Вериги с разпределени параметри

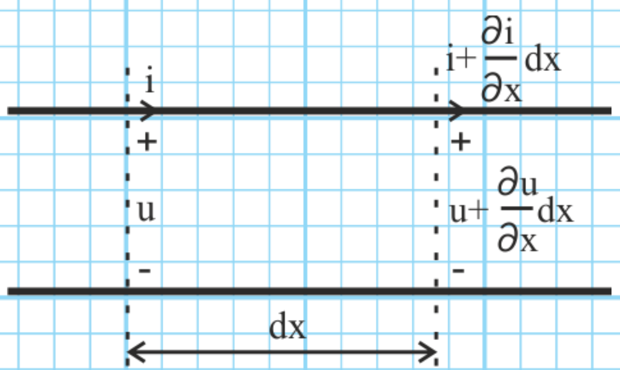
Основни понятия за предавателните линии

До този момент говорихме за вериги в които енергията се съхранява под формата на електрическо или магнитно поле или се разсейва (преобразува в друг вид енергия). Тези процеси са свързани с бобини, кондензатори и резистори.

Във веригите с разпределени параметри енергията се съхранява и преобразува по същите правила, но това става равномерно или неравномерно по дължина на цялата верига.

Примери за линии с разпределени параметри са телефонните линии, антените на предавателите, коаксиалните кабели, USB кабелите и т.н. Навивките на електрически машини и трансформатори също могат да се разглеждат като верига с разпределени параметри.

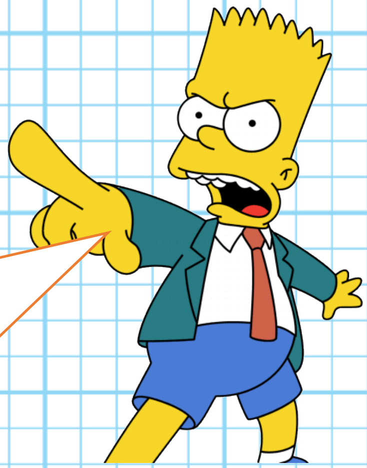
Нека да разгледаме една двупроводна предавателна линия с равномерно разпределени параметри:



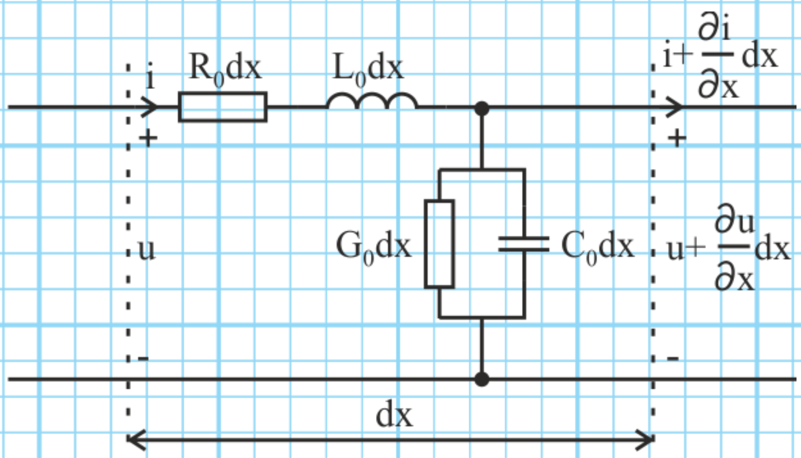
- dx е дължината на един елементарен (много къс) участък от веригата;
- u и i са напрежението и токът в началото на участъка;

- $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ са напрежението и токът в края на участъка.

В: Това не е възможно! Аз много добре знам законите на Кирхоф. Токът и напрежението в началото на този участък трябва да са равни на тези в края.



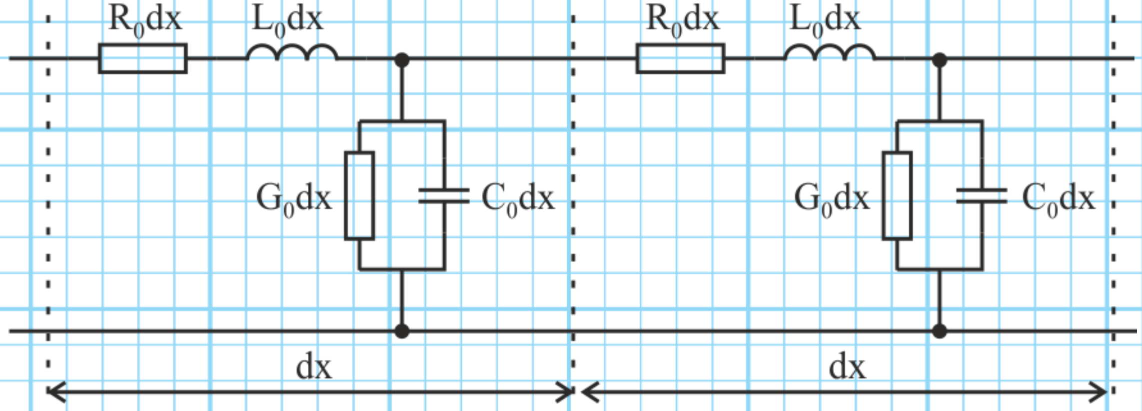
О: Напротив, възможно е, тъй като всеки един такъв елементарен участък се характеризира с:

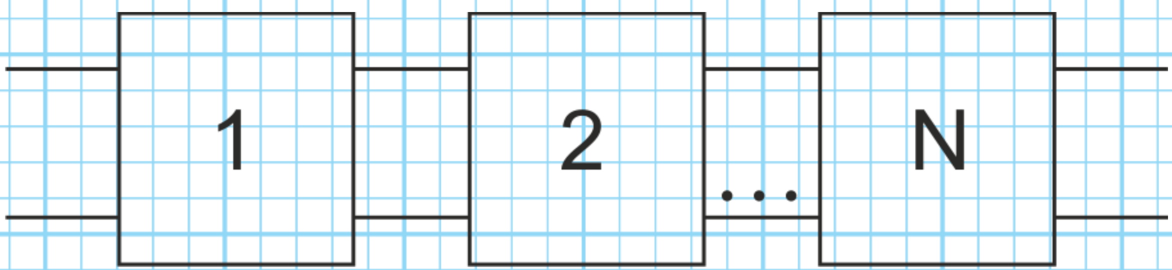


- $R_0 dx$ е съпротивлението на участъка в Омове $[\Omega]$;
- $L_0 dx$ е индуктивността на участъка в Хенри $[H]$;
- $G_0 dx$ е проводимостта на участъка в Сименси $[S]$;
- $C_0 dx$ е капацитивността на участъка във Фаради $[F]$.

Величините R_0, L_0, G_0 и C_0 са параметрите на една предавателна линия, и се измерват съответно в $[\Omega/m]$, $[H/m]$, $[S/m]$ и $[C/m]$.

Следователно една предавателна линия може да бъде разглеждана като множество верижно-свързани четириполюсници.





Това също така означава, че предавателната линия може да бъде разглеждана като един еквивалентен четириполюсник.

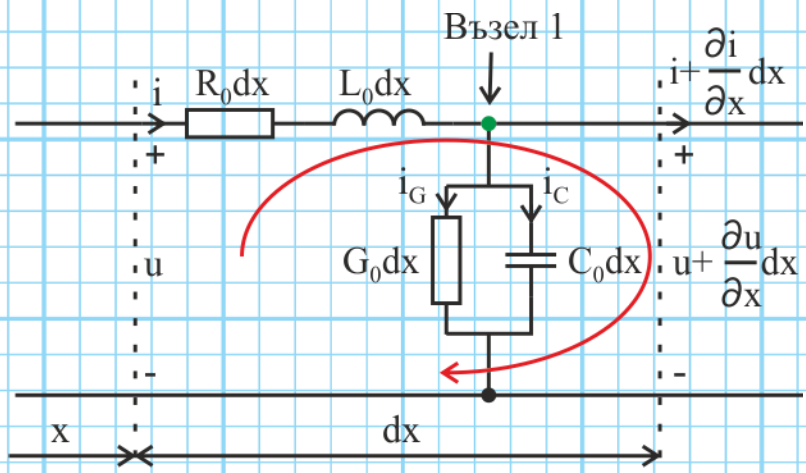
Телеграфни уравнения

Напрежението и токът на предавателна линия зависят не само от времето, но също така и от дължината x на линията:

$$u = f(x,t) \qquad i = f(x,t)$$

Стойността на x може да се увеличава считано от началото или от края на веригата или от коя да е друга точка от нея. Прието за начало на линията да се смята тази страна, към която е свързан източникът, а за край – тази страна към която е свързан товарът.

Нека да разгледаме ситуацията, при която x се увеличава, считано от началото на линията. Можем да запишем уравнения по ВЗК и ПЗК за един елементарен участък:



$$u = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + u_R + u_L = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + iR_0dx + L_0dx\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i = i + \frac{\partial i}{\partial x}dx + i_G + i_C =$$

$$= i + \frac{\partial i}{\partial x}dx + G_0dx\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + \partial\frac{C_0dx\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)}{\partial t}$$

Горните уравнения могат да бъдат представени по следния начин:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}dx = R_0dx.i + L_0dx\frac{\partial i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0i + L_0\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}dx = G_0\left(dx.u + \frac{\partial u}{\partial x}dx^2\right) + \partial\frac{C_0\left(dx.u + \frac{\partial u}{\partial x}dx^2\right)}{\partial t}$$

Тъй като съставката $\frac{\partial u}{\partial x}dx^2$ е безкрайно малка, последното уравнение става:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}dx = G_0(dx.u) + C_0 dx\frac{\partial u}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0\frac{\partial u}{\partial t}$$

Вече можем да запишем система уравнение, наричана телеграфни уравнения на предавателна линия с равномерно разпределени параметри:

$$\left|\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

<u>Предавателна линия със синусоидални токове и напрежения</u>

Нека една двупроводна предавателна линия се захранва от синусоидален източник на напрежение, с честота ω. Тогава можем да представим системата с телеграфните уравнения в комплексен вид:

$$\left|\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= R_0\dot{I} + j\omega L_0\dot{I} = Z_0\dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= G_0\dot{U} + j\omega C_0\dot{U} = Y_0\dot{U} \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left|\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= Z_0\dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= Y_0\dot{U} \end{aligned}\right.$$

където $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$ е комплексното съпротивление на един елементарен участък dx;

$Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ е комплексната проводимост на един елементарен участък dx.

Ако заместим токът от първото уравнение във второто, получаваме:

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = Y_0\dot{U} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = Z_0Y_0\dot{U}$$

Можем да дефинираме т.н. **константа на предаване $\boldsymbol{\gamma}$** като:

$$\gamma = \sqrt{Z_0Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$$

където реалната съставка α е константата на затихване;

имагинерната съставка β се нарича константа на фазата.

Следователно нашето уравнение добива следния вид:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2\dot{U} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\dot{U} = 0$$

Това е обикновено диференциално уравнение от втори ред, чието решение има следната форма:

$$\dot{U} = \dot{U}^+e^{-\gamma x} + \dot{U}^-e^{\gamma x}$$

където $\dot{U}$ е напрежението в коя да е точка x от предавателната линия, а $\dot{U}^+$ и $\dot{U}^-$ са константи;

Можем да определим тока в една предавателната линия, като заместим горното уравнение в първото предавателно уравнение:

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0}\frac{d\dot{U}}{dx} = -\frac{1}{Z_0}\frac{d\left(\dot{U}^+e^{-\gamma x} + \dot{U}^-e^{\gamma x}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\gamma}{Z_0}\left(\dot{U}^+e^{-\gamma x} - \dot{U}^-e^{\gamma x}\right) = \frac{\left(\dot{U}^+e^{-\gamma x} - \dot{U}^-e^{\gamma x}\right)}{\frac{Z_0}{\gamma}}$$

Съставката $\frac{Z_0}{\gamma}$ има размерност на съпротивление и се нарича **характеристично (или вълново) съпротивление на линията**:

$$Z_C = \frac{Z_0}{\gamma} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

Следователно токът във веригата може да се запише като:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}^-}{Z_C} e^{\gamma x}$$

С други думи, при синусоидални токове и напрежения системата с предавателните уравнение е:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{U} = \dot{U}^+ e^{-\gamma x} + \dot{U}^- e^{\gamma x} \\ \dot{I} = \dfrac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{-\gamma x} - \dfrac{\dot{U}^-}{Z_C} e^{\gamma x} \end{array} \right.$$

където $\frac{\dot{U}^+}{Z_C}$ и $\frac{\dot{U}^-}{Z_C}$ са амплитудите на тока в права и в обратна посока.

За да определим $\dot{U}^+$ и $\dot{U}^-$ следва да анализираме горната система за $x = 0$, където входните напрежение и ток са съответно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{U}^+ + \dot{U}^- \\ Z_C \dot{I}_1 = \dot{U}^+ - \dot{U}^- \end{array} \right.$$

Решенията на тази система са:

$$\dot{U}^{+} = 0{,}5\left(\dot{U}_1 + Z_C\dot{I}_1\right) = U^{+}e^{j\varphi_1}$$

$$\dot{U}^{-} = 0{,}5\left(\dot{U}_1 - Z_C\dot{I}_1\right) = U^{-}e^{j\varphi_2}$$

Права и отразена вълна в предавателна линия

Можем да запишем първото от двете предавателни уравнения по следния начин:

$$\begin{aligned}\dot{U} = \dot{U}^{+}\, e^{-\gamma x} + \dot{U}^{-} e^{\gamma x} = \\ &= \left(U^{+}e^{j\varphi_1}\right)e^{-(\alpha+j\beta)x} + \left(U^{-}e^{j\varphi_2}\right)e^{(\alpha+j\beta)x} = \\ &= \left(U^{+}e^{-\alpha x}\right)e^{j(\varphi_1-\beta x)} + \left(U^{-}e^{\alpha x}\right)e^{j(\varphi_2+\beta x)}\end{aligned}$$

Ако $\dot{U}$ е комплексна амплитудна стойност, можем да го преобразуваме в синусоидална форма по следния начин:

$$u(x,t) = U^{+}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x) + U^{-}e^{\alpha x}\sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x)$$

Ако характеристичното съпротивление е $Z_C = z_C e^{j\varphi_C}$, по подобен начин можем да преобразуваме и тока във веригата:

$$\begin{aligned}\dot{I} = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}^{-}}{Z_C}e^{\gamma x} = \frac{U^{+}e^{j\varphi_1}}{z_C e^{j\varphi_C}}e^{-(\alpha+j\beta)x} - \frac{U^{-}e^{j\varphi_2}}{z_C e^{j\varphi_C}}e^{(\alpha+j\beta)x} = \\ = \frac{U^{+}}{z_C}e^{-\alpha x}e^{j(\varphi_1-\beta x-\varphi_C)} - \frac{U^{-}}{z_C}e^{\alpha x}e^{j(\varphi_2+\beta x-\varphi_C)}\end{aligned}$$

Записваме го в синусоидална форма:

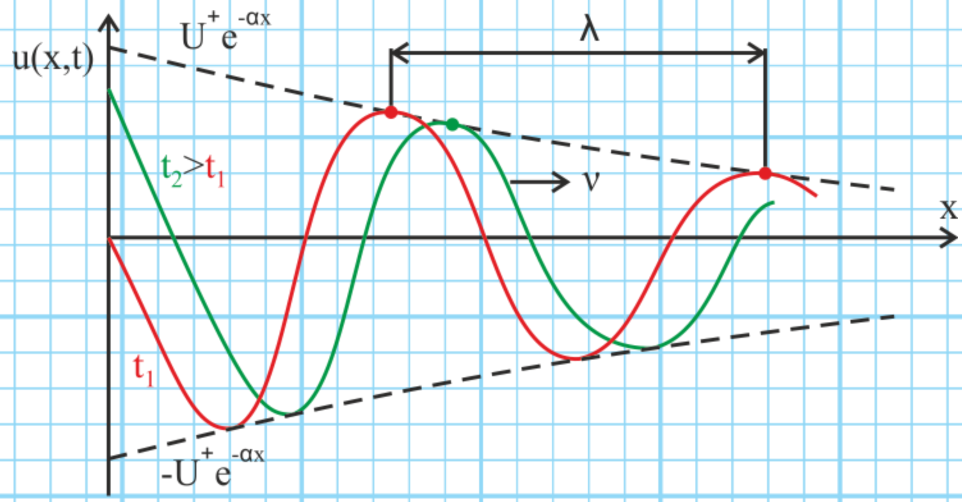
$$\begin{aligned}i(x,t) = \frac{U^{+}}{z_C}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x - \varphi_C) - \\ - \frac{U^{-}}{z_C}e^{\alpha x}\sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x - \varphi_C)\end{aligned}$$

Права вълна

Нека да разгледаме синусоидалната форма на напрежението:

$$u(x,t) = U^{+}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x) + \\ + U^{-}e^{\alpha x}\sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x)$$

Напрежението има две съставки. Нека първо да разгледаме съставката $U^{+}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x)$, наричана права вълна. Графичното изображение на синусоидата е:



Вижда се, че:

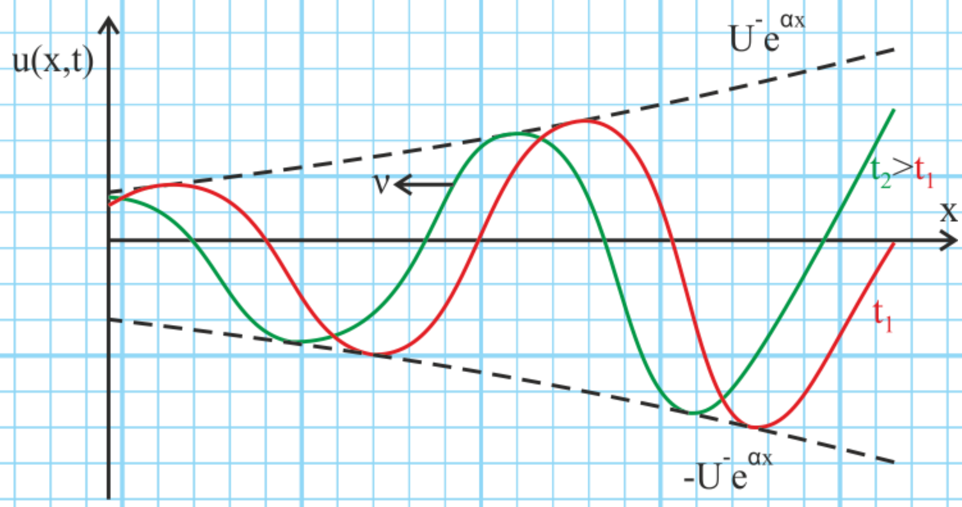
- Амплитудата $U^{+}e^{-\alpha x}$ затихва експоненциално по дължина на линията, поради отрицателния знак на степенния показател. Скоростта на затихване зависи от константата на затихване α (реалната съставка на константата на предаване γ);

- Синусоидата е функция както на времето, така и на пространството. Началната фаза на синусоидата се изменя по дължина на линията с $-\beta x$, където β е константата на фазата (имагинерната съставка на константата на предаване γ).

- Синусоидата се измества във времето t по дължина на линията с определена скорост v. На горната фигура е показана нейната позиция за два момента от времето: t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$.

Отразена вълна

Сега нека да разгледаме втората съставка на напрежението $U^- e^{\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x)$, наричана отразена вълна:



Вижда се, че:

- Амплитудата $U^- e^{\alpha x}$ се увеличава експоненциално по дължина на линията, тъй като степенният показател е положителен;

- Синусоидата е показана за 2 момента от времето: t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$. Вижда се, че отразената вълна се движи в обратна посока (от товара към източника) с някаква скорост v.

По аналогичен начин се разпространяват правата и отразена вълна на тока:

- $\dfrac{U^+}{z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta x - \varphi_C)$ – права вълна;

- $-\frac{U^-}{z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta x - \varphi_C)$ – отразена вълна.

Разликата е, че отразената вълна на тока е със знак минус (-), т.е. е инвертирана.

Други параметри на предавателните линии

Други параметри на предавателните линии са фазовата скорост и дължината на вълната. За да определим фазовата скорост v, ще приемем, че фазата на правата вълна е константа:

$$\omega t + \varphi_1 - \beta x = const$$

Диференцираме горното уравнение:

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \varphi_1 - \beta x) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0$$

Всъщност $\frac{dx}{dt}$ е именно скоростта на разпространение на вълната, т.е. фазовата скорост е:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \ [\mathrm{m/s}]$$

Дължината λ на движеща се вълна се дефинира като най-малкото разстояние, на което правата и отразената вълна се повтарят, т.е.:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \ [m]$$

Знаем, че $v = \frac{\omega}{\beta}$, т.е. $\beta = \frac{\omega}{v}$. Следователно за дължината на вълната е функция на фазовата скорост и на честотата:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{v}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi f}{v}} = \frac{v}{f}\ [m]$$

Видове предавателни линии

Уравненията на предавателна линия, които получихме в предишния раздел, се отнасят за най-общия случай, когато константата на предаване γ и характеристичното съпротивление Z_C са комплексни числа. Но съществуват много ситуации, при които уравненията могат да бъдат значително опростени, в зависимост от вида на линията. Сега ще разгледаме основните типове предавателни линии.

Линия без загуби

В реалния свят линиите без загуби не съществуват. Но съществуват редица ситуации, при които загубите могат да се апроксимират към нула. Казваме, че една линия е без загуби, ако са изпълнени следните условия:

$$R_0 = 0; \quad G_0 = 0$$

Тогава константата на предаване е:

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 j\omega C_0} = \\ = 0 + j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta$$

С други думи константата на затихване и фазовата константа на линия без загуби са:

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0},$$

а характеристичното съпротивление е:

$$Z_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\ [\Omega],$$

т.е. е реално число.

Тъй като $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$, можем също така да определим фазовата скорост:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Последното уравнение показва, че скоростта на разпространение на вълните в линия без загуби зависи единствено от индуктивността и капацитивността на линията за единица дължина.

Двупроводна линия: За паралелна двупроводна линя е известно, че индуктивността и капацитивността са:

$$L_0 = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2a}$$

$$C_0 = \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}\frac{d}{2a}}$$

където:

- μ е магнитната проницаемост на средата $[H/m]$;
- ε е диелектричната проницаемост на диелектрика $[F/m]$;
- d е разстоянието между двата провдника $[m]$;

- a е диаметъра на проводниците $[m]$.

Следователно фазовата скорост на двупроводна линия без загуби е:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d}{2a}\frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{d}{2a}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Ако $\mu = \mu_0\mu_r$ и $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$, уравнението добива вида:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

където:

- $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ е скоростта на светлината $[m/s]$;
- ε_r е относителната диелектрична проницаемост на диелектрика между проводниците;
- μ_r е относителната магнитна проницаемост на средата около проводниците.

Обикновено $\mu_r = 1$, така че горното уравнение се свежда до:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Линия без изкривявания

Получените по-рано зависимости за константата на предаване γ и характеристичното (вълновото) съпротивление Z_C са функция на честотата. Това означава, че когато предаваните сигнали са широкоспектърни (включват множество честоти в големи граници), параметрите на предавателната линия ще се изменя значително, което ще доведе до изкривяване на сигнала.

Една линия е без изкривявания когато следните три параметъра не зависят от честотата:

- Константата на затихване α;
- Фазовата скорост v;
- Характеристичното съпротивление Z_C.

Нека да разгледаме предавателна линия, за която е изпълнено:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$$

За такава линия константата на предаване е:

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \\
= \sqrt{j\omega L_0 \left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1\right) j\omega C_0 \left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1\right)} = \\
= j\omega\sqrt{L_0 C_0}\sqrt{\left(\frac{R_0}{j\omega L_0} + 1\right)\left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1\right)}$$

В горното уравнение полагаме $\frac{G_0}{C_0} = \frac{R_0}{L_0}$:

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0C_0}\sqrt{\left(\frac{R_0}{j\omega L_0}+1\right)\left(\frac{R_0}{j\omega L_0}+1\right)} =$$

$$= j\omega\sqrt{L_0C_0}\left(\frac{R_0}{j\omega L_0}+1\right) = \sqrt{L_0C_0}\frac{R_0}{L_0} + j\omega\sqrt{L_0C_0} =$$

$$= R_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j\omega\sqrt{L_0C_0} = \alpha + j\beta$$

Вижда се, че константата на затихване $\alpha = R_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$ не зависи от честотата ω.

За да получим фазовата скорост използваме $\beta = \omega\sqrt{L_0C_0}$:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L_0C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$$

Вижда се, че и фазовата скорост не зависи от честотата ω.

Най-накрая определяме характеристичното съпротивление:

$$Z_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}.\frac{\frac{R_0}{j\omega L_0}+1}{\frac{G_0}{j\omega C_0}+1}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sqrt{\frac{\frac{R_0}{j\omega L_0}+1}{\frac{G_0}{j\omega C_0}+1}}$$

В горното уравнение полагаме $\frac{G_0}{C_0} = \frac{R_0}{L_0}$:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sqrt{\frac{\frac{R_0}{j\omega L_0}+1}{\frac{G_0}{j\omega C_0}+1}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sqrt{\frac{\frac{R_0}{j\omega L_0}+1}{\frac{R_0}{j\omega L_0}+1}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

Вижда се, че характеристичното съпротивление също не зависи от честотата ω.

Следователно ако е изпълнено условието $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$, предавателната линия е неизкривяваща.

<u>Линия с много ниско съпротивление</u>

Нека да разгледаме една предавателна линия, за която се използва проводник с много ниско съпротивление. Такава ситуация се получава при използване на суперпроводници. Тогава проводниците на практика само насочват вълната, но параметрите на разпространение зависят единствено от свойствата на диелектрика около тях.

При суперпроводниците можем да приемем, че $R_0 = 0$, при което константата на предаване става:

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 . j\omega C_0 \left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1\right)} =$$

$$= j\omega\sqrt{L_0 C_0}\sqrt{\left(\frac{G_0}{j\omega C_0} + 1\right)}$$

Тъй като влиянието на проводника е пренебрежимо малко, бихме могли да разглеждаме предаването като разпространение на електромагнитна вълна, при което може да се докаже, че константата на предаване е:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\left(\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} + 1\right)}$$

където σ е специфичната електропроводимост на диелектрика $[S/m]$.

Натоварени предавателни линии

До този момент получихме уравненията на предавателна линия, като x започва при генератора и свършва при товара:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^{+}e^{-\gamma x} + \dot{U}^{-}e^{\gamma x} \\ \dot{I} = \dfrac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\, e^{-\gamma x} - \dfrac{\dot{U}^{-}}{Z_C} e^{\gamma x} \end{cases}$$

Но от тук нататък ще ни е по-удобно да използваме уравненията в обратна посока, т.е. започващи при товара и свършващи при източника. Затова в горната система ще заместим:

$$+x = -z \quad \text{и} \quad -x = +z$$

Системата добива следния вид:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}^{+}e^{\gamma z} + \dot{U}^{-}e^{-\gamma z} \\ \dot{I} = \dfrac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\, e^{\gamma z} - \dfrac{\dot{U}^{-}}{Z_C} e^{-\gamma z} \end{cases}$$

Можем да определим константите $\dot{U}^{+}$ и $\dot{U}^{-}$ като решим уравненията за $z = 0$, т.е. като приемем, че напрежението $\dot{U}_2$ и токът $\dot{I}_2$ при товара са известни:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_2 = \dot{U}^{+}e^{0} + \dot{U}^{-}e^{0} \\ Z_C\dot{I}_2 = \dot{U}^{+}e^{0} - \dot{U}^{-}e^{0} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \dot{U}_2 = \dot{U}^{+} + \dot{U}^{-} \\ Z_C\dot{I}_2 = \dot{U}^{+} - \dot{U}^{-} \end{vmatrix}$$

Решенията на горната система са:

$$\dot{U}^{+} = 0{,}5\left(\dot{U}_2 + Z_C\dot{I}_2\right)$$

$$\dot{U}^{-} = 0{,}5\left(\dot{U}_2 - Z_C\dot{I}_2\right)$$

Пример: Предавателна линия, с характеристично съпротивление $Z_C = 100\ [\Omega]$, захранва товар $Z_T = 50 + j50\ [\Omega]$. Падът на напрежението върху товара е измерен с волтметър: $U_{\mathrm{T}} = 50\ [V]$.

а) Да се определят константите $\dot{U}^{+}$ и $\dot{U}^{-}$ на предавателните уравнения;

б) Ако дължината на линията е $l = 100\ [m]$, а константата и на предаване е $\gamma = j0.6$, да се определят напрежението и токът на входа на линията.

Решение а):

Волтметърът измерва ефективна стойност. Ще приемем нулева начална фаза на напрежението, т.е.:

$$\dot{U}_2 = 50e^{j0} = 50\ [V]$$

Следователно токът през товара е:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{Т}}} = \frac{50}{50 + j50} = 0{,}5 - j0{,}5\ [A]$$

Ще анализираме предавателните уравнения при $z = 0$:

$$\left|\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}^+ e^{\gamma z} + \dot{U}^- e^{-\gamma z} \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_C} e^{-\gamma z} \end{aligned}\right. \rightarrow \left|\begin{aligned} 50 &= \dot{U}^+ + \dot{U}^- \\ 100.(0{,}5 - j0{,}5) &= \dot{U}^+ - \dot{U}^- \end{aligned}\right.$$

Решенията на системата са:

$$\dot{U}^+ = 50 - j25\ [V]$$

$$\dot{U}^- = j25\ [V]$$

Решение б):

Сега можем да запишем предавателните уравнения на линията:

$$\left|\begin{aligned} \dot{U} &= (50 - j25)e^{j0{,}6z} + j25e^{-j0{,}6z} \\ \dot{I} &= \frac{50 - j25}{100} e^{j0{,}6z} - \frac{j25}{100} e^{-j0{,}6z} \end{aligned}\right.$$

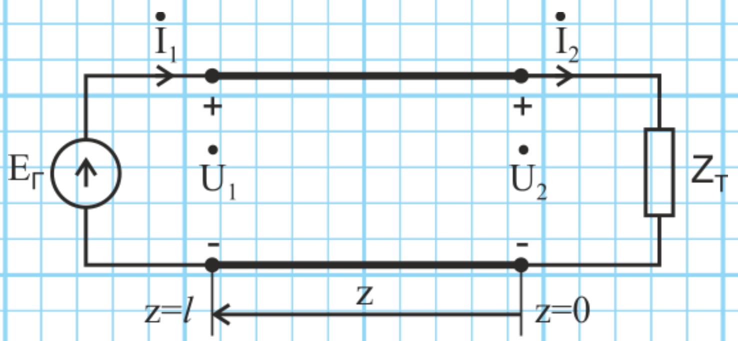
Дължината на линията е $l = 100\ [m]$, т.е. за да намерим токът и напрежението в началото на линията трябва да заместим $z = 100\ [m]$:

$$\dot{U}_1 = (50 - j25)e^{j0{,}6.100} + j25e^{-j0{,}6.100} = -62{,}9 - j15{,}2\ [V]$$

$$\dot{I}_1 = \frac{50 - j25}{100} e^{j0{,}6.100} - \frac{j25}{100} e^{-j0{,}6.100} = -0{,}476 + j0{,}324\ [A]$$

Коефициент на отражение

За този раздел отново ще използваме предавателните уравнения, с отправна точка при товара:



$$\left| \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}^{+}e^{\gamma z} + \dot{U}^{-}e^{-\gamma z} \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^{-}}{Z_C}e^{-\gamma z} \end{aligned} \right.$$

Комплексното съпротивление на товара може да се определи съгласно закона на Ом:

$$Z_{\text{Т}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$$

Можем да определим $\dot{U}_2$ and $\dot{I}_2$ като заместим $z = 0$:

$$Z_{\text{Т}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}^{+}e^{\gamma z} + \dot{U}^{-}e^{-\gamma z}}{\frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^{-}}{Z_C}e^{-\gamma z}} = Z_C\frac{\dot{U}^{+} + \dot{U}^{-}}{\dot{U}^{+} - \dot{U}^{-}}\ [\Omega]$$

Нека да разгледаме две ситуации:

В предавателната линия няма отразена вълна ($\dot{U}^{-} = 0$)

Тогава съпротивлението на товара е:

$$Z_{\text{T}} = Z_C \frac{\dot{U}^+ + \dot{U}^-}{\dot{U}^+ - \dot{U}^-} = Z_C \frac{\dot{U}^+ + 0}{\dot{U}^+ + 0} = Z_C$$

С други думи, когато съпротивлението на товара е равно на характеристичното на линията, във веригата няма да им отразена вълна.

В предавателната линия има отразена вълна ($\dot{U}^- \neq 0$)

В случай, че има отразена вълна, можем да определим нейната големина съгласно:

$$Z_{\text{T}} = Z_C \frac{\dot{U}^+ + \dot{U}^-}{\dot{U}^+ - \dot{U}^-} \quad \rightarrow \quad \dot{U}^- = \dot{U}^+ \frac{Z_{\text{T}} - Z_C}{Z_{\text{T}} + Z_C}$$

Казано с други думи, отразената вълна се дължи на правата вълна, която се отразява в товара. Това ни позволява да дефинираме т.н. коефициент на отражение $\dot{\Gamma}_{\text{T}}$:

$$\dot{\Gamma}_{\text{T}} = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{Z_{\text{T}} - Z_C}{Z_{\text{T}} + Z_C} = \Gamma e^{j\varphi_\Gamma}$$

където φ_Γ фазовия ъгъл на коефициентът на отражение.

Забележете, че в повечето ситуации ние не искаме да има отразена вълна по следните причини:

- Част от енергията се връща обратно към източника, т.е. остава неизползвана от товара;
- Наличието на отразена вълна води до изкривявания във формата на вълната.

Така че, в идеалната ситуация коефициентът на отражение трябва да е нула ($\dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} = 0$). В общия случай коефициентът на отражение се изменя от 0 до 1, като той помага да се открие наличие на отразена вълна и да се установи причината за нея.

Пример: Предавателна линия свързва предавател и антена. Характеристичното съпротивление на линията и съпротивлението на товара (антената) са съответно $Z_C = 50\ [\Omega]$ и $Z_{\mathrm{T}} = 50 + j50\ [\Omega]$. Да се определи коефициентът на отражение:

Решение:

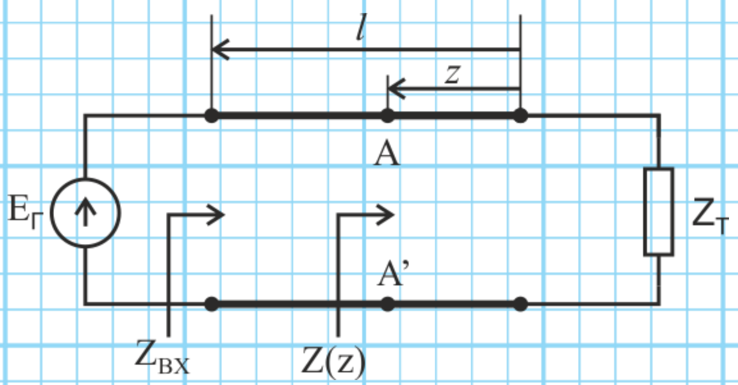
Заместваме числата:

$$\dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} = \frac{Z_{\mathrm{T}} - Z_C}{Z_{\mathrm{T}} + Z_C} = \frac{50 + j50 - 50}{50 + j50 + 50} = \frac{j1}{2 + j1} = \frac{e^{j90^\circ}}{2{,}2\mathrm{e}^{j27^\circ}} = 0{,}45\mathrm{e}^{\mathrm{j}63^\circ}$$

Вижда се, че $\dot{\Gamma}_{\mathrm{T}}$ не е нула, което означава че антената изпраща с по-малка мощност от максимално възможната.

Входно съпротивление и коефициент на отражение

Нека един товар се захранва от източник през предавателна линия:



Можем да дефинираме два вида съпротивления на линията:

- Входно съпротивление на линията $Z_{\text{ВХ}}$, при генератора;
- Входно съпротивление на линията $Z(z)$ на какво да е разстояние z от товара.

В общия случай можем да определим входното съпротивление $Z(z)$ използвайки тока и напрежението на разстояние z от товара:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^{+}e^{\gamma z} + \dot{U}^{-}e^{-\gamma z}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\,e^{\gamma z} - \frac{\dot{U}^{-}}{Z_C}\,e^{-\gamma z}$$

Тъй като коефициентът на отражение е $\dot{\Gamma}_{\text{Т}} = \frac{\dot{U}^{-}}{\dot{U}^{+}}$, можем да преобразуваме горните уравнения до:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^{+}\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-\gamma z}\right)$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-\gamma z}\right)$$

От тук можем да изразим входното съпротивление $Z(z)$:

$$Z(z) = \frac{\dot{U}(z)}{\dot{I}(z)} = \frac{\dot{U}^{+}\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-\gamma z}\right)}{\frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-\gamma z}\right)} = Z_C\frac{\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-\gamma z}\right)}{\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-\gamma z}\right)}, \Omega$$

Заместваме $\dot{\Gamma}_{\text{Т}} = \frac{Z_{\text{Т}} - Z_C}{Z_{\text{Т}} + Z_C}$ и получаваме:

$$Z(z) = Z_C \frac{\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-\gamma z}\right)}{\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-\gamma z}\right)} =$$

$$= Z_C \frac{\left((Z_{\mathrm{T}} + Z_C)e^{\gamma z} + (Z_{\mathrm{T}} - Z_C)e^{-\gamma z}\right)}{\left((Z_{\mathrm{T}} + Z_C)e^{\gamma z} - (Z_{\mathrm{T}} - Z_C)e^{-\gamma z}\right)} =$$

$$= Z_C \frac{\left(Z_{\mathrm{T}}(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) + Z_C(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z})\right)}{\left(Z_C(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) + Z_{\mathrm{T}}(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z})\right)}$$

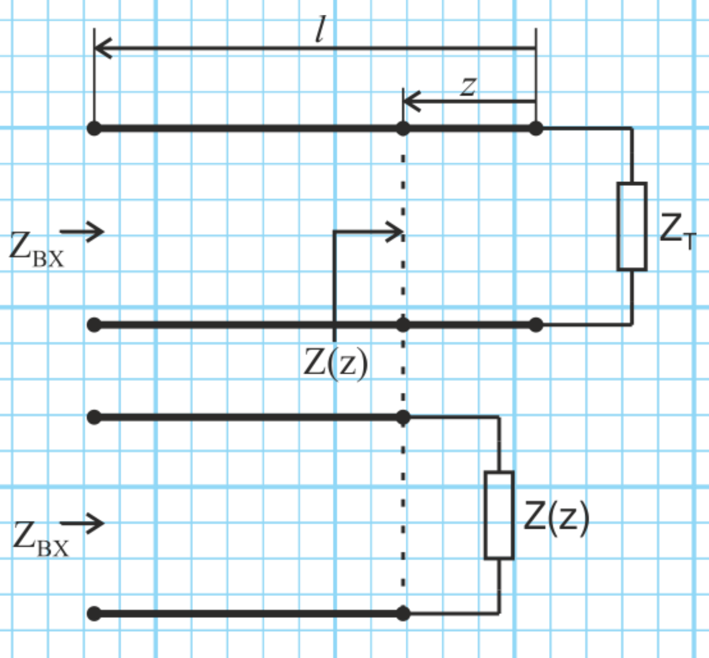
Функциите хиперболичен синус и косинус се дефинират с:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Следователно горните уравнения се преобразуват до:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_{\mathrm{T}} \cosh \gamma z + Z_C \sinh \gamma z)}{(Z_C \cosh \gamma z + Z_{\mathrm{T}} \sinh \gamma z)} = Z_C \frac{(Z_{\mathrm{T}} + Z_C \operatorname{tgh} \gamma z)}{(Z_C + Z_{\mathrm{T}} \operatorname{tgh} \gamma z)}$$

Получената зависимост ни позволява да определим входното съпротивление на линията на какво да е разстояние z от товара. Това означава, че можем да създадем еквивалентна заместваща схема с нов товар $Z(z)$:



Това също така означава, че можем да определим коефициента на отражение $\dot{\Gamma}(z)$ на разстояние z от товара:

$$\dot{\Gamma}(z) = \frac{Z(z) - Z_C}{Z(z) + Z_C} = \frac{Z_C \frac{\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z}\right)}{\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z}\right)} - Z_C}{Z_C \frac{\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z}\right)}{\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z}\right)} + Z_C} =$$

$$= \frac{\dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z} + \dot{\Gamma}_L e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} + e^{\gamma z}} = \dot{\Gamma}_L e^{-2\gamma z}$$

Пример: Предавателна линия с константа на предаване $\gamma = 0{,}01 + j0{,}05$ и характеристично съпротивление $Z_C = 50\ [\Omega]$, свързва източник и товар със съпротивление $Z_{\mathrm{T}} = 50 + j50\ [\Omega]$. Да се определи входното съпротивление на линията при товара ($z = 0\ [m]$) и на разстояние 10 m от товара ($z = 10\ [m]$).

Решение:

Входното съпротивление при товара е:

$$Z(0) = Z_C \frac{(Z_{\mathrm{T}} + Z_C \operatorname{tgh} \gamma z)}{(Z_C + Z_{\mathrm{T}} \operatorname{tgh} \gamma z)} = Z_C \frac{(Z_{\mathrm{T}} + Z_C \operatorname{tgh}(0))}{(Z_C + Z_{\mathrm{T}} \operatorname{tgh}(0))} = Z_{\mathrm{T}} = 50 + j50\ [\Omega]$$

Входното съпротивление на разстояние $10\ m$ от товара също може да се определи чрез горната зависимост. Но това означава, че ще се наложи да използваме хиперболични функции, което не е удобно. Затова ще го определим използвайки коефициента на отражение:

$$\dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} = \frac{Z_{\mathrm{T}} - Z_C}{Z_{\mathrm{T}} + Z_C} = \frac{50 + j50\ - 50}{50 + j50\ + 50} = 0{,}2 + j0{,}4 = 0{,}447e^{j1{,}11^\circ}$$

За входното съпротивление на разстояние $z = 10\ [m]$ от товара се получава:

$$Z(z) = Z_C \frac{\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-\gamma z}\right)}{\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-\gamma z}\right)} =$$

$$= 50 \frac{e^{(0{,}1+j0{,}5)} + 0{,}447e^{j1{,}11}e^{-(0{,}1+j0{,}5)}}{e^{(0{,}1+j0{,}5)} - 0{,}447e^{j1{,}11}e^{-(0{,}1+j0{,}5)}} =$$

$$= 50 \frac{2{,}91 + j1{,}7}{1{,}4249 + j0{,}6695} = 106{,}68 + j9{,}53\ [\Omega]$$

Натоварена линия без загуби

Уравнението за входно съпротивление на линия, което изразихме в предходната част, се отнася за най-общия случай, когато константата на предаване е комплексна. Тогава е наложително използването на хиперболични функции.

Но при линии без загуби ($\alpha = 0$ и $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$) уравнението значително се опростява:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_{\mathrm{T}} + Z_C \operatorname{tgh} \gamma z)}{(Z_C + Z_{\mathrm{T}} \operatorname{tgh} \gamma z)} = Z_C \frac{(Z_{\mathrm{T}} + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_{\mathrm{T}} \operatorname{tg} \beta z)}$$

При линия без загуби коефициентът на отражение става:

$$\dot{\Gamma}(z) = \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-2\gamma z} = \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-j2\beta z} = \Gamma_{\mathrm{T}} e^{j\varphi_\Gamma} e^{-j2\beta z} = \Gamma_{\mathrm{T}} e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}$$

Можем да представим $\dot{\Gamma}(z)$ във времевата област като синусоида:

$$\Gamma(t) = \Gamma_{\text{Т}}.\sin(\omega t + \varphi_\Gamma - 2\beta z)$$

С други думи коефициентът на отражение има амплитуда $\Gamma_{\text{Т}}$ и начална фаза, зависеща от разстоянието от товара:

$$\varphi_\Gamma - 2\beta z$$

В действителност това означава, че максималната и минималната стойност на коефициентът на отражение са някъде по дължина на линията. Знаем, че напрежението и токът по дължина на линията се изменят съгласно:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+\left(e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-j\beta z}\right) = \dot{U}^+e^{j\beta z}\left(1 + \Gamma_{\text{Т}}e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}\right)$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C}\left(e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-j\beta z}\right) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C}e^{j\beta z}\left(1 - \Gamma_{\text{Т}}e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}\right)$$

Ако приемем, че $\dot{U}^+ = U^+e^{j\varphi_U}$ и го заместим в първото уравнение, получаваме:

$$\dot{U}(z) = U^+e^{j(\beta z + \varphi_U)}\left(1 + \Gamma_{\text{Т}}e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}\right)$$

$e^{j(\beta z + \varphi_U)}$ и $e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}$ представляват синусоиди, т.е. приемат стойности от -1 до +1. Следователно максимумът и минимумът на напрежението са:

$$U_{MAX} = U^+(1 + \Gamma_{\text{Т}})$$

$$U_{MIN} = U^+(1 - \Gamma_{\text{Т}})$$

Коефициент на отразена вълна

Коефициентът на отразена вълна (standing wave ratio) се дефинира като отношението на максималното към минималното напрежение:

$$SWR = \frac{U_{MAX}}{U_{MIN}} = \frac{1 + \Gamma_{\mathrm{T}}}{1 - \Gamma_{\mathrm{T}}}$$

Коефициентът SWR приема стойности от 1 до ∞:

- При нулев коефициент на отражение (отсъствие на отразена вълна), SWR приема стойност 1 (наличие на бягаща вълна);
- При коефициент на отражение 1 (товарът отразява цялата постъпваща мощност), SWR приема стойност ∞ (наличие на стояща вълна);
- При всички останали ситуации имаме комбинация от бягаща и стояща вълна, а коефициентът SWR показва колко добре са съгласувани линията и товара.

В определени ситуации коефициентът SWR може да бъде измерен експериментално. Тогава големината на коефициентът на отражение може да се определи с:

$$\Gamma_{\mathrm{T}} = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

Пример: Линия без загуби с дължина $l = 100\ [m]$ и характеристично съпротивление $Z_C = 100\ [\Omega]$, захранва товар $Z_{\mathrm{T}} = 10 + j10\ [\Omega]$. Ако дължината на вълната е $\lambda = 55\ [m]$, да се определят входното съпротивление Z_{BX} на линията, коефициентът на отражение $\dot{\Gamma}(z)$ при генератора и коефициентът на стояща вълна SWR.

Решение: Първо ще определим константата на фазата β:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2.\pi}{55} = 0,1142\ [rad/m]$$

Следователно входното съпротивление на линията (при генератора, т.е. при $z = 100\ [m]$) е:

$$Z_{\text{ВХ}} = Z_C \frac{Z_{\text{Т}} + jZ_C\,\text{tg}(\beta z)}{Z_C + jZ_{\text{Т}}\,\text{tg}(\beta z)} =$$
$$= 100\frac{10 + j10 + j100\,\text{tg}(0,1142.100)}{100 + j(10 + j10)\,\text{tg}(0,1142.100)} =$$
$$= 100\frac{10 + j10 + j100.(-2,213)}{100 + j(10 + j10).(-2,213)} =$$
$$= 38,3 - j166,0\ [\Omega]$$

Коефициентът на отражение на товара е:

$$\dot{\Gamma}_{\text{Т}} = \frac{Z_{\text{Т}} - Z_C}{Z_{\text{Т}} + Z_C} = \frac{10 + j10\ - 100}{10 + j10\ + 100} = 0,82e^{j2,94°}$$

Следователно коефициентът на отражение при генератора е:

$$\dot{\Gamma}(z) = \dot{\Gamma}_{\text{Т}}e^{-j2\beta z} = 0,82e^{j2,94}.e^{-j2.0,1142.100} = 0,82e^{-j1,05°}$$

За коефициентът на стояща вълна се получава:

$$SWR = \frac{1 + \Gamma_{\text{Т}}}{1 - \Gamma_{\text{Т}}} = \frac{1 + 0,82}{1 - 0,82} = 10,11$$

Положение на минимумите и максимумите

Нека да се върнем отново към получените уравнения за напрежението и тока по дължина на линията:

$$\dot{U}(z) = U^{+}e^{j(\beta z + \varphi_U)}\left(1 + \Gamma_{\text{Т}}e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}\right)$$

$$\dot{I}(z) = \frac{U^+}{Z_C} e^{j(\beta z + \varphi_U)} \left(1 - \Gamma_T e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}\right)$$

Целта е да видим на какво разстояние от товара се намират минимумите и максимумите на напрежението. Тъй като $e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}$ е синусоида ($\sin(\omega t + \varphi_\Gamma - 2\beta z)$), напрежението ще има минимум, когато синусът има стойност -1, т.е. когато $\varphi_\Gamma - 2\beta z$ е равно на $-\pi$, -3π, -5π и т.н. С други думи условието за минимум на напрежението е:

$$\varphi_\Gamma - 2\beta z = -(2n + 1)\pi,$$

където $n = 0, 1, 2, \ldots$. На същото разстояние z, токът във веригата ще има максимум, заради знакът минус (-) пред $\Gamma_T e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}$. Нека да анализираме това условие.

Първият минимум е при $\varphi_\Gamma - 2\beta z = -\pi$, т.е. на разстояние:

$$z_{MIN1} = \frac{\varphi_\Gamma + \pi}{2\beta}\ [m]$$

Следващият минимум е при $\varphi_\Gamma - 2\beta z = -3\pi$:

$$z_{MIN2} = \frac{\varphi_\Gamma + 3\pi}{2\beta}\ [m]$$

По дефиниция една дължина на вълната е $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, т.е.:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

Следователно можем да запишем условията за минимум като:

$$z_{MIN1} = \frac{\varphi_\Gamma + \pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_\Gamma + \pi)$$

$$z_{MIN2} = \frac{\varphi_\Gamma + 3\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_\Gamma + 3\pi)$$

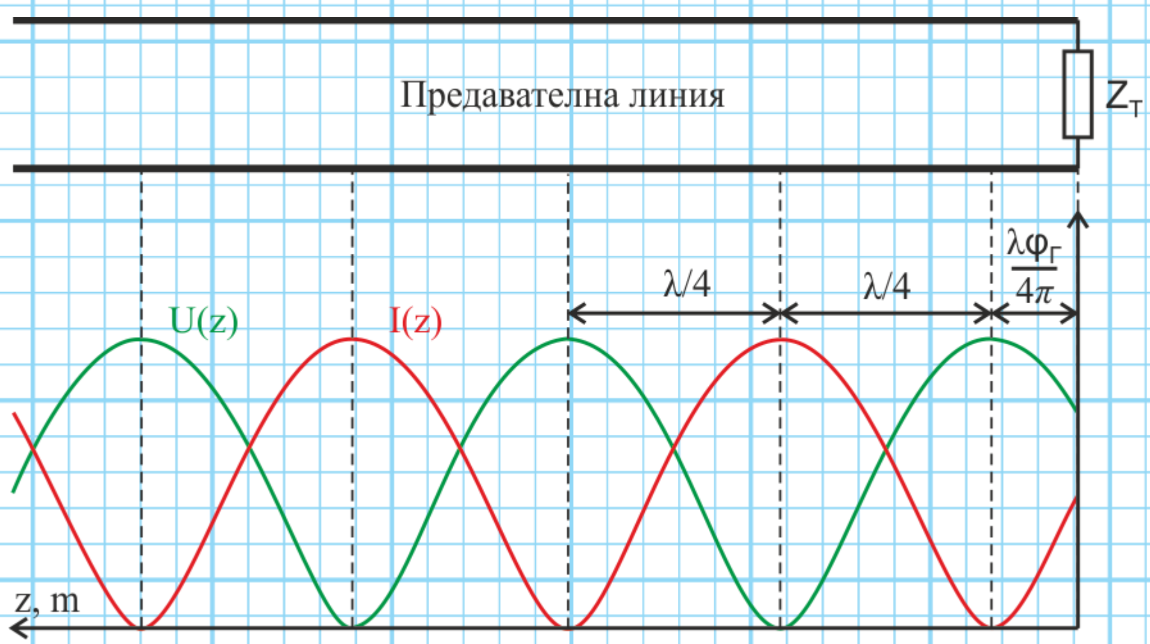
В общия случай:

$$z_{MIN} = \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_\Gamma + (2n+1)\pi),$$

където $n = 0,1,2, \ldots$. С други думи минимумите са на всяка полувълна $\frac{\lambda}{2}$. Знаем, че минимумите и максимумите са на равни разстояние един от друг, т.е. максимумите на напрежението са на разстояние $\frac{\lambda}{4}$ от минимумите:

$$z_{MAX} = \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_\Gamma + (2n+1)\pi) + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4\pi}(\varphi_\Gamma + 2n\pi),$$

където $n = 0,1,2, \ldots$. Получените зависимости могат да се представят и графично:



Сега ще разгледаме няколко частни случая на линия без загуби.

Съгласувана линия без загуби

Нека да разгледаме ситуацията при която товарът и предавателната линия са съгласувани:

$$Z_C = Z_\text{T}$$

Следователно входното съпротивление във всяка точка от линията е:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_\text{T} + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_\text{T} \operatorname{tg} \beta z)} = Z_C \frac{(Z_C + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)} = Z_C, [\Omega]$$

С други думи когато товарът и линията са съгласувани, входното съпротивление на веригата е константа и е равно на характеристичното на линията Z_C. Следователно коефициентът на отражение е също константа:

$$\dot{\Gamma}(z) = \frac{Z(z) - Z_C}{Z(z) + Z_C} = \frac{Z_C - Z_C}{Z_C + Z_C} = 0$$

Напрежението и токът във веригата са:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{j\beta z}\left(1 + \Gamma_\text{T} e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}\right) = \dot{U}^+ e^{j\beta z}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{j\beta z}\left(1 - \Gamma_\text{T} e^{j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)}\right) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C} e^{j\beta z}$$

За коефициента на стояща вълна се получава:

$$SWR = \frac{1 + \Gamma_\text{T}}{1 - \Gamma_\text{T}} = 1$$

От получените стойности се вижда, че напрежението и токът имат само права вълна и нямат отразена вълна. С други думи цялата мощност, която достига до товара, се консумира от него и няма отразена мощност обратно към източника.

Линия без загуби дадена на късо

Друга интересна ситуация е линия без загуби, чийто край е даден на късо:

$$Z_{\mathrm{T}} = 0$$

При тази ситуация входното съпротивление е:

$$Z(z) = Z_C \frac{(Z_{\mathrm{T}} + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + jZ_{\mathrm{T}} \operatorname{tg} \beta z)} = Z_C \frac{(0 + jZ_C \operatorname{tg} \beta z)}{(Z_C + 0)} =$$
$$= jZ_C \operatorname{tg} \beta z \ \ [\Omega]$$

Вижда се, че входното съпротивление на линия без загуби, дадена на късо, е чисто реактивно и се изменя от $-\infty$ до $+\infty$. Следователно коефициентът на отражение е:

$$\dot{\Gamma}_L = \frac{Z_{\mathrm{T}} - Z_C}{Z_{\mathrm{T}} + Z_C} = \frac{0 - Z_C}{0 + Z_C} = -1$$

Напрежението и токът по дължина на линията се изменят съгласно:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^{+}\left(e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_L e^{-j\beta z}\right) = \dot{U}^{+}\left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}\right) =$$
$$= \dot{U}^{+}(\cos \beta z + \mathrm{j} \sin \beta z - \cos \beta z + \mathrm{j} \sin \beta z) =$$
$$= 2j\dot{V}^{+} \sin \beta z$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C}\left(e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_L e^{-j\beta z}\right) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C}\left(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}\right) =$$

$$= 2\frac{\dot{U}^+}{Z_C}\cos\beta z$$

Като се има предвид, че $\sin\beta z$ приема стойности от -1 до +1, максималната и минималната стойност на напрежението са:

$$U_{MAX} = 2\left|j\dot{U}^+\right| \, [V]$$

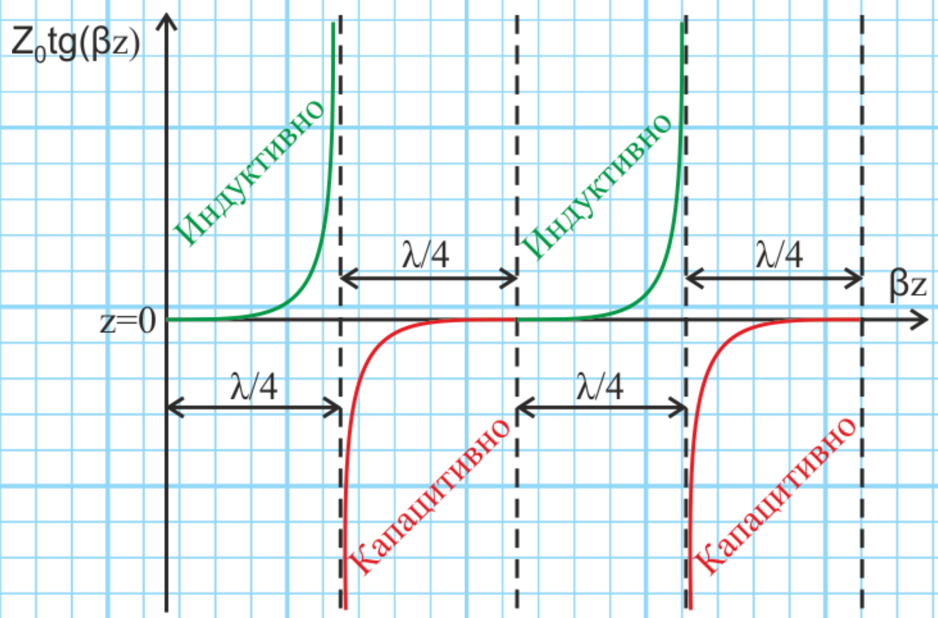
$$U_{MIN} = 0 \, [V]$$

Следователно коефициентът на стояща вълна е:

$$SWR = \frac{U_{MAX}}{U_{MIN}} = \infty,$$

т.е. по линията има стояща вълна и няма бягаща вълна, така че няма консумация на мощност.

Нека да се върнем отново към входното съпротивление $Z(z)$, чието изменение е представено на следващата фигура:



Вижда се, че то може да бъде или чисто капацитивно или чисто индуктивно, в зависимост от дължината на линията. Ако дължината на линията се увеличи/намали с една полувълна ($\frac{\lambda}{2}$), съпротивлението не се изменя.

При $z = 0$ съпротивлението е $Z(z) = 0$, т.е. няма предаване на мощност. Това се потвърждава и от стойностите на напрежението и тока при товара:

$$\dot{U}(0) = 2j\dot{U}^{+}\sin(\beta.0) = 0\ [V]$$

$$\dot{I}(0) = 2\frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\cos(\beta.0) = 2\frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\ [A]$$

Токът има максимум при товара, а напрежението - на разстояние $\frac{\lambda}{2}$ от товара. Отразената вълна на тока е равна на правата.

<u>Линия без загуби на празен ход</u>

Друга интересна ситуация е ненатоварената линия без загуби:

$$Z_{\mathrm{T}} = \infty$$

Входното съпротивление на такава линия е:

$$Z(z) = Z_C\frac{(Z_{\mathrm{T}} + jZ_C\operatorname{tg}\beta z)}{(Z_C + jZ_{\mathrm{T}}\operatorname{tg}\beta z)} = Z_C\frac{\left(1 + j\frac{Z_C}{Z_{\mathrm{T}}}\operatorname{tg}\beta z\right)}{\left(\frac{Z_C}{Z_{\mathrm{T}}} + j\operatorname{tg}\beta z\right)} =$$

$$= Z_C\frac{(1+0)}{(0 + j\operatorname{tg}\beta z)} = -jZ_C\operatorname{cotg}\beta z\ \ [\Omega]$$

За коефициентът на отражение се получава:

$$\dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} = \frac{Z_{\mathrm{T}} - Z_C}{Z_{\mathrm{T}} + Z_C} = \frac{1 - \frac{Z_C}{Z_{\mathrm{T}}}}{1 + \frac{Z_C}{Z_{\mathrm{T}}}} = \frac{1 - \frac{Z_C}{\infty}}{1 + \frac{Z_C}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Следователно напрежението и токът по дължина на линията се изменят съгласно:

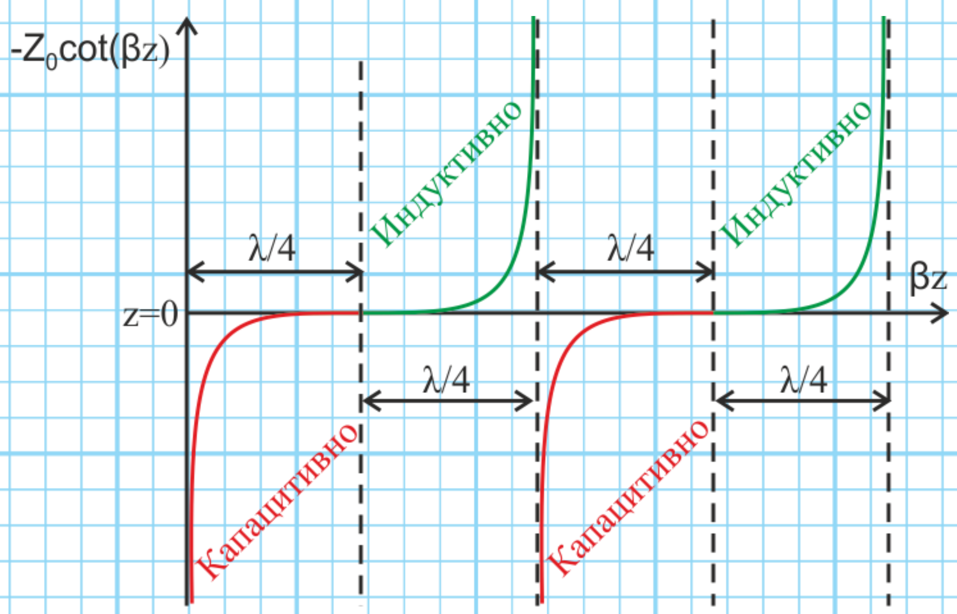
$$\dot{U}(z) = \dot{U}^{+}\left(e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-j\beta z}\right) = \dot{U}^{+}\left(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}\right) = 2j\dot{U}^{+}\cos\beta z$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\left(e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_{\mathrm{T}} e^{-j\beta z}\right) = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}\right) = 2\frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\sin\beta z$$

Коефициентът на стояща вълна е:

$$SWR = \frac{1 + \Gamma_{\mathrm{T}}}{1 - \Gamma_{\mathrm{T}}} = \frac{2U^{+}}{0} = \infty,$$

т.е. отново имаме стояща вълна. Ще разгледаме изменението на входното съпротивление $Z(z)$ по дължина на линията:



Отново се вижда, че съпротивлението е или чисто индуктивно или чисто капацитивно, в зависимост от дължината на линията.

Напрежението и токът при товара ($z = 0$) са:

$$\dot{U}(0) = 2j\dot{U}^{+}\cos(\beta.0) = 2j\dot{U}^{+}\ [V]$$

$$\dot{I}(z) = 2\frac{\dot{U}^{+}}{Z_C}\sin(\beta.0) = 0\ [A]$$

Следователно максималното напрежение е при товара, а максималният ток – на разстояние $\frac{\lambda}{2}$ от товара. Няма разсейване на мощност в товара ($P = I^2 Re\{Z_T\} = 0$), така че отразената вълна на напрежението е равна на правата.

Сега си представете, че умножим входното съпротивленията на празен ход и на късо съединение на линията. Получава се:

$$Z_{\text{ВХ\_ПХ}}.Z_{\text{ВХ}_{\text{КС}}} = -jZ_C\cot\beta z\,.jZ_C\,\text{tg}\,\beta z = Z_C^2$$

С други думи можем да определим характеристичното съпротивление на една линията експериментално чрез:

$$Z_C = \sqrt{Z_{\text{ВХ\_ПХ}}.Z_{\text{ВХ\_КС}}}$$

където $Z_{\text{ВХ\_ПХ}}$ и $Z_{\text{ВХ\_КС}}$ са входните съпротивления на линията, съответно при празен ход и късо съединение.

Мощности в предавателните линии

За да се определи потокът на мощността в дадена точка z от линията, в общия случай трябва да умножим токът и напрежението. Моментната мощност е:

$$p(z,t) = u(z,t).i(z,t)$$

Ако комплексните мощност и ток са:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+\left(e^{\gamma z} + \dot{\Gamma}_\text{T} e^{-\gamma z}\right) \quad \text{и} \quad \dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C}\left(e^{\gamma z} - \dot{\Gamma}_\text{T} e^{-\gamma z}\right),$$

то активната мощност се определя съгласно

$$P(z) = \frac{1}{2} Re\left\{\dot{U}(z)\overset{*}{I}(z)\right\}$$

В случай на линия без загуби имаме:

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+\left(e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_\text{T} e^{-j\beta z}\right) \quad \text{и} \quad \dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_C}\left(e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_\text{T} e^{-j\beta z}\right)$$

Като се има предвид, че при линия без загуби характеристичното съпротивление е чисто активно, ако коефициентът на отражение е $\dot{\Gamma}_L = \Gamma_L e^{j\varphi_\Gamma}$, активната мощност ще бъде:

$$P = \frac{1}{2} Re\left\{\dot{U}^+\left(e^{j\beta z} + \dot{\Gamma}_\text{T} e^{-j\beta z}\right)\left(\frac{\dot{U}^+}{Z_C}\left(e^{j\beta z} - \dot{\Gamma}_\text{T} e^{-j\beta z}\right)\right)^*\right\} =$$

$$= \frac{\left|\dot{U}^+\right|^2}{2Z_C} Re\left\{\left(e^{j\beta z} + \Gamma_\text{T} e^{j(\varphi_\Gamma - \beta z)}\right)\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_\text{T} e^{-j(\varphi_\Gamma - \beta z)}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\left|\dot{U}^+\right|^2}{2Z_C} Re\left\{e^{j\beta z} e^{-j\beta z} + \Gamma_\text{T} e^{j(\varphi_\Gamma - \beta z)} e^{-j\beta z} - \right.$$

$$-\Gamma_T e^{-j(\varphi_\Gamma-\beta z)} e^{j\beta z} - \Gamma_T e^{j(\varphi_\Gamma-\beta z)} \Gamma_T e^{-j(\varphi_\Gamma-\beta z)}\} =$$
$$= \frac{(U^+)^2}{2Z_C} Re\{1 - \Gamma_T^2 + \Gamma_T(e^{j(\varphi_\Gamma-2\beta z)} - e^{-j(\varphi_\Gamma-2\beta z)})\}$$

Прилагаме формулата на Ойлер за съставката $\Gamma_T(e^{j(\varphi_\Gamma-2\beta z)} - e^{-j(\varphi_\Gamma-2\beta z)})$:

$$\Gamma_T\left(e^{j(\varphi_\Gamma-2\beta z)} - e^{-j(\varphi_\Gamma-2\beta z)}\right)$$
$$= sin(\varphi_\Gamma - 2\beta z) - j\,cos(\varphi_\Gamma - 2\beta z) -$$
$$- sin\left(-j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)\right) + j\,cos\left(-j(\varphi_\Gamma - 2\beta z)\right) =$$
$$= j2\Gamma_L(sin(\varphi_\Gamma - 2\beta z))$$

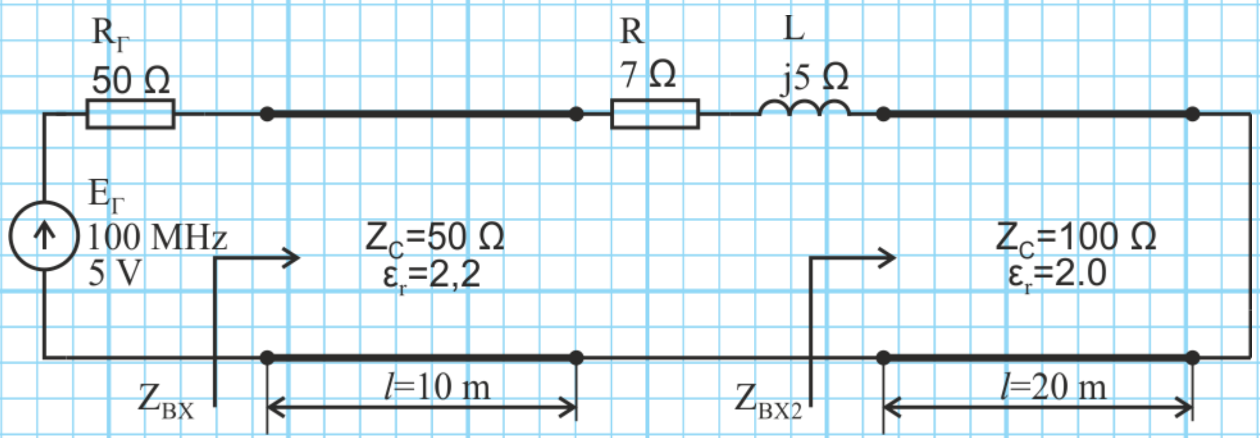
Вижда се, че тя е чисто реактивна, т.е. активната мощност в линия без загуби е:

$$P = \frac{(U^+)^2}{2Z_C}(1 - \Gamma_L^2),$$

т.е. не е функция на z, а е една и съща по цялата дължина на линията.

Анализ на дълги линии без загуби

Пример: Дадената верига съдържа две линии без загуби. Да се определи входното съпротивление Z_{BX} и мощността, постъпваща в първата линията.



Първо трябва да определим дължините на вълните за двете линии, като за целта са ни нужни фазовите им скорости:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3.10^8}{\sqrt{2,2}} = 2,02.10^8\ [m/s]$$

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3.10^8}{\sqrt{2,0}} = 2,12.10^8\ [m/s]$$

Следователно дължините на вълните за двете линии са:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{2,02.10^8}{100.10^6} = 2,02\ [m]$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{2,12.10^8}{100.10^6} = 2,12\ [m]$$

Следваща стъпка е да определим фазовите константи на двете линии:

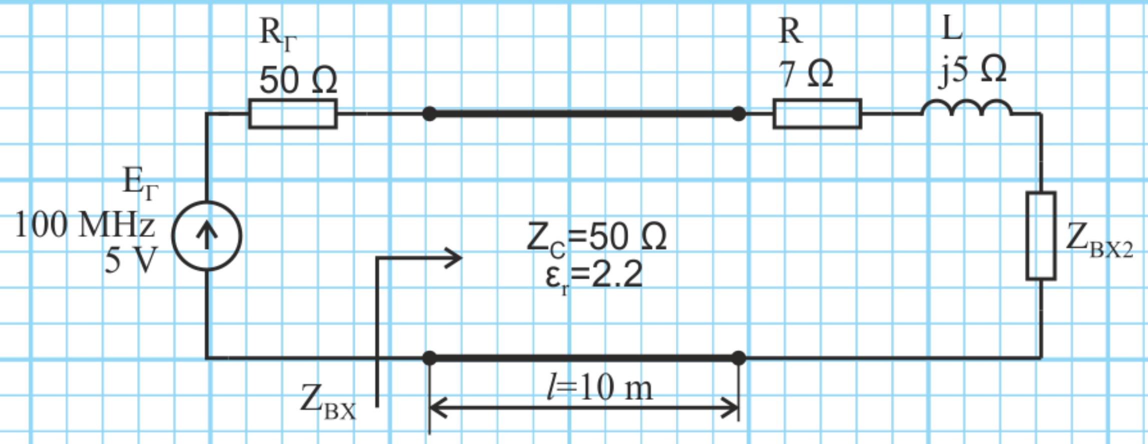
$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2,02} = 3,11\ [rad/m]$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{2,12} = 2,96\ [rad/m]$$

Вече можем да определим входното съпротивление на втората линия, при $z = 20\ [m]$. Можем директно да приложим уравнението при късо съединение, или да използваме общата зависимост със $Z_{\text{Т}} = 0$:

$$Z_{\text{ВХ2}} = Z_C \frac{Z_{\text{Т}} + jZ_C\, tg\, \beta_2 z}{Z_C + jZ_{\text{Т}}\, tg\, \beta_2 z} = 100 \frac{j100\, tg(2,96.20)}{100 + j.0.tg\, \beta_2 z} = -j53,4\ [\Omega]$$

Вече можем да създаден еквивалентна заместваща схема:



Товарът на предавателната линия е:

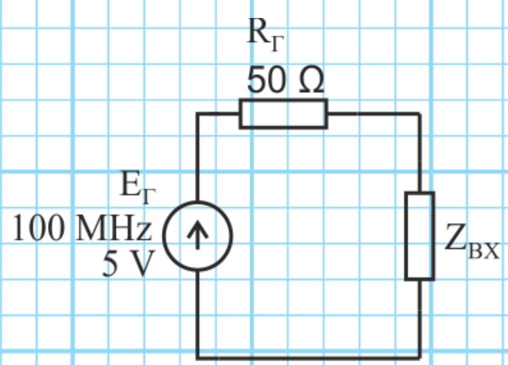
$$Z_{\text{Т}} = 7 + j5 + Z_{\text{ВХ2}} = 7 + j5 - j53{,}4 = 7 - j48{,}4\ [\Omega]$$

Можем да определим входното съпротивление на линията, която е с дължина $z = 10\ [m]$:

$$Z_{\text{ВХ}} = Z_C \frac{Z_{\text{Т}} + jZ_C\, tg\, \beta_1 z}{Z_C + jZ_{\text{Т}}\, tg\, \beta_1 z} = 50\frac{7 - j48{,}4 + j50\, tg(3{,}11.10)}{50 + j(7 - j48{,}4)\, tg(3{,}11.10)} =$$

$$= 50\frac{7 - j48{,}4 + j50(-0{,}33)}{50 + (j7 + 48{,}4)(-0{,}33)} = 16{,}7 - j94{,}2\ [\Omega]$$

За да определим входящата в линията мощност, ще създадем още една еквивалентна заместваща схема:



Токът във веригата е:

$$\dot{I} = \frac{5}{50 + 16{,}7 - j94{,}2} = 0{,}0433e^{j0{,}96}\ [A]$$

Ако приемем, че напрежението е зададено с ефективната си стойност, тогава ефективната стойност на тока е:

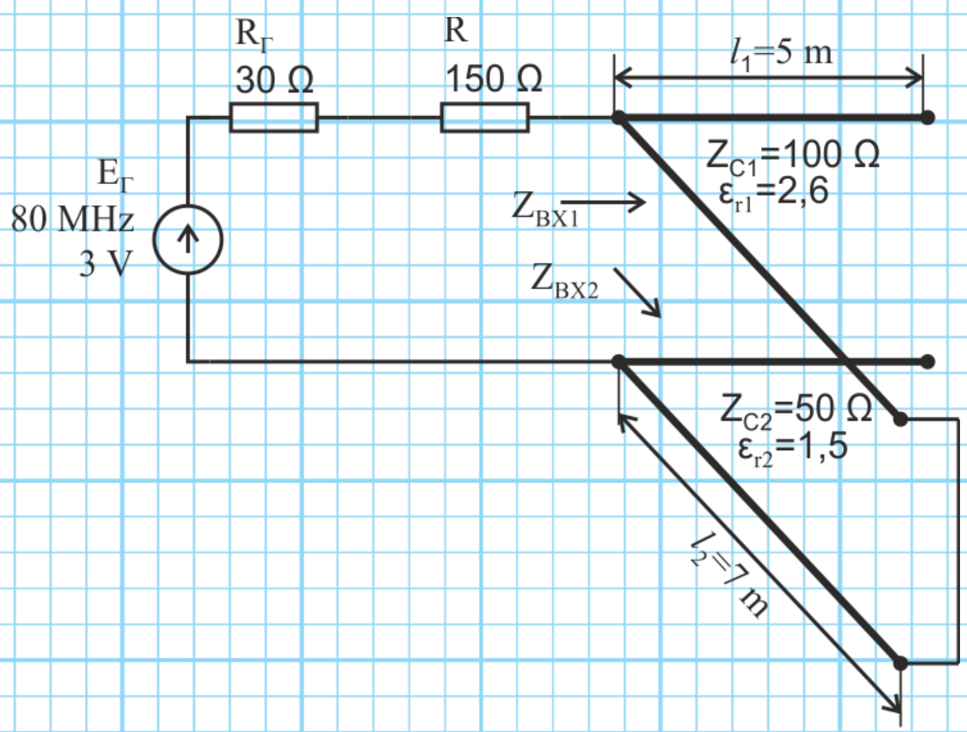
$$I = 0{,}0433\ [A],$$

а активната и реактивната мощности, влизащи във дългата линия, са:

$$P = I^2.Re\{Z_{\text{ВХ}}\} = 0{,}0433^2.16{,}7 = 31\ [mW]$$

$$Q = I^2.Im\{Z_{\text{ВХ}}\} = -0{,}0433^2.94{,}2 = -176\ [mVAr]$$

Пример: Да се определи активната мощност във веригата, ако двете дълги линии са без загуби:



Решение: Първо ще определим фазовите скорости на двете линии:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = \frac{3.10^8}{\sqrt{2{,}6}} = 1{,}86.10^8\ [m/s]$$

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{3.10^8}{\sqrt{1,5}} = 2,45.10^8 \; [m/s]$$

Следователно дължината на вълната в двете линии е:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{1,86.10^8}{80.10^6} = 2,325 \; [m]$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{2,45.10^8}{80.10^6} = 3,06 \; [m]$$

Константите на фазите на двете линии са:

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2,325} = 2,70 \; [rad/s]$$

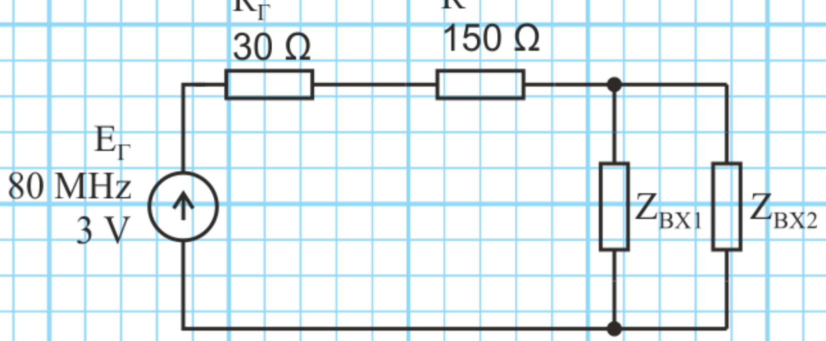
$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{3,06} = 2,05 \; [rad/s]$$

Едната линия е свързана на празен ход, а втората – на късо съединение. Следователно двете входни съпротивления са:

$$Z_{\text{ВХ1}} = jZ_C \, cotg \, \beta_1 z = -j100 \, cotg(2,70.5) = -j74 \; [\Omega]$$

$$Z_{\text{ВХ2}} = jZ_C \, tg \, \beta_2 z = j50 \, tg(2,05.7) = -j231 \; [\Omega]$$

Дългите линии са свързани последователно, така че можем да създадем следната еквивалентна заместваща схема:



Еквивалентното съпротивление във веригата е:

$$Z_{\mathrm{E}} = R_{\Gamma} + \mathrm{R} + Z_{\mathrm{BX1}}||Z_{\mathrm{BX2}} = 30 + 150 + \frac{(-j74).(-j231)}{-j74 - j231} =$$
$$= 180 - j56 \ [\Omega]$$

Следователно общият ток във веригата е:

$$\dot{I} = \frac{3}{\mathrm{Z_E}} = \frac{3}{180 - j56} = 0{,}0159e^{j17{,}3} \ [A]$$

Ако приемем, че източникът е зададен с ефективната си стойност, то ефективната стойност на тока е $I = 0{,}0159 \ [A]$. Следователно разсейваната активна мощност във веригата е:

$$P = I^2 . Re\{Z_E\} = 0{,}0159^2 . 180 = 46 \ [mW]$$