представено на фиг. 11.5. От времедиagramата се вижда, че:
 - Амплитудата $U^+ e^{-\alpha x}$ затихва експоненциално по дължина на линията, поради отрицателния знак на степения показател. Скоростта на затихване зависи от константата на затихване α (реалната съставка от константата на предаване γ);
 - Синусоидата е функция както на времето, така и на пространството. Началната фаза на синусоидата се изменя по дължина на линията с $-\beta x$, където β е константата на фазата (имагинерната съставка от константата на предаване γ).
 - Синусоидата се измества във времето t по дължина на линията с определена скорост v . На фиг. 11.5 е показана нейната позиция за два момента от времето: t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$).



Фиг. 11.5. Права вълна на напрежението в предавателна линия

- Съставката $U^- e^{\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x)$ се нарича **отразена вълна** и е представена графично на фиг. 11.6. Вижда се, че:
- Амплитудата $U^- e^{\alpha x}$ се увеличава експоненциално по дължина на линията, тъй като степенният показател е положителен;
 - Синусоидата е показана за 2 момента от времето: t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$). Вижда се, че отразената вълна се движи в обратна посока (от товара към източника) с някаква скорост v .



Фиг. 11.6. Отражена вълна на напрежението в предавателна линия

По аналогичен начин в предавателните линии се разпространява тока:

- $\frac{U^+}{z_c} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x - \varphi_c)$ е правата вълна;
- $-\frac{U^-}{z_c} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x - \varphi_c)$ е отразената вълна.

Разликата е, че отразената вълна на тока е със знак минус (-), т.е. е инвертирана (умножена по минус едно).

11.1.4. Други параметри на предавателните линии

Други параметри на предавателните линии са фазовата скорост v и дължината на вълната λ . За определяне на v се приема, че фазата на правата вълна е константа:

$$\omega t + \varphi_1 - \beta x = const. \quad (11.21)$$

След диференциране на уравнение (11.21) се получава:

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \varphi_1 - \beta x) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0. \quad (11.22)$$

Съставката $\frac{dx}{dt}$ е именно скоростта на разпространение на вълната (фазовата скорост), т.е.:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \text{ m.s}^{-1}. \quad (11.23)$$

Дължината λ на движеща се вълна се дефинира като най-малкото разстояние, на което правата и отразената вълна се повтарят, т.е.:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \text{ m.} \quad (11.24)$$

β може да се изрази от уравнение (11.23) като $\beta = \frac{\omega}{v}$. Следователно дължината на вълната е функция на фазовата скорост и на честотата на синусоидалния сигнал:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{v}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi f}{v}} = \frac{v}{f} \text{ m.} \quad (11.25)$$

11.2. Видове предавателни линии

Уравненията на предавателна линия, които бяха изведени в предишния раздел, се отнасят за най-общия случай, когато константата на предаване γ и характеристичното съпротивление Z_c са комплексни числа. Но съществуват много ситуации, при които уравненията могат да бъдат значително опростени, някои от които ще бъдат разгледани в този раздел.

11.2.1. Линия без загуби

В реалния свят линиите без загуби не съществуват. Но съществуват редица ситуации, при които загубите са незначителни и могат да бъдат пренебрегнати. Това обикновено са линии, при които честотата на сигнала е много висока. В идеалният случай една линия е без загуби, когато са изпълнени следните условия:

$$R_0 = 0; \quad G_0 = 0. \quad (11.26)$$

Тогава константата на предаване добива следния вид:

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 j\omega C_0} = 0 + j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta. \quad (11.27)$$

С други думи, константата на затихване и фазовата константа на линия без загуби са съответно:

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}. \quad (11.28)$$

В случая характеристичното съпротивление става реално число:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{0 + j\omega L_0}{0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (11.29)$$

Тъй като $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ (от уравнение (11.28)), за фазовата скорост се получава:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (11.30)$$

Последното уравнение показва, че скоростта на разпространение на вълните в линия без загуби зависи единствено от индуктивността и капацитета на линията за единица дължина.

За паралелна двупроводна линия е известно, че индуктивността и капацитетът са съответно:

$$L_0 = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a};$$

$$C_0 = \frac{\pi \varepsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2a}},$$
(11.31)

където μ е магнитната проницаемост на средата около линията, $H.m^{-1}$; ε е диелектричната проницаемост на средата около линията, $F.m^{-1}$; d е разстоянието между двата проводника, m ; a е диаметърът на проводниците, m .

Следователно фазовата скорост на двупроводна линия без загуби е:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{2a} \frac{\pi \varepsilon}{\ln \frac{d}{2a}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$
(11.32)

Ако $\mu = \mu_0 \mu_r$ и $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, уравнението добива вида:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$
(11.33)

където $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ е скоростта на светлината, $m.s^{-1}$; ε_r е относителната диелектрична проницаемост на диелектрика между проводниците; μ_r е относителната магнитна проницаемост на средата около проводниците.

Обикновено диелектриците нямат магнитни свойства (т.е. $\mu_r = 1$), така че уравнение (11.33) се свежда до:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$
(11.34)

11.2.2. Линия без изкривявания

Получените по-рано зависимости за константата на предаване γ и характеристичното (вълновото) съпротивление Z_C са функция на честотата. Това означава, че когато предаваните сигнали са широкопектърни (например множество честоти в големи граници), параметрите на предавателната линия ще се изменят значително, което ще доведе до изкривяване на сигнала.

Една линия е без изкривявания когато следните три параметъра не зависят от честотата:

- константата на затихване α ;
- фазовата скорост v ;
- характеристичното съпротивление Z_C .

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Разглежда се предавателна линия, за която е изпълнено условието:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (11.35)$$

За такава линия константата на предаване става:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 \left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1\right) j\omega C_0 \left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1\right)} = \\ &= j\omega \sqrt{L_0 C_0} \sqrt{\left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1\right) \left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1\right)}. \end{aligned} \quad (11.36)$$

В горното уравнение се полага $\frac{G_0}{C_0} = \frac{R_0}{L_0}$:

$$\begin{aligned} \gamma &= j\omega \sqrt{L_0 C_0} \sqrt{\left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1\right) \left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1\right)} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1\right) = \\ &= \sqrt{L_0 C_0} \frac{R_0}{L_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Вижда се, че ако е изпълнено условия (11.35), константата на затихване $\alpha = R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$ не зависи от честотата ω .

За да се изрази фазовата скорост, се използва получената големина за $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ от уравнение (11.37):

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (11.38)$$

Вижда се, че и фазовата скорост също не зависи от честотата ω .

Най-накрая се определя характеристикното съпротивление:

$$Z_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{j\omega L_0 \cdot \frac{R_0}{j\omega L_0} + 1}{j\omega C_0 \cdot \frac{G_0}{j\omega C_0} + 1}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0} \frac{\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1}{\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1}}. \quad (11.39)$$

В уравнение (11.39) се полага $\frac{G_0}{C_0} = \frac{R_0}{L_0}$, при което за Z_C се получава:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0} \frac{\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1}{\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (11.40)$$

Вижда се, че характеристичното съпротивление също не зависи от честотата ω .

Следователно ако е изпълнено условието $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$, предавателната линия е неизкривяваща.

11.2.3. Линия с много ниско съпротивление

Разглежда се една предавателна линия, за която се използва проводник с много ниско съпротивление (суперпроводник). При тази ситуация проводниците на практика само насочват вълната, но параметрите на разпространение зависят единствено от свойствата на диелектрика около тях.

При суперпроводниците може да се приеме, че $R_0 = 0$, при което константата на предаване става:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0 \left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1 \right)} = \\ &= j\omega \sqrt{L_0 C_0} \sqrt{\left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1 \right)}. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Тъй като влиянието на проводника е пренебрежимо малко, предаването може да се разглежда като разпространение на електромагнитна вълна, при което може да се докаже, че константата на предаване е:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{j\omega \varepsilon} + 1 \right)}, \quad (11.42)$$

където σ е специфичната електропроводимост на диелектрика [S/m].

11.3. Предавателни линии с товар

В раздел 11.1 бяха изведени уравненията на предавателна линия, при които x се измерва считано от генератор:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^+ e^{-\gamma x} + \dot{U}^- e^{\gamma x} \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c} e^{\gamma x} \end{cases} \quad (11.43)$$

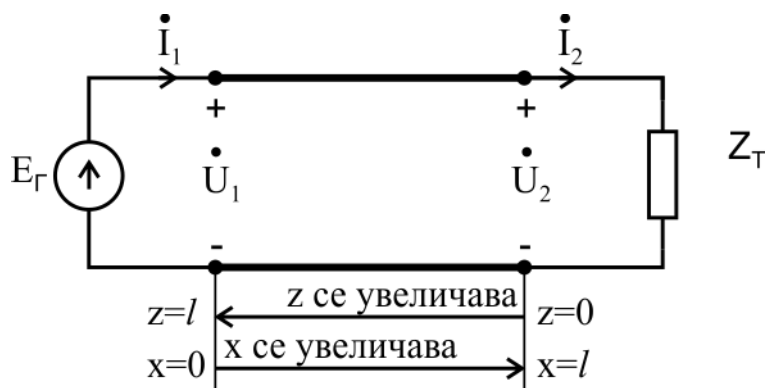
Но от тук нататък ще е по-удобно уравненията да се анализират в обратна посока, т.е. считано от товара (фиг. 11.7). Затова в система (11.43) се замества:

$$+x = -z \quad \text{и} \quad -x = +z, \quad (11.44)$$

при което се получава:

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^+ e^{\gamma z} + \dot{U}^- e^{-\gamma z} \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c} e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (11.45)$$



Фиг. 11.7. Промяна на отправната точка на предавателна линия

Константите \dot{U}^+ и \dot{U}^- могат да се определят, като системата се реши за $z = 0$, т.е. като се приеме, че напрежението \dot{U}_2 и токът \dot{I}_2 при товара са известни:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}^+ e^0 + \dot{U}^- e^0 \\ Z_c \dot{I}_2 = \dot{U}^+ e^0 - \dot{U}^- e^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}^+ + \dot{U}^- \\ Z_c \dot{I}_2 = \dot{U}^+ - \dot{U}^- \end{cases} \quad (11.46)$$

Решенията на система (11.46) са:

$$\begin{aligned} \dot{U}^+ &= 0,5 (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2); \\ \dot{U}^- &= 0,5 (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2). \end{aligned} \quad (11.47)$$

Пример 11.1. Предавателна линия с характеристично съпротивление $Z_c = 100 \Omega$ захранва товар $Z_T = 50 + j50 \Omega$. Падът на напрежението върху товара е измерен с волтметър: $U_T = 50 V$.

- Да се определят константите \dot{U}^+ и \dot{U}^- на предавателните уравнения;
- Ако дължината на линията е $l = 100 m$, а константата и на предаване е $\gamma = j0.6$, да се определят напрежението и токът на входа на линията.

Решение а):

Волтметърът измерва ефективна стойност. Ако се приеме нулева начална фаза на напрежението, за \dot{U}_2 се получава:

$$\dot{U}_2 = 50 e^{j0} = 50 V.$$

Следователно токът през товара е:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_T} = \frac{50}{50 + j50} = 0,5 - j0,5 \text{ A.}$$

Предавателните уравнения се анализират при $z = 0$:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^+ e^{\gamma z} + \dot{U}^- e^{-\gamma z} \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c} e^{-\gamma z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 50 = \dot{U}^+ + \dot{U}^- \\ 100 \cdot (0,5 - j0,5) = \dot{U}^+ - \dot{U}^- \end{cases}$$

Решенията на системата са:

$$\dot{U}^+ = 50 - j25 \text{ V;}$$

$$\dot{U}^- = j25 \text{ V.}$$

Решение б):

Вече може да се запишат предавателните уравнения на линията:

$$\begin{cases} \dot{U} = (50 - j25)e^{j0,6z} + j25e^{-j0,6z} \\ \dot{I} = \frac{50 - j25}{100} e^{j0,6z} - \frac{j25}{100} e^{-j0,6z} \end{cases}$$

Дължината на линията е $l = 100 \text{ m}$, т.е. за да се намерят тока и напрежението при източника, е необходимо да се замести $z = 100 \text{ m}$:

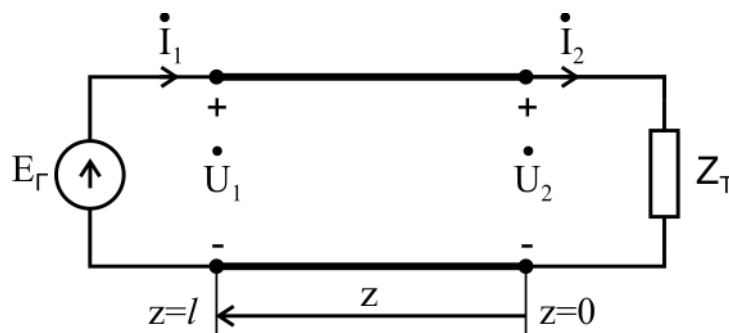
$$\dot{U}_1 = (50 - j25)e^{j0,6 \cdot 100} + j25e^{-j0,6 \cdot 100} = 80,9 \cdot e^{j32,4^\circ} \text{ V;}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{50 - j25}{100} e^{j0,6 \cdot 100} - \frac{j25}{100} e^{-j0,6 \cdot 100} = 0,31 \cdot e^{j36,2^\circ} \text{ A.}$$

11.3.1. Коефициент на отражение

За този раздел отново се използват предавателните уравнения, с начална точка при товара (фиг. 11.8):

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^+ e^{\gamma z} + \dot{U}^- e^{-\gamma z} \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c} e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (11.48)$$



Фиг. 11.8. Предавателна линия, с начална точка при товара

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Комплексното съпротивление на товара Z_T може да се определи чрез Закона на Ом:

$$Z_T = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}. \quad (11.49)$$

Комплексните напрежение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 могат да бъдат намерени, като в система (11.48) се замести $z = 0$, след което двете уравнения (за напрежението и тока) се положат в (11.49):

$$Z_T = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}^+ e^{\gamma \cdot 0} + \dot{U}^- e^{-\gamma \cdot 0}}{\frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{\gamma \cdot 0} - \frac{\dot{U}^-}{Z_C} e^{-\gamma \cdot 0}} = Z_C \frac{\dot{U}^+ + \dot{U}^-}{\dot{U}^+ - \dot{U}^-}. \quad (11.50)$$

Разглеждат се две ситуации:

- В предавателната линия няма отразена вълна ($\dot{U}^- = 0$)

Тогава съпротивлението на товара е:

$$Z_T = Z_C \frac{\dot{U}^+ + \dot{U}^-}{\dot{U}^+ - \dot{U}^-} = Z_C \frac{\dot{U}^+ + 0}{\dot{U}^+ + 0} = Z_C. \quad (11.51)$$

С други думи, когато съпротивлението на товара е равно на характеристичното на линията, във веригата няма да има отразена вълна.

- В предавателната линия има отразена вълна ($\dot{U}^- \neq 0$)

В случай че има отразена вълна, нейната максимална амплитуда може да се определи съгласно:

$$Z_T = Z_C \frac{\dot{U}^+ + \dot{U}^-}{\dot{U}^+ - \dot{U}^-} \rightarrow \dot{U}^- = \dot{U}^+ \frac{Z_T - Z_C}{Z_T + Z_C}. \quad (11.52)$$

Уравнение (11.52) може да бъде описано по следния начин: **отразената вълна се дължи на правата вълна, която се отразява в товара.**

Това позволява да се дефинира т.нар. коефициент на отражение $\dot{\Gamma}_T$:

$$\dot{\Gamma}_T = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{Z_T - Z_C}{Z_T + Z_C} = \Gamma e^{j\varphi_\Gamma}, \quad (11.53)$$

където φ_Γ фазовият ъгъл на коефициента на отражение.

В повечето ситуации е нежелателно да има отразена вълна по следните причини:

- Част от енергията се връща обратно към източника, т.е. остава неизползвана от товара (например ако една антена отразява част от

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

излъчвания сигнал, това означава, че тя не излъчва с максимална мощност);

- Наличието на отразена вълна води до изкривявания във формата на вълната.

Следователно в идеалната ситуация коефициентът на отражение трябва да бъде нула ($\dot{\Gamma}_T = 0$). В общия случай коефициентът на отражение се изменя от 0 до 1, като той помага да се открие наличие на отразена вълна и да се търсят причините за нея.

Пример 11.2. Предавателна линия свързва предавател и антена. Характеристичното съпротивление на линията и съпротивлението на товара (антената) са съответно $Z_C = 50 \Omega$ и $Z_T = 50 + j50 \Omega$. Да се определи коефициентът на отражение на товара:

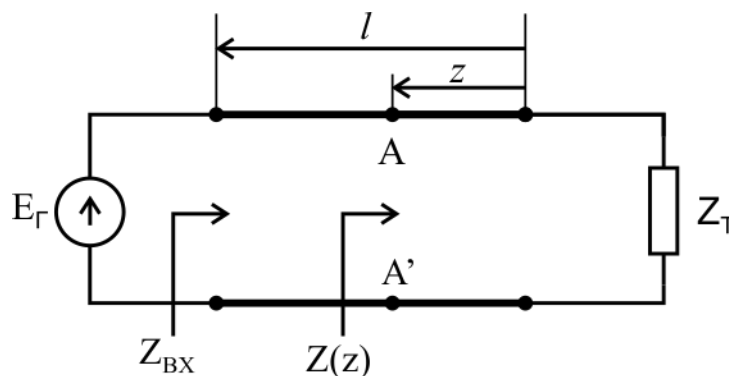
Решение: Дадените съпротивления се заместват в уравнение (11.53):

$$\dot{\Gamma}_T = \frac{Z_T - Z_C}{Z_T + Z_C} = \frac{50 + j50 - 50}{50 + j50 + 50} = \frac{j1}{2 + j1} = \frac{e^{j90^\circ}}{2,2e^{j27^\circ}} = 0,45e^{j63^\circ}.$$

Вижда се, че $\dot{\Gamma}_T$ не е нула, което означава че антената изпраща с по-малка мощност от максимално възможната.

11.3.2. Входно съпротивление и коефициент на отражение

Разглежда се товар, захранван от източник посредством предавателна линия с дължина l (фиг. 11.9)



Фиг. 11.9. Предавателна линия и определяне на входното ѝ съпротивление

Може да се дефинират два вида съпротивления на линията:

- Входно съпротивление на линията Z_{BX} при генератора (на разстояние l от товара);
- Входно съпротивление на линията $Z(z)$ на какво да е разстояние z от товара.

В общия случай може да се определи входното съпротивление $Z(z)$, използвайки тока и напрежението на разстояние z от товара:

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$\begin{aligned}\dot{U}(z) &= \dot{U}^+ e^{\gamma z} + \dot{U}^- e^{-\gamma z}; \\ \dot{I}(z) &= \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_C} e^{-\gamma z}.\end{aligned}\quad (11.54)$$

Тъй като коефициентът на отражение е $\dot{\Gamma}_T = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+}$, т.е. $\dot{U}^- = \dot{\Gamma}_T \cdot \dot{U}^+$, уравнения (11.54) могат да бъдат представени чрез коефициента на отражение:

$$\begin{aligned}\dot{U}(z) &= \dot{U}^+ (e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z}); \\ \dot{I}(z) &= \frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z}).\end{aligned}\quad (11.55)$$

Чрез уравнения (11.55) може да се изрази входното съпротивление $Z(z)$:

$$Z(z) = \frac{\dot{U}(z)}{\dot{I}(z)} = \frac{\dot{U}^+ (e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})}{\frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})} = Z_C \frac{(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})}{(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})} \Omega. \quad (11.56)$$

Ако в уравнение (11.56) се положи уравнение (11.53) ($\dot{\Gamma}_T = \frac{Z_T - Z_C}{Z_T + Z_C}$) се получава:

$$\begin{aligned}Z(z) &= Z_C \frac{(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})}{(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})} = Z_C \frac{((Z_T + Z_C)e^{\gamma z} + (Z_T - Z_C)e^{-\gamma z})}{((Z_T + Z_C)e^{\gamma z} - (Z_T - Z_C)e^{-\gamma z})} = \\ &= Z_C \frac{(Z_T(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) + Z_C(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}))}{(Z_C(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) + Z_T(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}))}.\end{aligned}\quad (11.57)$$

Функциите хиперболически синус и хиперболически косинус се дефинират по следния начин:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (11.58)$$

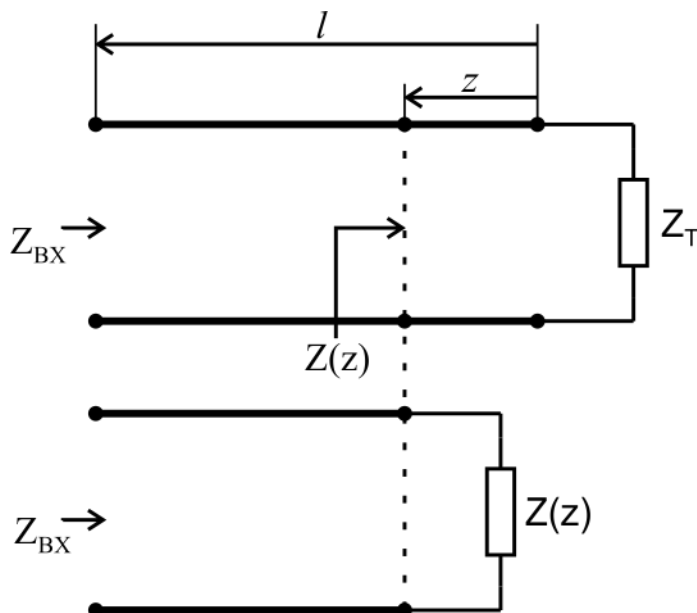
Следователно уравнение (11.57) става:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_T \cosh \gamma z + Z_C \sinh \gamma z)}{(Z_C \cosh \gamma z + Z_T \sinh \gamma z)} = Z_C \frac{(Z_T + Z_C \operatorname{tgh} \gamma z)}{(Z_C + Z_T \operatorname{tgh} \gamma z)}. \quad (11.59)$$

Получената зависимост позволява да се определи входното съпротивление на линията на какво да е разстояние z от товара. Това означава, че може да се създаде еквивалентна заместваща схема, в която товарът е $Z(z)$, както е показано на фиг. 11.10. Това също така означава, че може да се определи коефициентът на отражение $\dot{\Gamma}(z)$ на разстояние z от товара:

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$\dot{\Gamma}(z) = \frac{Z(z) - Z_c}{Z(z) + Z_c} = \frac{Z_c \frac{(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z})}{(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z})} - Z_c}{Z_c \frac{(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z})}{(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z})} + Z_c} = \frac{\dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z} + \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} + e^{\gamma z}} = \dot{\Gamma}_L e^{-2\gamma z}. \quad (11.60)$$



Фиг. 11.10. Създаване на еквивалентна заместваща схема чрез входното съпротивление на част от дългата линия

Пример 11.3. Предавателна линия с константа на предаване $\gamma = 0,01 + j0,05$ и характеристично съпротивление $Z_c = 50 \Omega$ свързва източник и товар $Z_T = 50 + j50 \Omega$. Да се определи входното съпротивление на линията на разстояния $z = 0 \text{ m}$ (при товара) и на разстояние $z = 10 \text{ m}$ от товара.

Решение: Входното съпротивление при товара е:

$$Z(0) = Z_c \frac{(Z_T + Z_c \operatorname{tgh} \gamma z)}{(Z_c + Z_T \operatorname{tgh} \gamma z)} = Z_c \frac{(Z_T + Z_c \operatorname{tgh}(0))}{(Z_c + Z_T \operatorname{tgh}(0))} = Z_T = 50 + j50 \Omega.$$

Входното съпротивление на разстояние 10 m от товара също може да се определи чрез горната зависимост, но това налага използването на хиперболични функции, което не е удобно. По-удобно е да се определи, използвайки коефициента на отражение:

$$\dot{\Gamma}_T = \frac{Z_T - Z_c}{Z_T + Z_c} = \frac{50 + j50 - 50}{50 + j50 + 50} = 0,2 + j0,4 = 0,447e^{j1,11^\circ}.$$

За входното съпротивление на разстояние $z = 10 \text{ m}$ от товара се получава:

$$Z(z=10) = Z_C \frac{(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})}{(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z})} = 50 \frac{e^{(0,1+j0,5)} + 0,447e^{j1,11}e^{-(0,1+j0,5)}}{e^{(0,1+j0,5)} - 0,447e^{j1,11}e^{-(0,1+j0,5)}} =$$

$$= 50 \frac{2,91 + j1,7}{1,4249 + j0,6695} = 106,68 + j9,53 \Omega.$$

11.3.3. Линия без загуби, свързана към товар

Уравнение (11.59), изразено в предходния раздел на темата, се отнася за най-общият случай, когато константата на предаване е комплексна. Тогава е наложително използването на хиперболични функции. Но при линии без загуби ($\alpha = 0$ и $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$) уравнение (11.59) се опростява значително:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_T + Z_C \operatorname{tgh} \gamma z)}{(Z_C + Z_T \operatorname{tgh} \gamma z)} = Z_C \frac{(Z_T + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_T \operatorname{tg} \beta z)}. \quad (11.61)$$

Също така при линия без загуби коефициентът на отражение става:

$$\dot{\Gamma}(z) = \dot{\Gamma}_T e^{-2\gamma z} = \dot{\Gamma}_T e^{-j2\beta z} = \Gamma_T e^{j\varphi_T} e^{-j2\beta z} = \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}. \quad (11.62)$$

Ако $\dot{\Gamma}(z)$ се представи във времевата област като синусоида, се получава:

$$\Gamma(t) = \Gamma_T \cdot \sin(\omega t + \varphi_T - 2\beta z). \quad (11.63)$$

С други думи, коефициентът на отражение има амплитуда Γ_T и начална фаза $\varphi_T - 2\beta z$, зависеща от разстоянието z от товара. В действителност това означава, че максималната и минималната стойност на коефициента на отражение са някъде по дължина на линията. Вече беше установено, че напрежението и токът по дължина на линията се изменят съгласно:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ (e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}) = \dot{U}^+ e^{j\beta z} (1 + \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)});$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{j\beta z} (1 - \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}). \quad (11.64)$$

Ако се приеме, че $\dot{U}^+ = U^+ e^{j\varphi_U}$ и се замести в първото уравнение, се получава:

$$\dot{U}(z) = U^+ e^{j(\beta z + \varphi_U)} (1 + \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}). \quad (11.65)$$

Съставките $e^{j(\beta z + \varphi_U)}$ и $e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}$ съответстват на синусоиди, т.е. приемат стойности от -1 до +1. Следователно максимумът и минимумът на напрежението са съответно:

$$U_{MAX} = U^+ (1 + \Gamma_T);$$

$$U_{MIN} = U^+ (1 - \Gamma_T). \quad (11.66)$$

Коефициент на стояща вълна

Коефициентът на стояща вълна (standing wave ratio) се дефинира като отношението на максималното към минималното напрежение:

$$SWR = \frac{U_{MAX}}{U_{MIN}} = \frac{1 + \Gamma_T}{1 - \Gamma_T}. \quad (11.67)$$

SWR приема стойности от 1 до ∞ :

- При нулев коефициент на отражение (отсъствие на отразена вълна), SWR приема стойност 1, което говори за наличие на бягаща вълна;
- При коефициент на отражение 1 (товарът отразява цялата постъпваща мощност), SWR приема стойност ∞ , което говори за наличие на стояща вълна;
- Всички останали ситуации представляват комбинация от бягаща и стояща вълна, а коефициентът SWR показва колко добре са съгласувани линията и товарът.

В определени ситуации коефициентът SWR може да бъде измерен експериментално. Тогава големината на коефициента на отражение може да се определи съгласно:

$$\Gamma_T = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}. \quad (11.68)$$

Пример 11.4. Линия без загуби с дължина $l = 100 \text{ m}$ и характеристично съпротивление $Z_C = 100 \Omega$ захранва товар $Z_T = 10 + j10 \Omega$. Ако дължината на вълната е $\lambda = 55 \text{ m}$, да се определят входното съпротивление Z_{BX} на линията, коефициентът на отражение $\dot{\Gamma}(z)$ при генератора и коефициентът на стояща вълна SWR .

Решение: Първо следва да се определи константата на фазата β :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{55} = 0,1142 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Следователно входното съпротивление на линията при генератора (т.е. при $z = 100 \text{ m}$) е:

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= Z_C \frac{Z_T + jZ_C \operatorname{tg}(\beta z)}{Z_C + jZ_T \operatorname{tg}(\beta z)} = 100 \frac{10 + j10 + j100 \operatorname{tg}(0,1142 \cdot 100)}{100 + j(10 + j10) \operatorname{tg}(0,1142 \cdot 100)} = \\ &= 100 \frac{10 + j10 + j100 \cdot (-2,213)}{100 + j(10 + j10) \cdot (-2,213)} = 38,3 - j166,0 \Omega. \end{aligned}$$

Коефициентът на отражение на товара е:

$$\dot{\Gamma}_T = \frac{Z_T - Z_C}{Z_T + Z_C} = \frac{10 + j10 - 100}{10 + j10 + 100} = 0,82e^{j2,94^\circ}.$$

Следователно коефициентът на отражение при генератора е:

$$\dot{\Gamma}(z) = \dot{\Gamma}_T e^{-j2\beta z} = 0,82e^{j2,94^\circ} \cdot e^{-j2 \cdot 0,1142 \cdot 100} = 0,82e^{-j1,05^\circ}.$$

За коефициента на стояща вълна се получава:

$$SWR = \frac{1 + \Gamma_T}{1 - \Gamma_T} = \frac{1 + 0,82}{1 - 0,82} = 10,11.$$

Положение на минимумите и максимумите по дължина на линията

Разглеждат се отново получените уравнения (11.64), представящи изменението на напрежението и тока по дължина на линията:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= U^+ e^{j(\beta z + \varphi_U)} (1 + \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}); \\ \dot{I}(z) &= \frac{U^+}{Z_C} e^{j(\beta z + \varphi_U)} (1 - \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}). \end{aligned} \quad (11.69)$$

Този път целта е да се види на какво разстояние от товара се намират минимумите и максимумите на напрежението. Тъй като $e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}$ представлява синусоида ($\sin(\omega t + \varphi_T - 2\beta z)$), напрежението ще има минимум, когато синусът има стойност -1 , т.е. когато $\varphi_T - 2\beta z$ е равно на $-\pi, -3\pi, -5\pi$ и т.н. С други думи, условието за минимум на напрежението е:

$$\varphi_T - 2\beta z = -(2n + 1)\pi, \quad (11.70)$$

където $n = 0, 1, 2, \dots$. На същото разстояние z , токът във веригата ще има максимум, заради знакът минус (-) пред $\Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}$. Това условие може да се анализира:

- Първият минимум е при $\varphi_T - 2\beta z = -\pi$, т.е. на разстояние:

$$z_{MIN1} = \frac{\varphi_T + \pi}{2\beta} \text{ m.} \quad (11.71)$$

- Следващият минимум е при $\varphi_T - 2\beta z = -3\pi$:

$$z_{MIN2} = \frac{\varphi_T + 3\pi}{2\beta} \text{ m.} \quad (11.72)$$

По дефиниция една дължина на вълната е $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, т.е.:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \rightarrow \frac{\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \frac{1}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi}. \quad (11.73)$$

Следователно условията за минимум могат да се запишат по следния начин:

$$\begin{aligned} z_{MIN1} &= \frac{\varphi_T + \pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi} (\varphi_T + \pi); \\ z_{MIN2} &= \frac{\varphi_T + 3\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi} (\varphi_T + 3\pi). \end{aligned} \quad (11.74)$$

В общия случай:

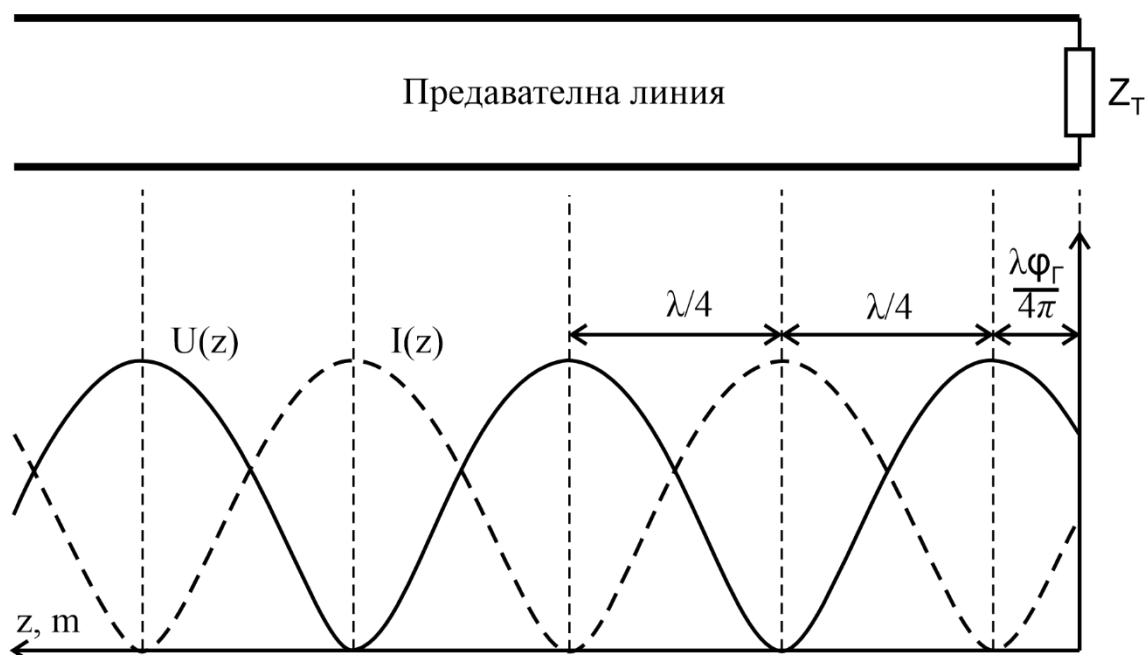
ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$z_{MIN} = \frac{\lambda}{4\pi} (\varphi_{\Gamma} + (2n + 1)\pi), \quad (11.75)$$

където $n = 0, 1, 2, \dots$. С други думи, минимумите са на всяка полувълна $\frac{\lambda}{2}$. Отчитайки, че минимумите и максимумите са на равни разстояние един от друг, т.е. максимумите на напрежението са на разстояние $\frac{\lambda}{4}$ от минимумите:

$$z_{MAX} = \frac{\lambda}{4\pi} (\varphi_{\Gamma} + (2n + 1)\pi) + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4\pi} (\varphi_{\Gamma} + 2n\pi). \quad (11.76)$$

Получените зависимости са представят и в графичен вид на фиг. 11.11.



Фиг. 11.11. Минимуми и максимуми на токовете и напреженията по дължина на линията при линия без загуби

Описаното поведение може да се разгледа за няколко частни случая.

Съгласувана линия без загуби

Разглежда се ситуацията, при която товарът и линия са съгласувани:

$$Z_C = Z_T. \quad (11.77)$$

Следователно входното съпротивление във всяка точка от линията е:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_T + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_T \operatorname{tg} \beta z)} = Z_C \frac{(Z_C + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)} = Z_C \Omega. \quad (11.78)$$

С други думи, когато товарът и линията са съгласувани, входното съпротивление на веригата е константа и е равно на характеристикното съпротивление на линията Z_C . Следователно коефициентът на отражение също е константа на всяко място във веригата:

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$\dot{\Gamma}(z) = \frac{Z(z) - Z_C}{Z(z) + Z_C} = \frac{Z_C - Z_C}{Z_C + Z_C} = 0. \quad (11.79)$$

За напрежението и тока във веригата се получава:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}^+ e^{j\beta z} (1 + \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}) = \dot{U}^+ e^{j\beta z}; \\ \dot{I}(z) &= \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{j\beta z} (1 - \Gamma_T e^{j(\varphi_T - 2\beta z)}) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{j\beta z}, \end{aligned} \quad (11.80)$$

а коефициентът на стояща вълна е:

$$SWR = \frac{1 + \Gamma_T}{1 - \Gamma_T} = 1. \quad (11.81)$$

От получените стойности се вижда, че напрежението и токът имат само права вълна, т.е. нямат отразена вълна. С други думи, цялата мощност, която достига до товара, се консумира от него и няма отразена мощност обратно към източника.

Линия без загуби дадена на късо

Друга интересна ситуация е линия без загуби, чийто край е даден на късо:

$$Z_T = 0. \quad (11.82)$$

При тази ситуация входното съпротивление е:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_T + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_T \operatorname{tg} \beta z)} = Z_C \frac{(0 + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + 0)} = jZ_C \operatorname{tg} \beta z, \quad (11.83)$$

т.е. за тази ситуация $Z(z)$ е чисто реактивно и се изменя от $-\infty$ до $+\infty$. Следователно коефициентът на отражение е:

$$\dot{\Gamma}_L = \frac{Z_T - Z_C}{Z_T + Z_C} = \frac{0 - Z_C}{0 + Z_C} = -1. \quad (11.84)$$

Напрежението и токът по дължина на линията се изменят съгласно:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}^+ (e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_L e^{-j\beta z}) = \dot{U}^+ (e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}) = \\ &= \dot{U}^+ (\cos \beta z + j \sin \beta z - \cos \beta z + j \sin \beta z) = 2j\dot{U}^+ \sin \beta z; \\ \dot{I}(z) &= \frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_L e^{-j\beta z}) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}) = 2 \frac{\dot{U}^+}{Z_C} \cos \beta z. \end{aligned} \quad (11.85)$$

Като се има предвид, че $\sin \beta z$ приема стойности от -1 до $+1$, максималната и минималната стойност на напрежението са:

$$U_{MAX} = 2 |j\dot{U}^+| V; \quad (11.86)$$

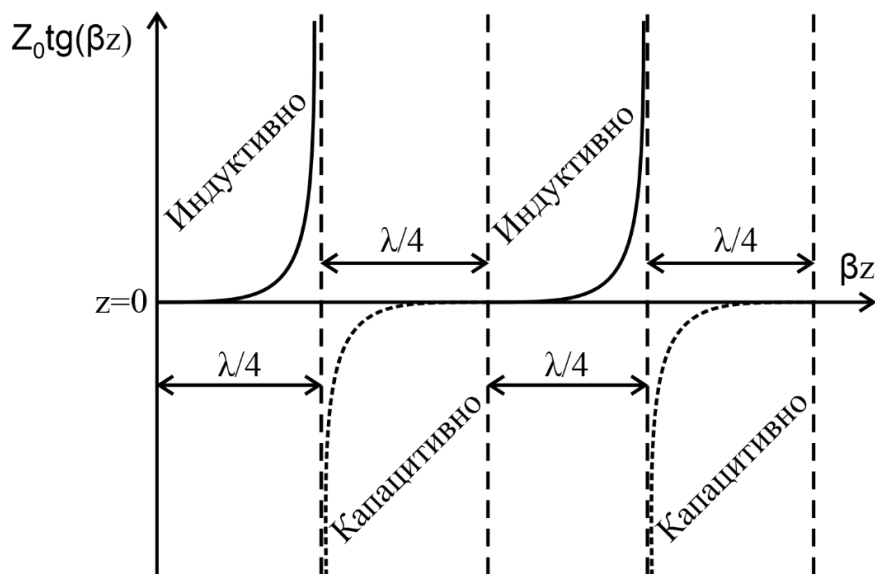
ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$U_{MIN} = 0 V.$$

Следователно коефициентът на стояща вълна е:

$$SWR = \frac{U_{MAX}}{U_{MIN}} = \infty, \quad (11.87)$$

т.е. по линията има стояща вълна и няма бягаща вълна, така че няма консумация на мощност. Графичното представяне на уравнение (11.83) за входното съпротивление $Z(z)$ е представено на фиг. 11.12.



Фиг. 11.12. Изменение на реактивното съпротивление по дължина на линия без загуби в режим на късо съединение

Вижда се, че реактивното съпротивление може да бъде или чисто капацитивно или чисто индуктивно, в зависимост от дължината на линията. Ако дължината на линията се увеличи/намали с една полуълна ($\frac{\lambda}{2}$), съпротивлението не се изменя.

При $z = 0$ съпротивлението е $Z(z) = 0$, т.е. няма предаване на мощност. Това се потвърждава и от стойностите на напрежението и тока при товара:

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= 2j\dot{U}^+ \sin(\beta \cdot 0) = 0 V; \\ \dot{I}(0) &= 2 \frac{\dot{U}^+}{Z_c} \cos(\beta \cdot 0) = 2 \frac{\dot{U}^+}{Z_c} A. \end{aligned} \quad (11.88)$$

С други думи:

- токът има максимум при товара;
- напрежението има максимум на разстояние $\frac{\lambda}{2}$ от товара;
- отразената вълна на тока е равна на правата.

Линия без загуби на празен ход

Друга интересна ситуация е линия без загуби на празен ход:

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

$$Z_T = \infty. \quad (11.89)$$

Входното съпротивление на такава линия е:

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_c \frac{(Z_T + jZ_c \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_c + jZ_T \operatorname{tg} \beta z)} = Z_c \frac{\left(1 + j \frac{Z_c}{Z_T} \operatorname{tg} \beta z\right)}{\left(\frac{Z_c}{Z_T} + j \operatorname{tg} \beta z\right)} = Z_c \frac{(1 + 0)}{(0 + j \operatorname{tg} \beta z)} = \\ &= -jZ_c \operatorname{cotg} \beta z \quad \Omega. \end{aligned} \quad (11.90)$$

За коефициента на отражение се получава:

$$\dot{\Gamma}_T = \frac{Z_T - Z_c}{Z_T + Z_c} = \frac{1 - \frac{Z_c}{Z_T}}{1 + \frac{Z_c}{Z_T}} = \frac{1 - \frac{Z_c}{\infty}}{1 + \frac{Z_c}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \quad (11.91)$$

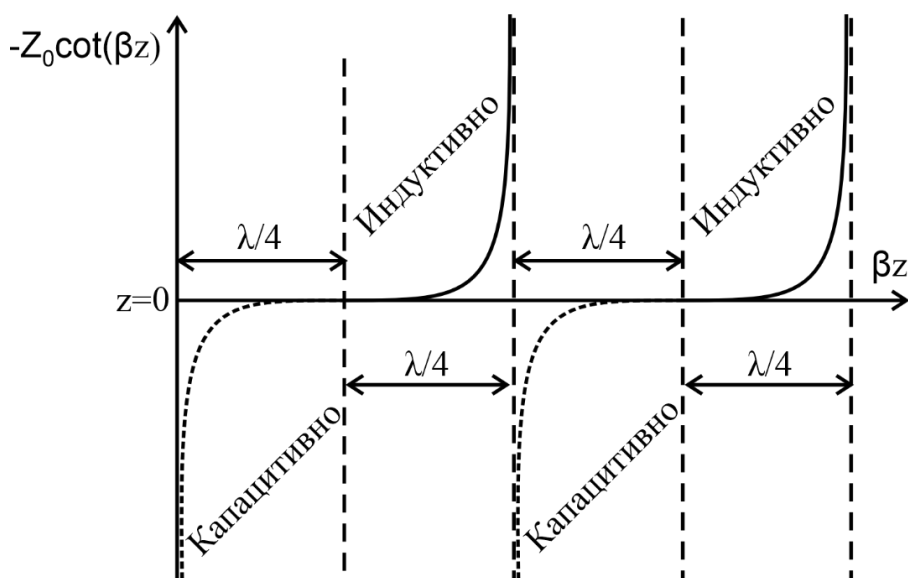
Следователно напрежението и токът по дължина на линията се изменят съгласно:

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}^+ (e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}) = \dot{U}^+ (e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}) = 2\dot{U}^+ \cos \beta z; \\ \dot{I}(z) &= \frac{\dot{U}^+}{Z_c} (e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}) = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} (e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}) = 2 \frac{\dot{U}^+}{Z_c} \sin \beta z. \end{aligned} \quad (11.92)$$

Коефициентът на стояща вълна е:

$$SWR = \frac{1 + \Gamma_T}{1 - \Gamma_T} = \frac{2U^+}{0} = \infty, \quad (11.93)$$

т.е. отново се получава стояща вълна. Уравнение (11.90) е представено в графичен вид на фиг. 11.13.



Фиг. 11.13. Изменение на реактивното съпротивление по дължина на линия без загуби в режим на празен ход

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Отново се вижда, че съпротивлението е или чисто индуктивно, или чисто капацитивно, в зависимост от дължината на линията. Напрежението и токът при товара (при $z = 0$) са:

$$\begin{aligned}\dot{U}(0) &= 2j\dot{U}^+ \cos(\beta \cdot 0) = 2j\dot{U}^+ V; \\ \dot{I}(z) &= 2 \frac{\dot{U}^+}{Z_C} \sin(\beta \cdot 0) = 0 A.\end{aligned}\tag{11.94}$$

Следователно:

- максималното напрежение е при товара
- максималният ток е на разстояние $\frac{\lambda}{2}$ от товара
- няма разсейване на мощност в товара ($P = I^2 \operatorname{Re}\{Z_T\} = 0$), така че отразената вълна на напрежението е равна на правата.

Ако входното съпротивленията на празен ход и входното съпротивление на късо съединение на линията се умножат, се получава:

$$Z_{\text{ВХ.ПХ}} \cdot Z_{\text{ВХ.КС}} = -jZ_C \cot \beta z \cdot jZ_C \operatorname{tg} \beta z = Z_C^2.\tag{11.95}$$

С други думи, характеристичното съпротивление на една линия може да се определи експериментално, чрез измерване на реактивните съпротивления в режими на празен ход и късо съединение:

$$Z_C = \sqrt{Z_{\text{ВХ.ПХ}} \cdot Z_{\text{ВХ.КС}}}.\tag{11.96}$$

11.4. Мощности в предавателните линии

За да се определи потокът на моментната мощност в дадена точка z от линията, в общия случай токът и напрежението следва да се умножат:

$$p(z, t) = u(z, t) \cdot i(z, t).\tag{11.97}$$

Ако комплексните мощност и ток са:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ (e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z}) \quad \text{и} \quad \dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_T e^{-\gamma z}),\tag{11.98}$$

то активната мощност се определя съгласно:

$$P(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \dot{U}(z) \dot{I}(z)^* \}.\tag{11.99}$$

В случай на линия без загуби напрежението и токът са:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ (e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}) \quad \text{и} \quad \dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}).\tag{11.100}$$

Като се има предвид, че при линия без загуби характеристикното съпротивление е чисто активно, ако коефициентът на отражение е $\dot{\Gamma}_L = \Gamma_L e^{j\varphi_\Gamma}$, за активната мощност се получава:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}^+ (e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}) \left(\frac{\dot{U}^+}{Z_C} (e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_T e^{-j\beta z}) \right)^* \right\} = \\
 &= \frac{|\dot{U}^+|^2}{2Z_C} \operatorname{Re} \left\{ (e^{j\beta z} + \Gamma_T e^{j(\varphi_\Gamma - \beta z)}) (e^{-j\beta z} - \Gamma_T e^{-j(\varphi_\Gamma - \beta z)}) \right\} = \\
 &= \frac{|\dot{U}^+|^2}{2Z_C} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\beta z} e^{-j\beta z} + \Gamma_T e^{j(\varphi_\Gamma - \beta z)} e^{-j\beta z} - \Gamma_T e^{-j(\varphi_\Gamma - \beta z)} e^{j\beta z} - \Gamma_T e^{j(\varphi_\Gamma - \beta z)} \Gamma_T e^{-j(\varphi_\Gamma - \beta z)} \right\} = \\
 &= \frac{(U^+)^2}{2Z_C} \operatorname{Re} \left\{ 1 - \Gamma_T^2 + \Gamma_T (e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)} - e^{-j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{11.101}$$

Съставката $\Gamma_T (e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)} - e^{-j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)})$ е чисто реактивна, защото:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_T (e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)} - e^{-j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}) &= \\
 &= \sin(\varphi_\Gamma - 2\beta z) - j \cos(\varphi_\Gamma - 2\beta z) - \sin(-j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)) + \\
 &+ j \cos(-j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)) = j 2 \Gamma_T (\sin(\varphi_\Gamma - 2\beta z)).
 \end{aligned} \tag{11.102}$$

Следователно за активната мощност в линия без загуби се получава:

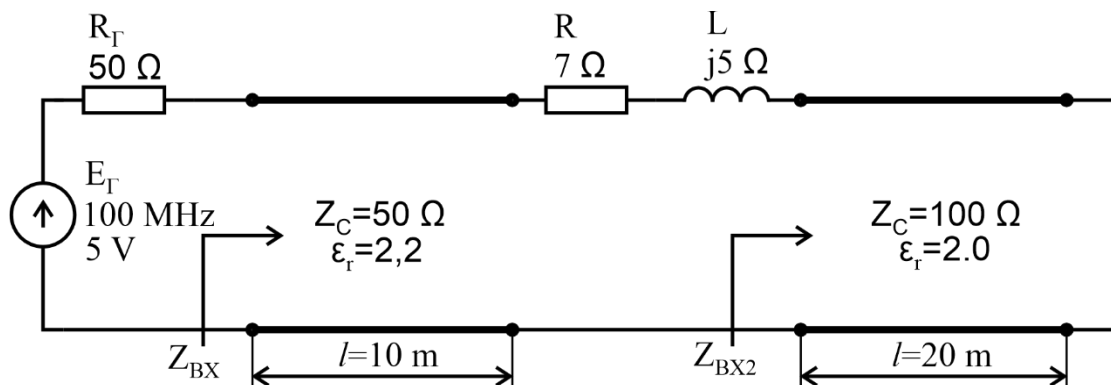
$$P = \frac{(U^+)^2}{2Z_C} (1 - \Gamma_T^2), \tag{11.103}$$

т.е. P не е функция на дължината z , а е една и съща по цялата дължина на линията.

11.5. Анализ на дълги линии без загуби

В този раздел са разгледани няколко примера за анализ на линии без загуби.

Пример 11.5. Схемата от фиг. 11.14 съдържа две линии без загуби. Да се определи входното съпротивление Z_{BX} и входната мощност на първата линията.



Фиг. 11.14. Схема към пример 11.5

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Решение: Първо следва да се определят дължините на вълните за двете линии, като за целта се използват фазовите им скорости:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,2}} = 2,02 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,0}} = 2,12 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Следователно дължините на вълните за двете линии са съответно:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{2,02 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} = 2,02 \text{ m};$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{2,12 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} = 2,12 \text{ m}.$$

Следващата стъпка е да се определят фазовите константи на двете линии:

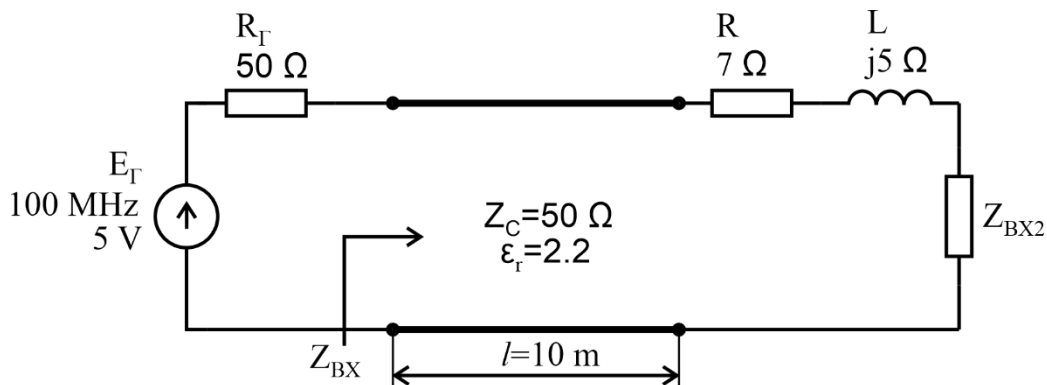
$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2,02} = 3,11 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1};$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{2,12} = 2,96 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Вече може да се определи входното съпротивление на втората линия, имаща дължина $z = 20 \text{ m}$. Тъй като втората линия е дадена на късо, се замества $Z_T = 0$:

$$Z_{\text{BX2}} = Z_C \frac{Z_T + jZ_C \operatorname{tg} \beta_2 z}{Z_C + jZ_T \operatorname{tg} \beta_2 z} = 100 \frac{0 + j100 \operatorname{tg}(2,96 \cdot 20)}{100 + j \cdot 0 \cdot \operatorname{tg} \beta_2 z} = -j53,4 \Omega.$$

Следващата стъпка е да се създаде еквивалентна заместваща схема, като втората линия се замени с еквивалентното комплексно съпротивление Z_{BX2} (фиг. 11.15).



Фиг. 11.15. Еквивалентна схема към пример 11.5

Сумарният товар на предавателната линия е:

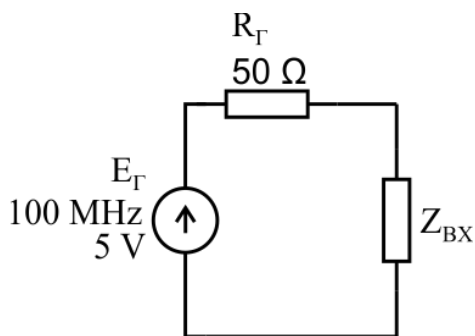
$$Z_T = 7 + j5 + Z_{\text{BX2}} = 7 + j5 - j53,4 = 7 - j48,4 \Omega.$$

Следователно входното съпротивление на първата линия, с дължина $z = 10 \text{ m}$, е:

$$\begin{aligned} Z_{\text{BX}} &= Z_C \frac{Z_T + jZ_C \operatorname{tg} \beta_1 z}{Z_C + jZ_T \operatorname{tg} \beta_1 z} = 50 \frac{7 - j48,4 + j50 \operatorname{tg}(3,11 \cdot 10)}{50 + j(7 - j48,4) \operatorname{tg}(3,11 \cdot 10)} = \\ &= 50 \frac{7 - j48,4 + j50(-0,33)}{50 + (j7 + 48,4)(-0,33)} = 16,7 - j94,2 \Omega. \end{aligned}$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

За да се определи влизащата в линията мощност се създава още една еквивалентна заместваща схема:



Фиг. 11.16. Втора еквивалентна схема към пример 11.5

Токът във веригата е:

$$\dot{i} = \frac{5}{50 + 16,7 - j94,2} = 0,0433e^{j0,96} \text{ A.}$$

Ако се приеме, че напрежението е зададено с ефективната си стойност, ефективната стойност на тока е:

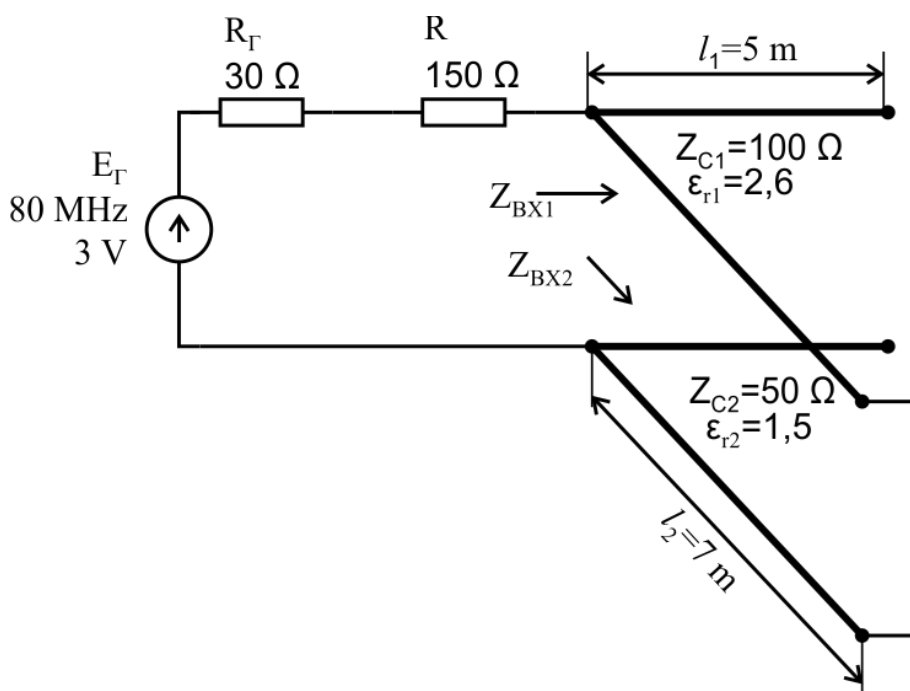
$$I = 0,0433 \text{ A}$$

Следователно активната и реактивната мощности, влизащи в дългата линия, са:

$$P = I^2 \cdot \text{Re}\{Z_{\text{BX}}\} = 0,0433^2 \cdot 16,7 = 31 \text{ mW};$$

$$Q = I^2 \cdot \text{Im}\{Z_{\text{BX}}\} = -0,0433^2 \cdot 94,2 = -176 \text{ mVAr.}$$

Пример 11.6. За схемата от фиг. 11.17 да се определи изразходваната активна мощност във веригата, ако двете паралелни дълги линии са без загуби.



Фиг. 11.17. Схема към пример 11.6

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Решение: Първо следва да се определят фазовите скорости на двете линии:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,6}} = 1,86 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1,5}} = 2,45 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Следователно дължината на вълната в двете линии е:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{1,86 \cdot 10^8}{80 \cdot 10^6} = 2,325 \text{ m};$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{2,45 \cdot 10^8}{80 \cdot 10^6} = 3,06 \text{ m}.$$

Константите на фазите на двете линии са:

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2,325} = 2,70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1};$$

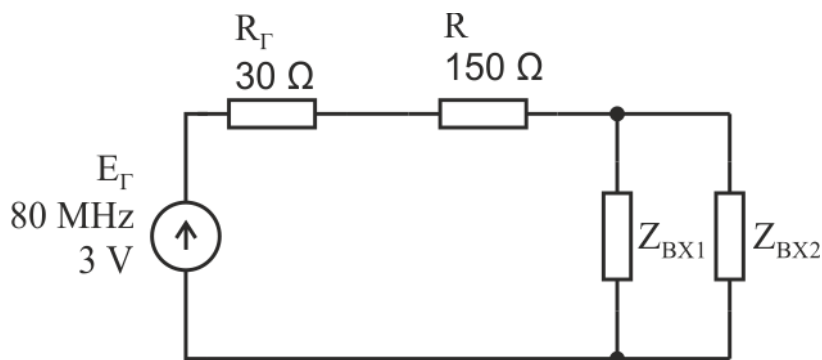
$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{3,06} = 2,05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Едната линия е свързана на празен ход, а втората - на късо съединение. Следователно техните входни съпротивления са:

$$Z_{\text{BX1}} = jZ_c \cotg \beta_1 z = -j100 \cotg(2,70 \cdot 5) = -j74 \Omega;$$

$$Z_{\text{BX2}} = jZ_c \tg \beta_2 z = j50 \tg(2,05 \cdot 7) = -j231 \Omega.$$

Дългите линии са свързани паралелно, така че може да се създаде еквивалентната заместваща схема, показана на фиг. 11.18.



Фиг. 11.18. Еквивалентна схема към пример 11.6

Еквивалентното комплексно съпротивление на веригата е:

$$Z_E = R_G + R + Z_{\text{BX1}} || Z_{\text{BX2}} = 30 + 150 + \frac{(-j74) \cdot (-j231)}{-j74 - j231} = 180 - j56 \Omega.$$

Следователно токът през източника е:

$$\dot{i} = \frac{3}{Z_E} = \frac{3}{180 - j56} = 0,0159 e^{j17,3} \text{ A}.$$

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
Тема 11. Вериги с разпределени параметри

Ако се приеме, че източникът е зададен с ефективната си стойност, то ефективната стойност на тока е $I = 0,0159 \text{ A}$. Следователно разсейваната активна мощност във веригата е:

$$P = I^2 \cdot \text{Re}\{Z_E\} = 0,0159^2 \cdot 180 = 46 \text{ mW}.$$

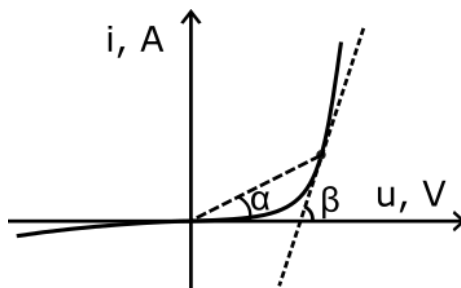
Тема 12. Нелинейни елементи в променливотокови вериги

12.1. Нелинейни елементи

12.1.1. Динамично съпротивление

В тема 3 от този учебник вече беше разгледано поведението на двуполюсните нелинейни елементи в постояннотокови вериги. При такива условия основната задача е да се определи работната точка или казано с други думи, статичното съпротивление на нелинейния елемент:

$$R_{\text{ст}} = \frac{U_A}{I_A} = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (12.1)$$



Фиг. 12.1. Дефиниране на статично и динамично съпротивление на нелинеен резистивен елемент

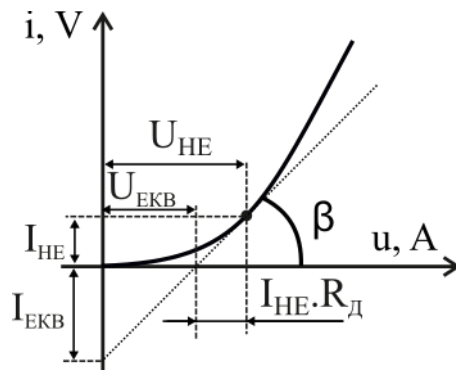
В променливотоковите вериги намира приложение т.н. диференциално (или динамично) съпротивление, което представлява допирателната към работната точка:

$$R_{\text{д}} = \frac{du}{di} = \frac{1}{\tan \beta} \quad (12.2)$$

Смисълът на диференциалното съпротивление е да покаже как се променя съпротивлението, когато токовете и напреженията се изменят в малки диапазони около работната точка.

12.1.2. Заместващи схеми

Динамичното съпротивление около даден работна точка може да се използва за създаване на еквивалентни заместващи без наличие на нелинеен елемент в променливотоковите вериги. Разглежда се ВАХ, представена на фиг. 12.2.

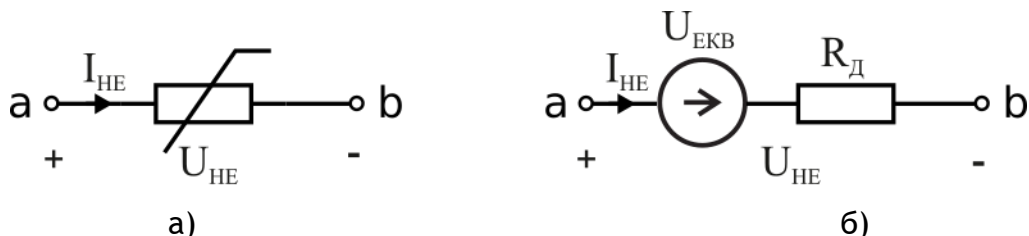


Фиг. 12.2. Анализ на ВАХ на нелинеен елемент в променливотокова верига

За нея може да се запише следното уравнение:

$$U_{HE} = U_{EKB} + I_{HE} \frac{1}{\tan\beta} = U_{EKB} + I_{HE} \cdot R_D. \quad (12.3)$$

С други думи, може да се създаде еквивалентна схема на нелинейния елемент, използвайки диференциалното съпротивление R_D , както е показано на фиг. 12.3.

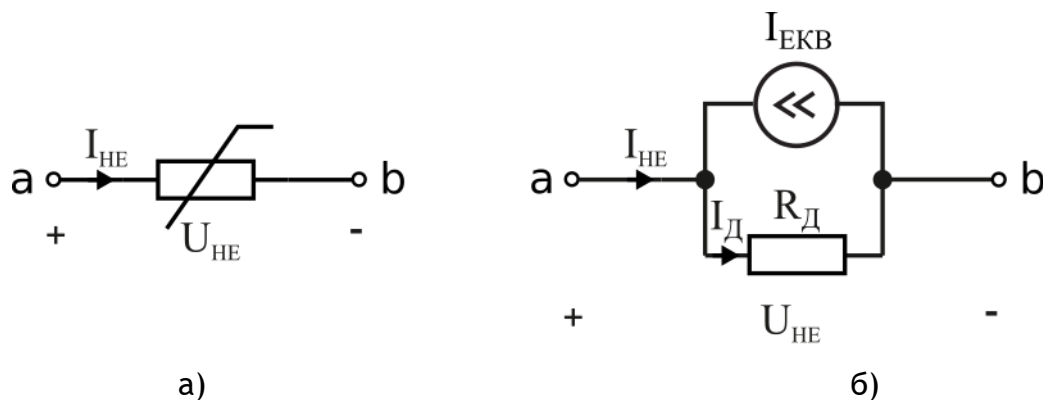


Фиг. 12.3. Нелинеен елемент (а) и еквивалентна заместваща схема с източник на напрежение (б)

По аналогичен начин може да се запише уравнение за токовете:

$$I_{HE} = U_{HE} \cdot \tan\beta - I_{EKB} = \frac{U_{HE}}{R_D} - I_{EKB}. \quad (12.4)$$

Уравнение (12.4) позволява да създаде още една еквивалентна заместваща схема без нелинеен елемент, както е показано на фиг. 12.4.

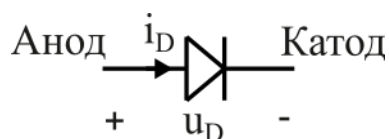


Фиг. 12.4. Нелинеен елемент (а) и еквивалентна заместваща схема с източник на ток (б)

Създаването на еквивалентни заместващи схеми без нелинейни елементи позволява да се прилагат всички изучени методи за анализ на електрически вериги.

12.2. Модели на диод

Изправителният диод е най-често срещаният нелинеен елемент, чиито изводи се наричат *Анод* (А) и *Катод* (К).



Фиг. 12.5. Условно означение на изправителен диод

Основното свойство на изправителния диод е, че той пропуска ток в права посока (от А към К) и не пропуска ток в обратна посока (от К към А).

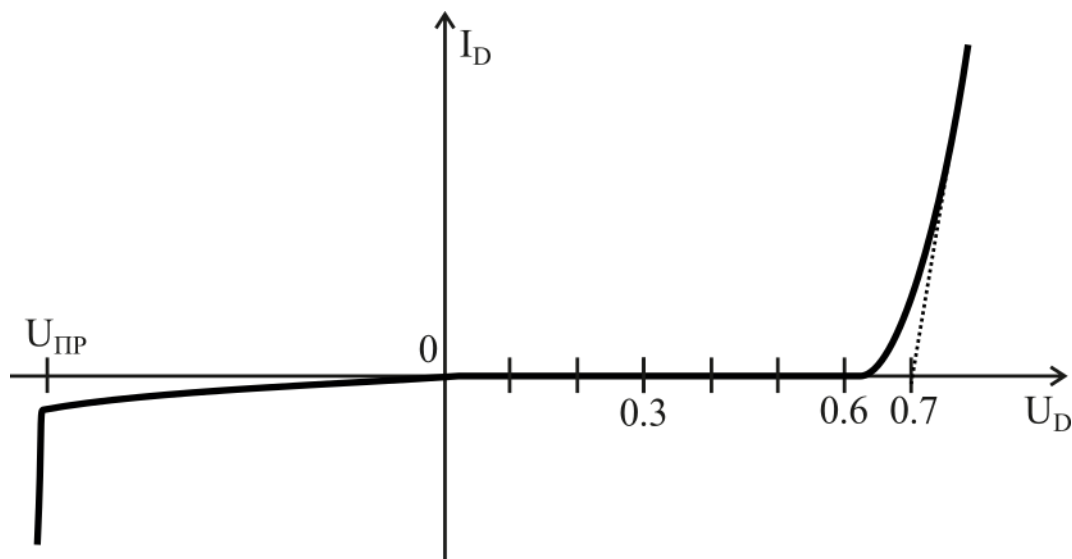
В зависимост от полярността на приложеното напрежение, диодът е:

- Отпушен (свързан в права посока) при $u_D > 0$;
- Запушен (свързан в обратна посока) при $u_D < 0$;

Това свойство на диодите също така се нарича *вентилен ефект*.

12.2.1. Модел на реален диод

Диодът е полупроводников елемент, който обикновено се изпълнява на основата на елементите Силиций (Si) или Германий (Ge). Волт-амперната характеристика на типичен силициев диод има вида, показан на фиг. 12.6.



Фиг. 12.6. Волт-амперна характеристика на типичен силициев диод

При подаване на напрежение в права посока ($U_D > 0$), токът е пренебрежимо малък за напрежения по-малки от $0,6 V$, след което започва да се увеличава експоненциално. При достигане на напрежение $U > 0,7 V$, динамичното съпротивление R_D на диода може да се приеме за константа.

При подаване на напрежение в обратна посока ($U_D < 0$), токът е много малък и може да се пренебрегне. При достигане на определено напрежение U_{PP} , наричано *пробивно*, токът в обратна посока започва рязко да нараства, което може да доведе до разрушаване на диода. За силициеви диоди пробивното напрежение е обикновено в диапазона от $50 V$ до $200 V$.

ВАХ на силициев диод може да бъде апроксимирана математически чрез:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1 \right), \quad (12.5)$$

където I_S и U_T са константи, характеризиращи диода. Типични стойности на тези константи са:

$$I_S = 10^{-12} A \quad \text{и} \quad U_T = 26 mV. \quad (12.6)$$

12.2.2. Модел на идеален диод

Волт-амперната характеристика и условното означение на идеален диод са представени на фиг. 12.7. От ВАХ се вижда, че когато към идеалния диод е приложено напрежение в обратна посока, той представлява прекъснатата верига (има безкрайно голямо съпротивление) и през него не тече ток. При прилагане на напрежение в права посока, диодът представлява късо съединение (има нулево съпротивление) и върху него няма пад на напрежение.

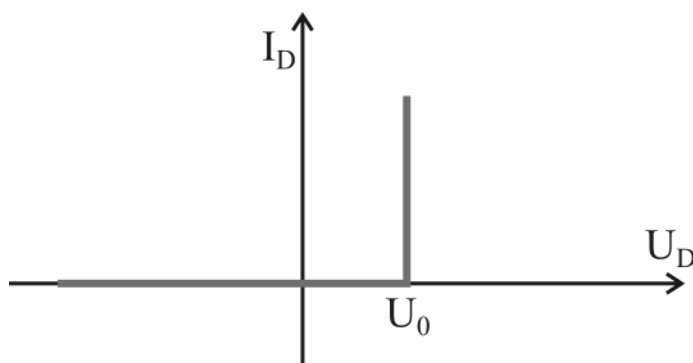


Фиг. 12.7. ВАХ (ляво) и условно означение на идеален диод (дясно)

Този опростен модел на диод позволява изследване на принципното поведение на диодите, но не отчита всички техни важни характеристики.

12.2.3. Прагов модел на диод

Както вече беше демонстрирано, през диодите не протича ток, до достигане на определено напрежение U_0 . Ето защо по-реалистичен опростен модел на диод е представен на фиг. 12.8.



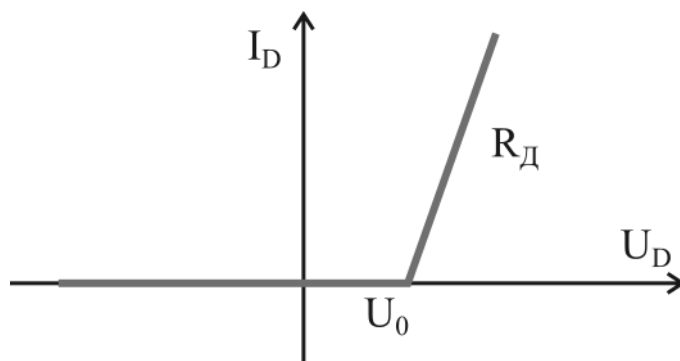
Фиг. 12.8. ВАХ при прагов модел на диод

В случая ВАХ е подобна на тази на идеалния диод, но отпушването на диода (късото съединение) започва едва при достигане на определено напрежение U_0 . За силициеви диоди, $U_0 = 0,7 V$, а за германиеви - $U_0 = 0,2 V$.

Още по-реалистичен прагов модел на диод е представен на фиг. 12.9. В момента, в който диодът започне да провежда ток, той има ненулево съпротивление R_D , съответстващо на динамичното (диференциалното) съпротивление на реалния диод в линейния участък. Този подобрен модел е повлиян от реалния модел на диод.

В началните фази на проектиране на електрически схеми е удобно да се използва някой от опростените модели на диод, които да позволят бърз

предварителен анализ, но при финализиране на схемата следва да се използва модел на конкретен реален диод.



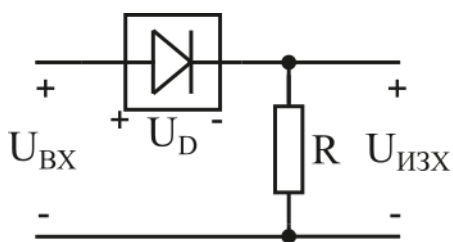
Фиг. 12.9. ВАХ при усъвършенстван прагов модел на диод

12.3. Диоди в променливотокови вериги

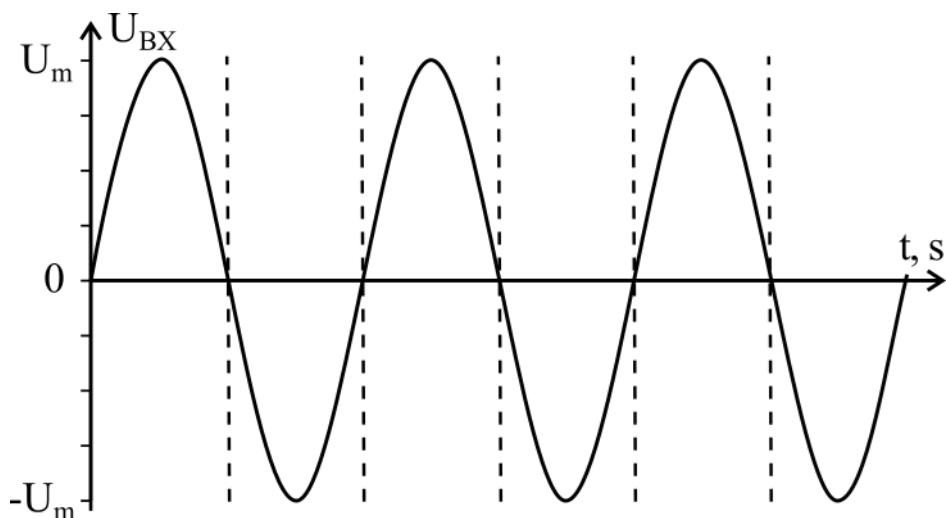
12.3.1. Еднополупериоден токоизправител

Анализ чрез идеалния модел на диод

Разглежда се еднополупериоден токоизправител с идеален диод (фиг. 12.10), захранван със синусоидално напрежение (фиг. 12.11).



Фиг. 12.10. Схема на еднополупериоден токоизправител с идеален диод



Фиг. 12.11. Време диаграма на захранващото синусоидално напрежение

За схемата от фиг. 12.10 може да се запише следното уравнение по ВЗК:

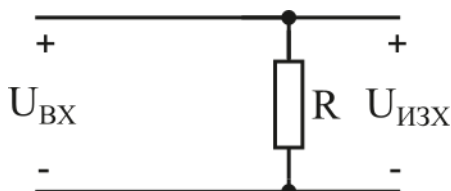
$$U_{BX} = U_D + U_R = U_D + U_{ИЗХ}. \quad (12.7)$$

Поведението на схемата се анализира за 2 ситуации:

Ситуация 1. През първият полупериод на синусоидата, когато $U_{ВХ} > 0$, идеалният диод работи в режим на право свързване, а падът на напрежение върху него е нула. Тази ситуация може да се представи със еквивалентната заместваща схема от фиг. 12.12. Следователно уравнение (12.7) става:

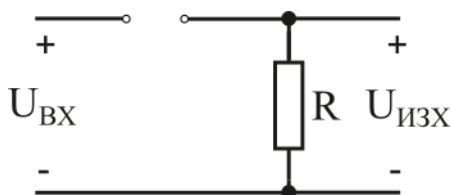
$$U_{ВХ} = U_D + U_{ИЗХ} = 0 + U_{ИЗХ} = U_{ИЗХ}, \quad (12.8)$$

т.е. изходното напрежение е равно на входното.



Фиг. 12.12. Еквивалентна заместваща схема на фиг. 12.10 при $U_{ВХ} > 0$

Ситуация 2. През втория полупериод на синусоидата идеалният диод работи в режим на обратно свързване, т.е. неговото съпротивление е безкрайно голямо. Еквивалентната схема за тази ситуация е представена на фиг. 12.13.

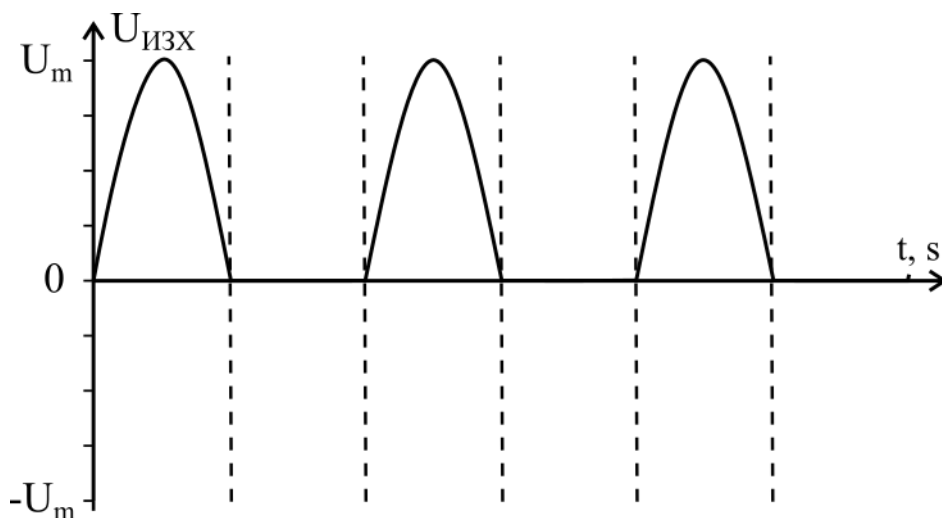


Фиг. 12.13. Еквивалентна заместваща схема на фиг. 12.10 при $U_{ВХ} < 0$

Следователно уравнението по ВЗК става:

$$U_{ВХ} = U_D + U_{ИЗХ} = U_D + 0, \quad (12.9)$$

т.е. изходното напрежение е $U_{ИЗХ} = 0 V$. Времедиagramата на изходното напрежение $U_{ИЗХ}$ е представена на фиг. 12.14.



Фиг. 12.14. Времедиagramа на изходното напрежение на еднополупериоден токоизправител с идеален диод

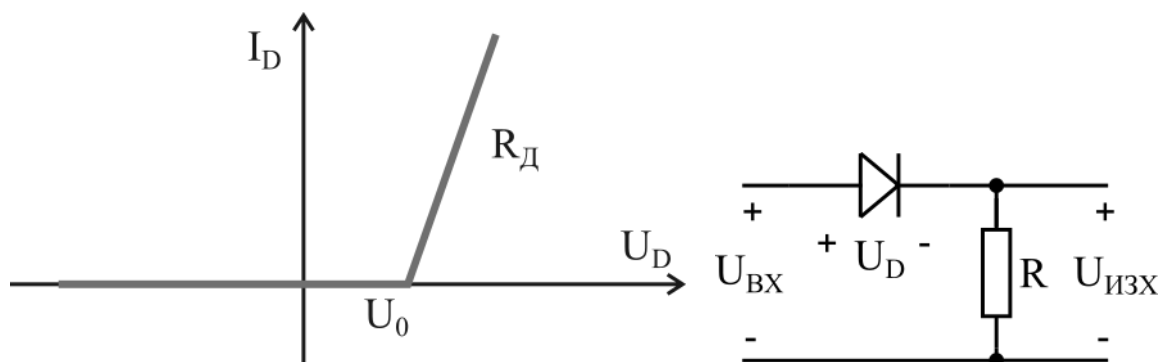
Такава схема се нарича *еднополупериоден токоизправител*, защото тя пропуска единствено положителната половина на входното напрежение. На практика токоизправителят преобразува синусоидално напрежение, чиято средна стойност е 0, към право напрежение, чиято посока не се променя и има ненулева средна стойност.

Следва да се отбележи, че понятията **постоянно напрежение** и **право напрежение** се различават:

- **Постоянното напрежение** има големина, която е постоянна, т.е. не се изменя във времето;
- **Правото напрежение** има винаги една и съща посока (т.е. посоката на движение на токоносителите не се изменя), но големината му може да се изменя във времето. С други думи, постоянното напрежение е право напрежение, но правото напрежение може да не е постоянно.

Анализ чрез праговия модел на диод

Разглежда се същата схема на еднополупериоден токоизправител, но този път за анализа ѝ ще се използва праговия модел на диод (фиг. 12.15).



Фиг. 12.15. Еднополупериоден токоизправител с прагов модел на диод

Уравнението по ВЗК е:

$$U_{\text{ВХ}} = U_D + U_{\text{ИЗХ}}. \quad (12.10)$$

Отново схемата се анализира за 2 ситуации:

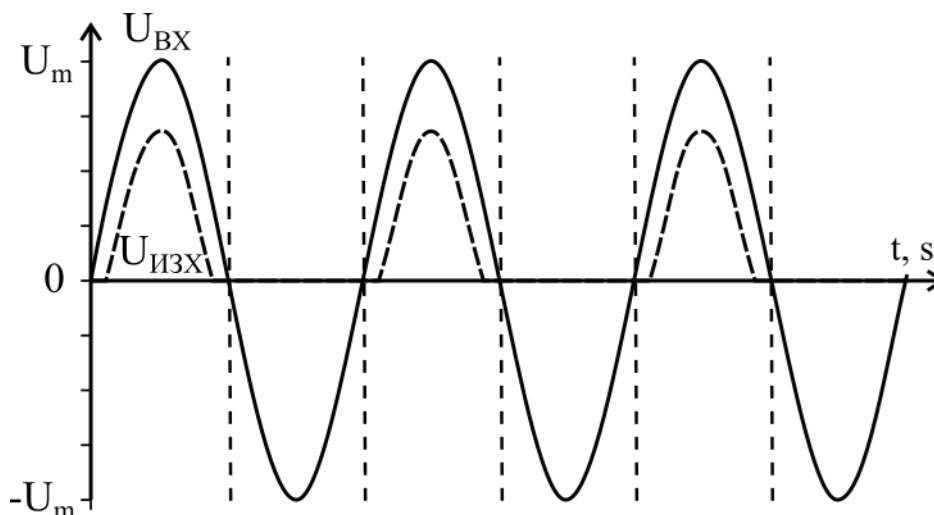
Ситуация 1. Когато напрежението върху диода е по-голямо от праговото му напрежение ($U_D > U_0$), съгласно ВЗК, входното напрежение се разделя между диода и резистора, т.е. изходното е:

$$U_{\text{ИЗХ}} = U_{\text{ВХ}} - U_D. \quad (12.11)$$

Ситуация 2. Когато приложеното напрежение върху диода е по-малко от праговото му ($U_D < U_0$), диодът представлява отворена верига, т.е. през резистора не тече ток, а изходното напрежение е нула:

$$U_{\text{ВХ}} = U_D + U_{\text{ИЗХ}} = U_D + 0 \quad \rightarrow \quad U_{\text{ИЗХ}} = 0. \quad (12.12)$$

Следователно времедиagramата на входното и изходното напрежение ще има вида, показан на фиг. 12.16.



Фиг. 12.16. Времедиаграма на входното и изходното напрежение на еднополупериоден токоизправител при прагов модел на диод

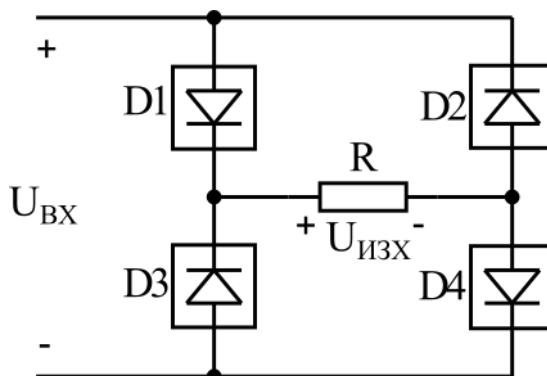
Може да се забележи, че през положителната част на полувърълната:

- изходното напрежение е по-малко от входното, което се дължи на диференциалното съпротивление R_d ;
- изходното напрежение започва по-късно и свършва по-рано от входното, което се дължи на праговото напрежение на диода U_0 .

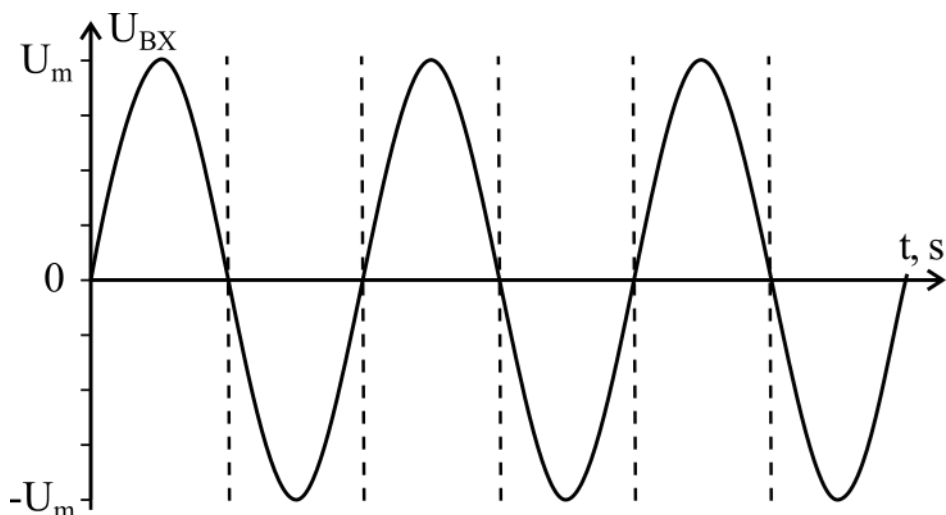
12.3.2. Двуполупериоден токоизправител

Анализ с модела на идеален диод

Разглежда се схемата с идеални диоди, представена на фиг. 12.17. Входното напрежение отново е синусоидално (фиг. 12.18), а изходното напрежение представлява пада на напрежение върху резистора R .



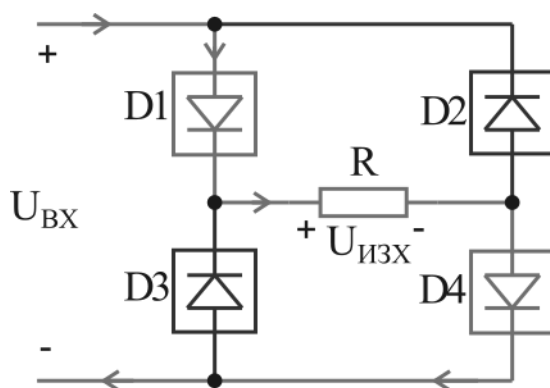
Фиг. 12.17. Схема на двуполупериоден токоизправител с идеални диоди



Фиг. 12.18. Входно напрежение на двуполупериодния токоизправител

Поведението на схемата отново се анализира за две ситуации:

Ситуация 1. През положителния полупериод на синусоидата ($U_{BX} > 0$) източникът създава ток с посока от плюс (+) към минус (-). Това означава, че диодите D1 и D4 са свързани в права посока, а диодите D2 и D3 - в обратна посока, както е показано на фиг. 12.19.



Фиг. 12.19. Еквивалентна схема на двуполупериоден токоизправител, при която D1 и D4 са отпушени, а D3 и D2 - запушени

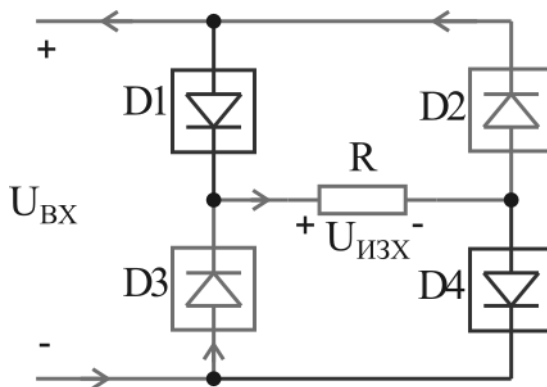
Следователно може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$U_{BX} = U_{D1} + U_{D4} + U_{ИЗХ}. \quad (12.13)$$

Като се има предвид, че двата диода D1 и D4 са идеални и отпушени, тяхното съпротивление е 0, т.е.:

$$U_{ИЗХ} = U_{BX} - U_{D1} - U_{D4} = U_{BX}. \quad (12.14)$$

Ситуация 2. През отрицателния полупериод на синусоидата ($U_{BX} < 0$) източникът създава ток с посока от минус (-) към плюс (+). Това означава, че диодите D1 и D4 са запушени, а диодите D2 и D3 са отпушени, както е показано на фиг. 12.20.

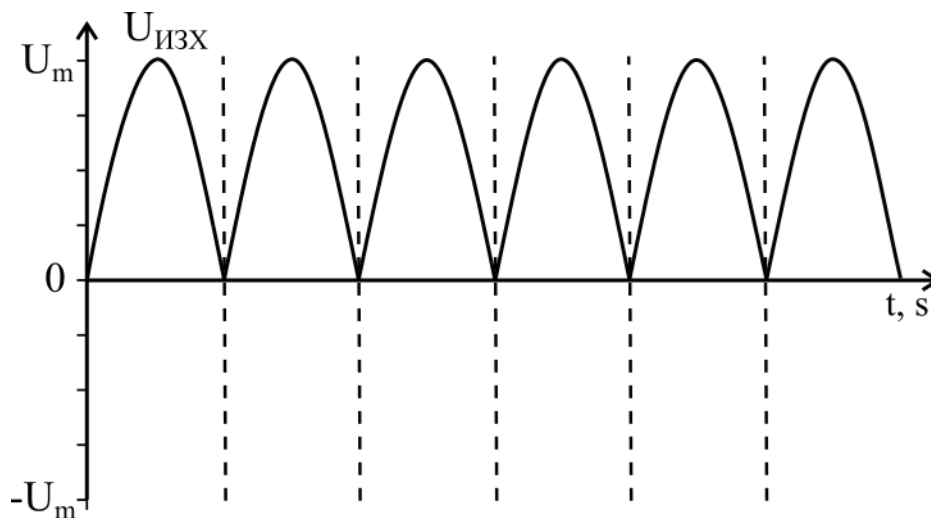


Фиг. 12.20. Еквивалентна схема на двуполупериоден токоизправител, при която D1 и D4 са запушени, а D3 и D2 - отпушени

Аналогично на предходната ситуация, може да се запише уравнение по ВЗК и да се определи изходното напрежение:

$$-U_{\text{BX}} = U_{D3} + U_{D4} + U_{\text{ИЗХ}} \rightarrow U_{\text{ИЗХ}} = -U_{\text{BX}} - U_{D3} - U_{D4} = -U_{\text{BX}}. \quad (12.15)$$

Вижда се, че и при двете ситуации токът тече през резистора с една и съща посока, т.е. отрицателната част от синусоидата се инвертира. С други думи, тази схема пропуска и двата полупериода на синусоидата на източника, при това винаги с положителна посока (фиг. 12.21).

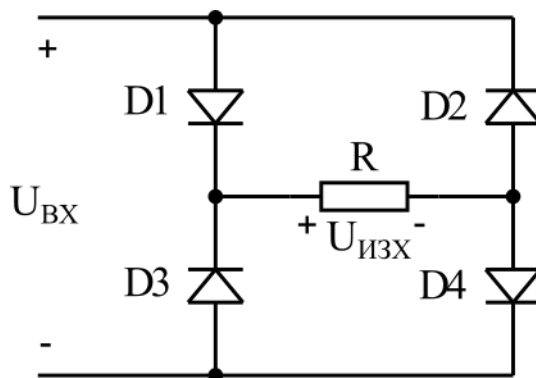


Фиг. 12.21. Времедиаграма на изходното напрежение на двуполупериоден токоизправител, анализиран с идеален модел на диод

Тази схема се нарича *двуполупериоден токоизправител*, тъй като тя „изправя“ (прави положителни) и двата полупериода на синусоидата. На практика тя има двойно по-голяма ефективност от еднополупериодния токоизправител.

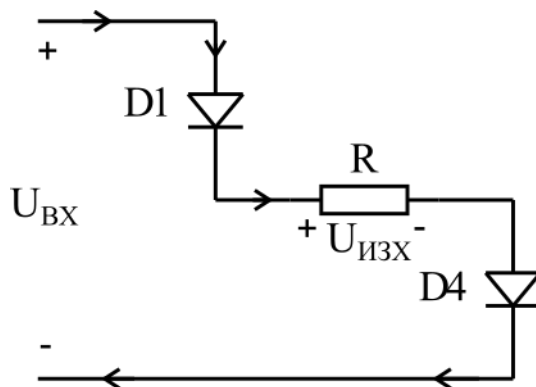
Анализ с праговия модел на диод

Нека същата схема на двуполупериоден токоизправител се разгледа, използвайки по-реалистичния прагов модел на диод (фиг. 12.22). Схемата се анализира за две ситуации:



Фиг. 12.22. Схема на двуполупериоден токоизправител

Ситуация 1. Когато напреженията на диоди D1 и D4 са по-големи от праговото им ($U_{D1} = U_{D4} > U_0$), те са отпушени, а D2 и D3 - запушени. Следователно може да се създаде еквивалентната заместваща схема от фиг. 12.23.

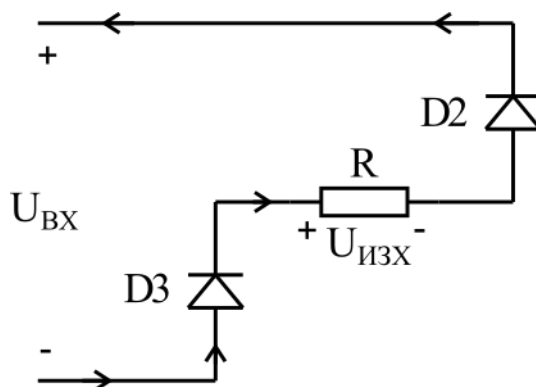


Фиг. 12.23. Еквивалентна заместваща схема на двуполупериоден токоизправител при отпушени D1 и D4

Ако се приеме, че двата диода са идентични ($U_{D1} = U_{D4} = U_D$), от уравнението по ВЗК може да се получи изходното напрежение:

$$U_{ВХ} = U_{D1} + U_{D4} + U_{ИЗХ} = 2 \cdot U_D + U_{ИЗХ} \quad \rightarrow \quad U_{ИЗХ} = U_{ВХ} - 2 \cdot U_D. \quad (12.16)$$

Ситуация 2. Когато напрежението на диоди D2 и D3 е по-голямо от праговото им ($U_{D2} = U_{D3} > U_0$), те са отпушени, а D1 и D4 - запушени. Еквивалентната заместваща схема за тази ситуация е представена на фиг. 12.24.

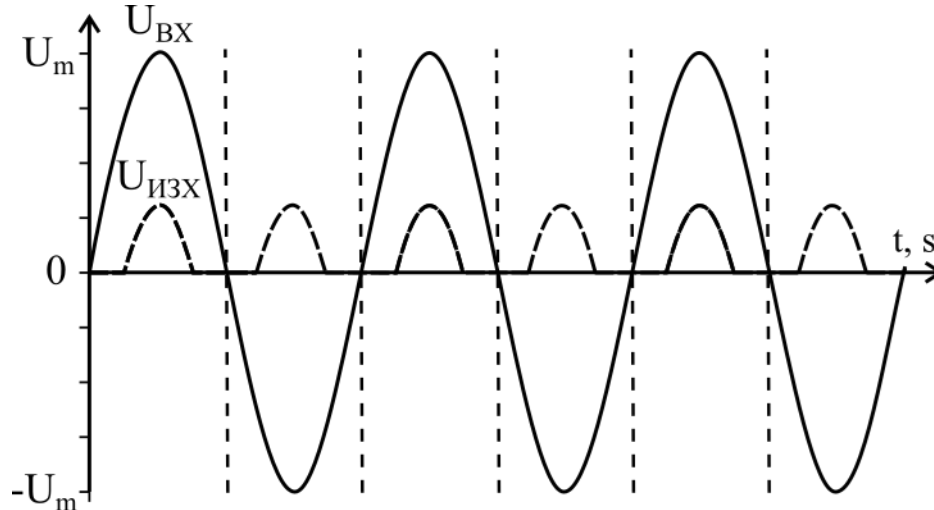


Фиг. 12.24. Еквивалентна заместваща схема на двуполупериоден токоизправител при отпушени D2 и D3

Следователно изходното напрежение (напрежението на резистора) е:

$$-U_{\text{ВХ}} = U_{D1} + U_{D2} + U_{\text{ИЗХ}} \quad \rightarrow \quad U_{\text{ИЗХ}} = -U_{\text{ВХ}} - 2 \cdot U_D. \quad (12.17)$$

На основата на направения анализ може да се построи времедиаграмата на входното и изходното напрежение на схемата (фиг. 12.25).



Фиг. 12.25. Входно и изходно напрежение на двуполупериоден токоизправител, анализиран с прагов модел на диод

От нея може да се види, че:

- изходното напрежение е намалено с $2 \cdot U_D$, сравнено с входното напрежение;
- изходното напрежение е по-голямо от нула единствено когато напрежението върху два от диодите е едновременно по-голямо от U_0 . Това условие е изпълнено при $U_{\text{ВХ}} - U_{\text{ИЗХ}} > 2 \cdot U_D$.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Армянов, Н. К., Т. Стоянова. Теоретична електротехника - I част, Русе, 2001.
2. Армянов, Н. К., Т. Стоянова. Теоретична електротехника - II част, Русе, 2002.
3. Армянов, Н., Т. Стоянова, Р. Тодорова. Теоретична електротехника. Ръководство за семинарни упражнения , Русе, 2008.
4. Евстатиев, Б. Записки на лекции по Теоретична електротехника.
<https://www.uni-ruse.bg/disciplines/TE/записки-на-лекции>
5. Евстатиев, Б., Д. Киряков. Теоретична електротехника. Ръководство за лабораторни упражнения. Русе, Академично издателство на "Русенски университет", 2019, стр. 44, ISBN 978-954-712-780-7.
6. Иванова, С. Г. Теоретические основы электротехники, Сибирский федеральный университет, Информационно-полиграфический комплекс СФУ, Красноярск, 2008.
7. Новгородцев, А. 30 лекции по теории электрических цепей. Санкт-Петербургский государственный технический университет. 2002.
http://eelib.narod.ru/toe/Novg_2.01/index.htm
8. Стефанов, С., Т. Христова, И. Проданов. Ръководство за лабораторни упражнения по теоретична електротехника, София 2013 г. Авангард Прима, София, ISBN978-619-160-105-9.
9. Alexander, Ch. K., M. N. O. Sadiku. Fundamental of Electric Circuits, Fifth edition, McGraw-Hill, 2012, 995 p., ISBN: 978-0-07-338057-5.
10. Boylestad, R. Introductory circuit analysis. Tenth edition. Pearson prentice hall. 2002.
11. Hambley, A. Electrical engineering: principles and applications. Sixth edition. Pearson. 2014.
12. Hayt, W. Jr., J. E. Kemmerly, S. M. Durbin, Engineering Circuit Analysis, Eighth edition, McGraw-Hill, 2011, 880 p., ISBN: 978-0-07-352957-8.
13. Nahvi, M., J. Edminister. Theory and problems of electric circuits. Fourth edition. McGraw-Hill. 2003.
14. Riedel, N. Electric circuits. 9th edition. Prentice hall. 2011.

СЪДЪРЖАНИЕ

УВОД	3
СПИСЪК НА ЧЕСТО ИЗПОЛЗВАНИ СЪКРАЩЕНИЯ	4
ТЕМА 1. ВЪВЕДЕНИЕ В ЕЛЕКТРОТЕХНИКАТА	5
1.1. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ	5
1.1.1. <i>Електрически заредени частици</i>	5
1.1.2. <i>Електрически ток</i>	6
1.1.3. <i>Електрическо напрежение и електрически потенциал</i>	8
1.1.4. <i>Електрическо съпротивление и електрическа проводимост</i>	9
1.2. ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ.....	9
1.2.1. <i>Възел, клон и затворен контур</i>	10
1.2.2. <i>Резистори</i>	11
1.2.3. <i>Източници на електродвижещо напрежение</i>	14
1.2.4. <i>Източници на ток</i>	16
1.2.5. <i>Взаимозаменяемост</i>	17
1.2.6. <i>Зависими източници</i>	18
1.3. ОСНОВНИ ЗАКОНИ В ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ	19
1.3.1. <i>Закон на Ом</i>	19
1.3.2. <i>Първи закон на Кирхоф</i>	20
3.2.1. <i>Втори закон на Кирхоф</i>	22
1.3.3. <i>Енергия и мощност</i>	25
ТЕМА 2. АНАЛИЗ НА ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ УСТАНОВЕН ПОСТОЯННОТОКОВ РЕЖИМ	29
2.1. АНАЛИЗ ЧРЕЗ ЗАКОНА НА ОМ.....	29
2.2. АНАЛИЗ ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЕКВИВАЛЕНТНИ ИЗТОЧНИЦИ	31
2.3. ТЕОРЕМА ЗА СУПЕРПОЗИЦИЯТА	32
2.4. МЕТОД СЪС ЗАКОНИТЕ НА КИРХОФ.....	34
2.5. МЕТОД С ВЪЗЛОВИТЕ ПОТЕНЦИАЛИ	36
2.6. МЕТОД С КОНТУРНИТЕ ТОКОВЕ.....	37
2.7. ТЕОРЕМИ НА ТЕВЕНЕН И НОРТЪН	40
ТЕМА 3. АНАЛИЗ НА НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ УСТАНОВЕН ПОСТОЯННОТОКОВ РЕЖИМ	48
3.1. НЕЛИНЕЙНИ РЕЗИСТОРИ.....	48
3.2. ГРАФИЧНИ МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА НЕЛИНЕЙНИ ВЕРИГИ	50
3.2.1. <i>Последователно съединение на нелинейни резистори</i>	50
3.2.2. <i>Паралелно съединение на нелинейни елементи</i>	51
3.2.3. <i>Метод с товарната права</i>	51
3.3. ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА НЕЛИНЕЙНИ ВЕРИГИ	52
3.3.1. <i>Метод със законите на Кирхоф</i>	53
3.3.2. <i>Метод с Теорема на Тевенен</i>	54
3.3.3. <i>Метод с възловите потенциали</i>	55
3.4. ЧИСЛЕНО РЕШЕНИЕ ПРИ ПО-СЛОЖНИ ВАХ	56
3.4.1. <i>Метод на итерациите</i>	56
3.4.2. <i>Метод на Нютон-Рафсон</i>	59

ТЕМА 4. РЕАКТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ	62
4.1. КАПАЦИТИВЕН ЕЛЕМЕНТ (КОНДЕНЗАТОР)	62
4.1.1. Принцип на действие на кондензатор	62
4.1.2. Ток и напрежение на кондензатор	63
4.1.3. Съединения на кондензатори	63
4.1.4. Енергия, зареждана в кондензаторите	65
4.2. ИНДУКТИВЕН ЕЛЕМЕНТ (БОБИНА)	66
4.2.1. Магнитна индукция	66
4.2.2. Магнитен поток	67
4.2.3. Коефициент на самоиндукция и индуктивен елемент	68
4.2.4. Закон за електромагнитната индукция	69
4.2.5. Ток и напрежение на бобини	70
4.2.6. Съединения на бобини	71
4.2.7. Енергия, зареждана в бобините	72
4.3. БОБИНИ И КОНДЕНЗАТОРИ ПРИ УСТАНОВЕН ПОСТОЯННОТОКОВ РЕЖИМ	73
ТЕМА 5. СИНУСОИДАЛНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ	78
5.1. ПРОМЕНЛИВОТОКОВИ ВЕРИГИ	78
5.1.1. Основни понятия	78
5.1.2. Разлика между постоянен и променлив ток	78
5.2. СИНУСОИДИ И КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА	79
5.2.1. Синусоидални величини	79
5.2.2. Синусоидата като вектор	81
5.2.3. Комплексен образ на синусоида	83
5.2.4. Аритметични операции с комплексни числа	85
5.3. ПАСИВНИ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ УСТАНОВЕН СИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ	85
5.3.1. Резистори при синусоидални токове и напрежения	85
5.3.2. Бобини при синусоидални токове и напрежения	86
5.3.3. Кондензатори при синусоидални токове и напрежения ...	87
5.3.4. Установен синусоидален режим в последователна RL верига	88
5.3.5. Установен синусоидален режим в последователна RC верига	89
5.3.6. Установен синусоидален режим в последователна RLC верига	89
5.3.7. Установен синусоидален режим в паралелна RLC верига .	90
5.4. ОСНОВНИ ЗАКОНИ В СИНУСОИДАЛНИТЕ ВЕРИГИ	92
5.4.1. Съпротивления в синусоидалните вериги	92
5.4.2. Проводимости в синусоидални вериги	92
5.4.3. Закон на Ом	93
5.4.4. Първи закон на Кирхоф	93
5.4.5. Втори закон на Кирхоф	94
5.5. МОЩНОСТИ В СИНУСОИДАЛНИ ВЕРИГИ	95
5.5.1. Моментна мощност на резистор	95
5.5.2. Моментна мощност на бобина	96
5.5.3. Моментна мощност на кондензатор	97
5.5.4. Моментна мощност на последователна RLC верига	97
5.5.5. Ефективна стойност	98
5.5.6. Обобщение за мощностите в синусоидални вериги	99

5.5.7.	<i>Баланс на мощностите при синусоидални вериги</i>	100
5.5.8.	<i>Теорема за предаване на максимална активна мощност</i>	101
5.6.	АНАЛИЗ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ УСТАНОВЕН СИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ	102
5.6.1.	<i>Анализ чрез еквивалентно комплексно съпротивление</i> ..	102
5.6.2.	<i>Анализ по метода със законите на Кирхоф</i>	104
5.6.3.	<i>Анализ по метода с възловите потенциали</i>	106
5.6.4.	<i>Анализ по метода с контурните токове</i>	107
5.6.5.	<i>Анализ чрез теоремите на Тевенен и Нортън</i>	109
ТЕМА 6. БОБИНИ С ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА		112
6.1.	КОЕФИЦИЕНТ НА ВЗАИМНА ИНДУКЦИЯ.....	112
6.2.	ЕКВИВАЛЕНТНИ СХЕМИ НА БОБИНИ С ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА	113
6.2.1.	<i>Последователно съединение на индуктивно-свързани бобини</i>	113
6.2.2.	<i>Паралелно съединение на индуктивно-свързани бобини</i> .	115
6.2.3.	<i>Елиминирание на индуктивна връзка</i>	116
6.2.4.	<i>Еквивалентна заместваща схема в най-общият случай</i> .	118
6.3.	ЕНЕРГИЯ ПРИ ИНДУКТИВНО-СВЪРЗАНИ БОБИНИ	120
6.4.	АНАЛИЗ НА ВЕРИГИ С ИНДУКТИВНА ВРЪЗКА	121
6.4.1.	<i>Анализ по метода със законите на Кирхоф</i>	121
6.4.2.	<i>Анализ по метода с възловите потенциали</i>	123
6.4.3.	<i>Анализ по метода с контурните токове</i>	124
ТЕМА 7. ЧЕСТОТНИ ЗАВИСИМОСТИ В ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ ...		127
7.1.	РЕЗОНАНС НА НАПРЕЖЕНИЯТА	127
7.2.	РЕЗОНАНС НА ТОКОВЕТЕ	131
7.3.	РЕЗОНАНСНИ ЯВЛЕНИЯ В СЛОЖНИ ВЕРИГИ	133
7.4.	ХАРАКТЕРНИ СИТУАЦИИ ПРИ РЕЗОНАНСНИ ЯВЛЕНИЯ	135
ТЕМА 8. НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ В ЕЛЕКТРИЧЕСКИТЕ ВЕРИГИ		138
8.1.	ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ	138
8.1.1.	<i>Несинусоидални сигнали</i>	138
8.1.2.	<i>Разлагане в ред на Фурие</i>	138
8.2.	НЕСИНУСОИДАЛНИ ТОКОВЕ И НАПРЕЖЕНИЯ	140
8.2.1.	<i>Примери за несинусоидални сигнали</i>	140
8.2.2.	<i>Ефективна стойност на несинусоидални токове и напрежения</i>	142
8.3.	АНАЛИЗ НА ВЕРИГИ ПРИ УСТАНОВЕН НЕСИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ	143
8.3.1.	<i>Принцип на наслагването</i>	143
8.3.2.	<i>Реактивни съпротивления</i>	144
8.4.	МОЩНОСТИ В НЕСИНУСОИДАЛНИ ВЕРИГИ	147
8.4.1.	<i>Активна мощност</i>	147
8.4.2.	<i>Реактивна мощност</i>	148
8.4.3.	<i>Пълна мощност</i>	148
ТЕМА 9. ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ В ПОСТОЯННОТОКОВИТЕ ВЕРИГИ ...		149
9.1.	ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ ОТ ПЪРВИ РЕД	150
9.1.1.	<i>Преходни процеси в последователна RC верига</i>	150
9.1.2.	<i>Преходни процеси в последователна RL верига</i>	154
9.2.	ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ ОТ ВТОРИ РЕД	159

9.2.1.	<i>Разряд на кондензатор в последователна RLC верига</i>	159
9.2.2.	<i>Включване на последователна RLC верига към източник на напрежение.....</i>	165
9.3.	АНАЛИЗ НА ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ.....	167
9.3.1.	<i>Класически метод за анализ на преходни процеси.....</i>	167
9.3.2.	<i>Операторен метод за анализ на преходни процеси</i>	173
ТЕМА 10.	ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ	182
10.1.	ПЪРВИЧНИ ПАРАМЕТРИ НА ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИТЕ	182
10.2.	ПАРАМЕТРИ И ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗАМЕСТВАЩИ СХЕМИ НА ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ .	183
10.2.1.	<i>Z параметри (параметри на съпротивлението)</i>	184
10.2.2.	<i>Y параметри (параметри на проводимостта).....</i>	189
10.2.3.	<i>H параметри (хибридни параметри)</i>	194
10.2.4.	<i>G параметри (обратни хибридни параметри)</i>	198
10.2.5.	<i>A параметри (предавателни параметри)</i>	200
10.2.6.	<i>B параметри (обратни предавателни параметри).....</i>	202
10.2.7.	<i>Връзки между параметрите</i>	202
10.3.	СВЪРЗВАНЕ НА ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ	204
10.3.1.	<i>Последователно съединение на четириполюсници.....</i>	204
10.3.2.	<i>Паралелно съединение на четириполюсници.....</i>	205
10.3.3.	<i>Каскадно (верижно) съединение на четириполюсници....</i>	206
10.3.4.	<i>Други съединения на четириполюсници</i>	209
10.4.	ПРИЛОЖЕНИЯ НА ТЕОРИЯТА ЗА ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИТЕ	209
ТЕМА 11.	ВЕРИГИ С РАЗПРЕДЕЛЕНИ ПАРАМЕТРИ	211
11.1.	ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ ЗА ПРЕДАВАТЕЛНИТЕ ЛИНИИ	211
11.1.1.	<i>Телеграфни уравнения</i>	212
11.1.2.	<i>Предавателна линия със синусоидални токове и напрежения.....</i>	214
11.1.3.	<i>Права и отразена вълна в предавателна линия.....</i>	215
11.1.4.	<i>Други параметри на предавателните линии</i>	217
11.2.	ВИДОВЕ ПРЕДАВАТЕЛНИ ЛИНИИ	218
11.2.1.	<i>Линия без загуби.....</i>	218
11.2.2.	<i>Линия без изкривявания</i>	219
11.2.3.	<i>Линия с много ниско съпротивление</i>	221
11.3.	ПРЕДАВАТЕЛНИ ЛИНИИ С ТОВАР.....	221
11.3.1.	<i>Коефициент на отражение</i>	223
11.3.2.	<i>Входно съпротивление и коефициент на отражение.....</i>	225
11.3.3.	<i>Линия без загуби, свързана към товар</i>	228
11.4.	МОЩНОСТИ В ПРЕДАВАТЕЛНИТЕ ЛИНИИ.....	235
11.5.	АНАЛИЗ НА ДЪЛГИ ЛИНИИ БЕЗ ЗАГУБИ	236
ТЕМА 12.	НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕМЕНТИ В ПРОМЕНЛИВОТОКОВИ ВЕРИГИ .	241
12.1.	НЕЛИНЕЙНИ ЕЛЕМЕНТИ.....	241
12.1.1.	<i>Динамично съпротивление</i>	241
12.1.2.	<i>Заместващи схеми.....</i>	241
12.2.	МОДЕЛИ НА ДИОД.....	242
12.2.1.	<i>Модел на реален диод</i>	243
12.2.2.	<i>Модел на идеален диод.....</i>	244
12.2.3.	<i>Прагов модел на диод</i>	244

12.3. Диоди в променливотокови вериги	245
12.3.1. Еднополупериоден токоизправител.....	245
12.3.2. Двуполупериоден токоизправител	248
ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА	253

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

Учебник

Автор: доц. дн Борис Иванов Евстатиев

Редактор и коректор: доц. дн Борис Иванов Евстатиев

Научен редактор: доц. дн Борис Иванов Евстатиев

Рецензент: доц. д-р Теодора Василева Христова

ISBN: 978-954-712-902-3

Първо издание

Пореден №4 от издателския план на Русенския университет за 2023 г.

Формат: В5

Тираж: 72

Академично издателство “Русенски Университет”