Честотни зависимости в електрическите вериги

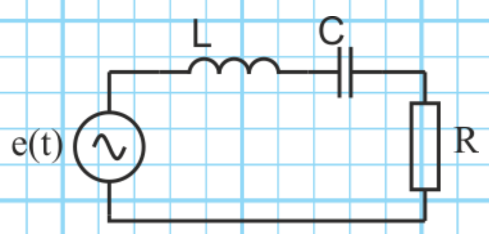
Честотни зависимости

Вече знаем, че съпротивленията на бобините и кондензаторите зависят от честотата на синусоидалния сигнал. Честотните зависимости на една електрическа верига представляват възможните промени в нейното поведение в зависимост от честотата на токовете и напреженията. Когато в една електрическа верига има едновременно бобини и кондензатори, в нея могат да възникват резонансни явления за една или повече честоти.

Тези свойства на реактивните елементи се използват за създаването на електрически филтри и намират широко приложение в компютърната и комуникационна техника.

Резонанс на напреженията

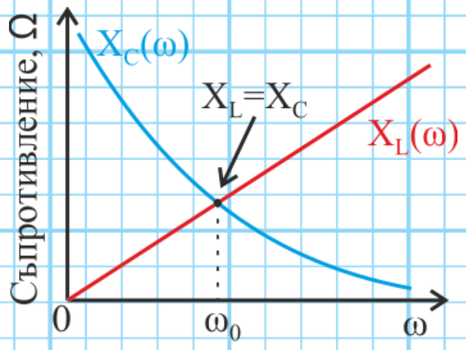
Нека да разгледаме една последователна RLC верига, захранвана от синусоидален източник на напрежение $e(t)$:



Еквивалентното комплексно съпротивление на веригата е:

$$Z = R + j(X_L - X_C)$$

Тъй като $X_L = \omega L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C}$, с увеличаване на честотата ω, $X_L(\omega)$ се увеличава, а $X_C(\omega)$ – намалява. Честотните зависимости на двете реактивни съпротивления могат да се представят графично:



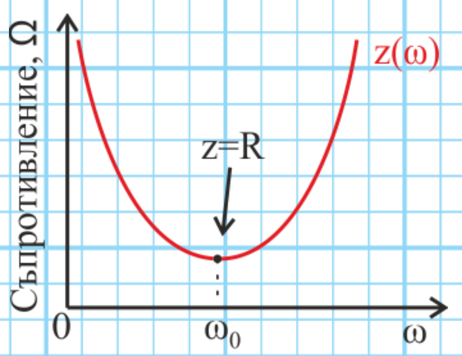
Вижда се, че двете криви, $X_L(\omega)$ и $X_C(\omega)$, се пресичат при определена честота ω_0. Тази честота се нарича резонансна, а явлението при което $X_L = X_C$ се нарича резонанс на напреженията. При ъглова честота $\omega = \omega_0$ е изпълнено:

$$Z(\omega_0) = R + j(X_L - X_C) = R + j.0 = R,$$

т.е. комплексното съпротивление на веригата става чисто активно. Пълното съпротивление (импеданса) на веригата е:

$$z(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Вижда се, че при резонанс на напреженията, $z(\omega_0) = R$, т.е. z е възможно най-малко. Честотната зависимост $z(\omega)$ е представена отдолу:



Условието за резонанс на напреженията е:

$$X_L = X_C \quad \rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

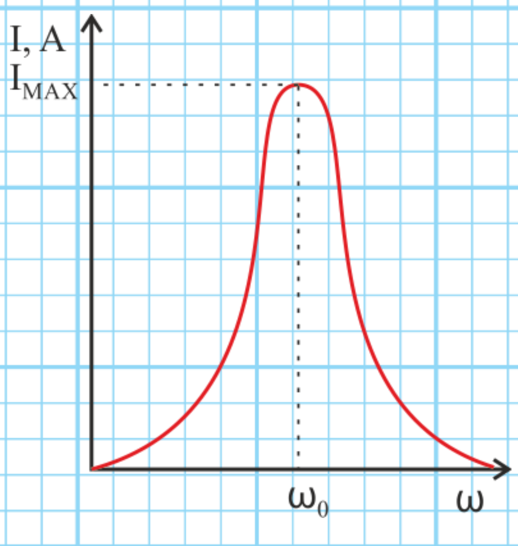
От него можем да изразим т.н. **резонансна честота**, чрез индуктивността L и капацитета C:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{или} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Ако E е ефективната стойност на източника, за ефективната стойност на тока във веригата се получава:

$$I(\omega) = \frac{E}{z(\omega)} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

От зависимостта може да се види, че токът ще има максимум когато импедансът $z(\omega)$ има минимум, т.е. при резонанс:



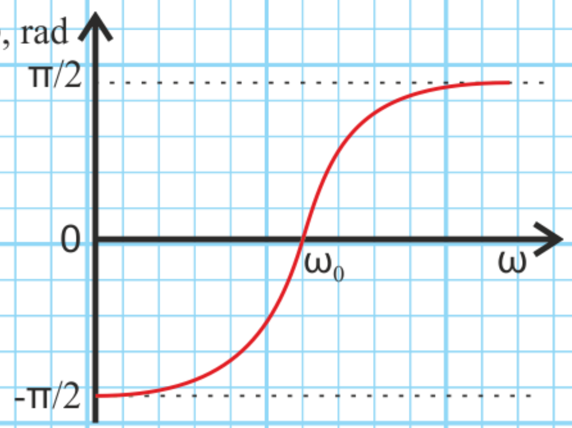
Ъгълът на фазовата разлика φ също зависи от честотата:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{X}{R} = \operatorname{arctg}\frac{X_L - X_C}{R}$$

От уравнението се вижда, че при честота $\omega = \omega_0$ ъгълът на фазовата разлика става:

$$\varphi(\omega_0) = \mathrm{arctg}\frac{X_L - X_C}{R} = \mathrm{arctg}\frac{0}{R} = 0°$$

т.е. ъгълът на фазовата разлика ще приема стойности от -90° до +90°, като по време на резонанс ще бъде 0°:



Критични честоти при половин мощност

Мощността, която се консумира от резистора R, е:

$$P = I^2.R = \left(\frac{E}{z}\right)^2.R$$

Следователно, консумираната от резистора R мощност ще бъде максимална, когато токът е максимален, т.е. при резонанс:

$$P_{MAX} = I_{MAX}^2.R = \left(\frac{E}{R}\right)^2.R = \frac{E^2}{R}$$

Резисторът ще консумира половината от максималната мощност, когато токът е $\sqrt{2}$ пъти по-малък от максималния:

$$P_{0,5} = \frac{I_{MAX}^2 . R}{2} = \left(\frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}\right)^2 . R = (0{,}707 . I_{MAX})^2 . R$$

При половин консумирана мощност можем да запишем следното равенство:

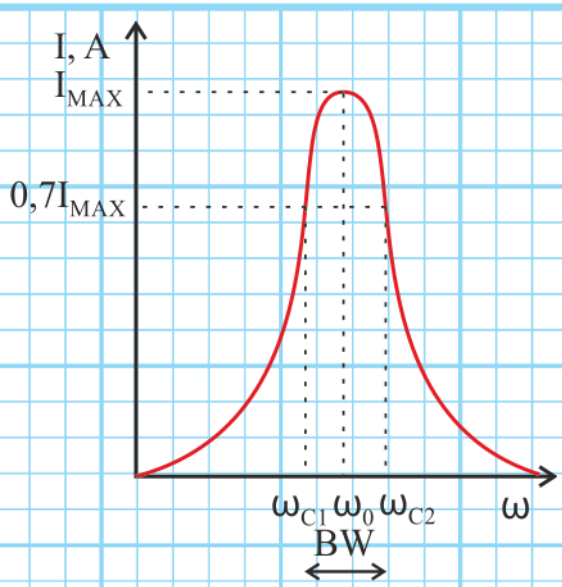
$$\frac{P_{MAX}}{2} = \frac{E^2}{2R} = \frac{E^2}{z^2} . R \quad \rightarrow \quad \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}R$$

При решаване на горното квадратно уравнение спрямо ω се получават две решения:

$$\omega_{C1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{C2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

ω_{C1} и ω_{C2} се наричат критични честоти, при които резисторът консумира половината от максималната мощност.
Графичната интерпретация на получените зависимости е:



Може да се докаже, че резонансната и критичните честоти са свързани по следния начин:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{C1}.\omega_{C2}}$$

За домашно: А вие можете ли да го докажете?

Критичните честоти ни позволяват да дефинираме и понятието **широчина на честотната лента** в rad/s или в Hz:

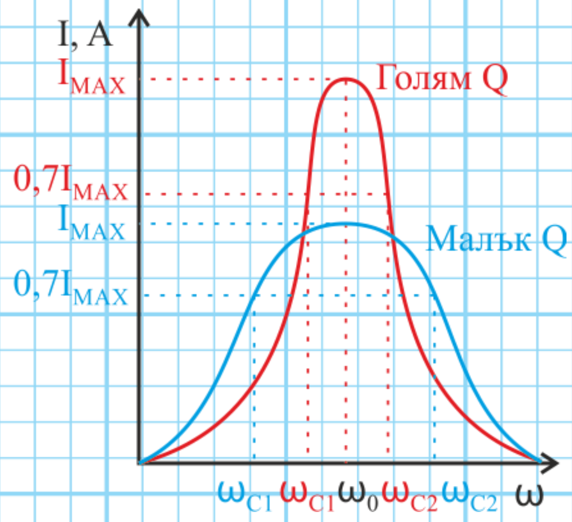
$$BW_\omega = \omega_{C2} - \omega_{C1}, rad.s^{-1} \quad \text{или} \quad BW_f = f_{C2} - f_{C1}, Hz$$

Качествен фактор на RLC верига

Понятието качественият фактор се дефинира като отношението на резонансната честота и широчината на честотната лента:

$$Q = \frac{f_0}{BW_f} = \frac{\omega_0}{BW_\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}}$$

При голям качествен фактор Q честотната лента BW е тясна, но максималната стойност на тока е по-голяма. От друга страна, при нисък Q фактор, максималната стойност на тока е по-малка, но широчината на честотната лента е по-голяма. Горното твърдение е представено графично:



В случай на последователна RLC верига Q-факторът е:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} - \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right]} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{L}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}.L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{X_L(\omega_0) \quad \text{или} \quad X_C(\omega_0)}{R}$$

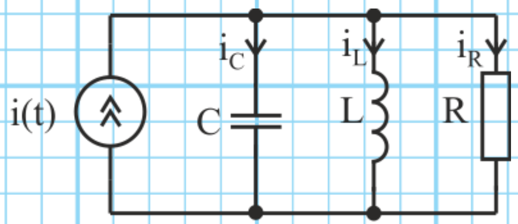
т.е. Q може да се определи като съотношението на реактивното съпротивление при $\omega = \omega_0$ и активното съпротивление.

В случай на висок качествен фактор (за висок качествен фактор се приемат стойности на $Q > 10$), критичните честоти могат да бъдат определени достатъчно точно с:

$$\omega_{C1} = \omega_0 - \frac{BW_\omega}{2} \quad \text{и} \quad \omega_{C2} = \omega_0 + \frac{BW_\omega}{2}$$

Резонанс на токовете

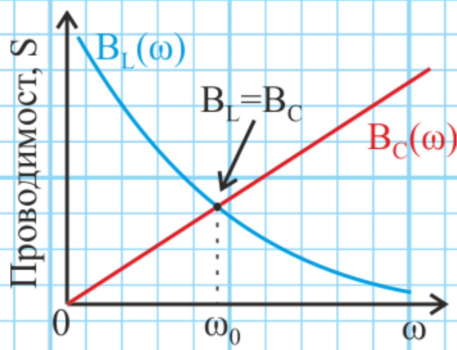
Нека да разгледаме една паралелна RLC верига, захранвана от синусоидален източник на ток:



Комплексната проводимост на веригата е:

$$Y = \frac{1}{R} - j(B_L - B_C) = G - j(B_L - B_C)$$

където двете реактивни проводимости са функция на честотата: $B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}$ и $B_C(\omega) = \omega C$. Функционалната им зависимост от честотата ω е представена графично на фигурата:



Ситуацията при която $B_L(\omega) = B_C(\omega)$, се нарича резонанс на токовете, а честотата ω_0 – резонансна.

Вижда се, че условието за резонанс на токовете е:

$$B_L = B_C \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\omega L} = \omega C$$

т.е. резонансната честота се определя по същия начин, както и при последователна RLC верига:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

За паралелна RLC верига може да се запише уравнение по ПЗК:

$$i = i_L + i_C + i_R$$

Тъй като при резонанс на токовете $B_L = B_C$, токовете i_L и i_C ще бъдат равни, но с противоположна посока, т.е.:

$$i_L + i_C = 0$$

поради което при резонанс входният ток i и токът на резистора i_R ще бъдат равни, а i_R ще има максимум:

$$i = i_L + i_C + i_R = 0 + i_R$$

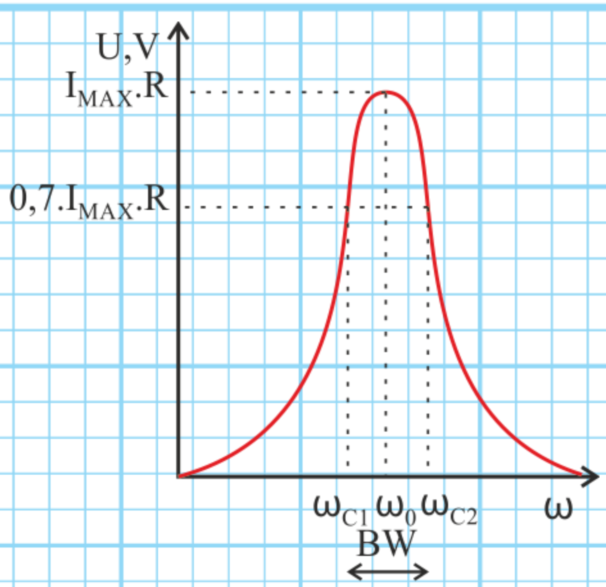
Аналогично на последователния RLC контур, можем да определим критичните честоти на паралелна RLC верига:

$$\omega_{C1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{C2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

като широчината на честотната лента отново е:

$$BW = \omega_{C2} - \omega_{C1}$$



Качественият фактор на паралелна RLC верига е:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{X_L(\omega_0) \quad \text{или} \quad X_C(\omega_0)}$$

т.е. по-високо съпротивление на товара R води до увеличаване на Q.

Резонансни явления в сложни вериги

В случай, че дадена верига повече от един кондензатор и бобина, могат да възникнат повече от един резонанса, за различни части от веригата. Условието за възникването на резонанс на напреженията в някаква част от веригата с еквивалентно комплексно съпротивление Z_E е:

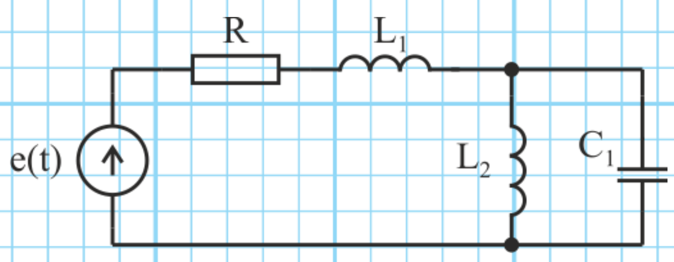
$$Z_E = R_E + jX_E = R_E \quad \text{или} \quad X_E = 0$$

Аналогично, за да възникне резонанс на токовете в някакъв участък от веригата с комплексна проводимост Y_E е:

$$Y_E = G_E - jB_E = G_E \quad \text{или} \quad B_E = 0$$

Качественият фактор Q и широчината на честотната лента се определят аналогично на разгледаните вериги, но използвайки еквивалентните параметри.

Пример: Да се определят условията за настъпване на резонанс на напреженията и резонанс на токовете в долупосочената верига.



В дадената верига могат да възникнат два резонанса:

- Резонанс на токовете за L_2 и C_1;
- Резонанс на напреженията за L_1, L_2 и C_1 (за цялата верига).

Първо ще определим условието за възникване резонанс на токовете. Еквивалентната комплексна проводимост на L_2 и C_1 е:

$$Y_E = -\left(j\frac{1}{\omega L_2} - j\omega C_1\right) = -j\left(\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_1\right) = j0$$

Следователно резонансната честота е:

$$\omega C_1 = \frac{1}{\omega L_2} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_2}}$$

Сега нека да определим условието за резонанс на напреженията. Еквивалентното комплексно съпротивление на цялата верига е:

$$Z_E = R + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2.\left(-j\dfrac{1}{\omega C_1}\right)}{j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega C_1}} =$$

$$= R + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega L_2.\left(\dfrac{1}{\omega C_1}\right)}{\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_1}}\right)$$

Резонанс на напреженията за цялата верига може да възникне, когато реактивното съпротивление 0, т.е.:

$$\omega L_1 - \frac{\omega L_2.\left(\dfrac{1}{\omega C_1}\right)}{\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_1}} = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = \frac{L_2}{L_1}.\frac{1}{\omega C_1} \quad \rightarrow \quad \omega^2 L_1 L_2 C_1 - L_1 = L_2$$

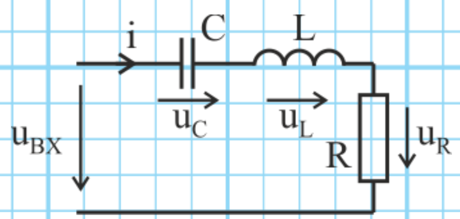
Следователно резонансната честота може да се определи с:

$$\omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C_1}}$$

Характерни ситуации при резонансни явления

Резонанс на напреженията при последователно съединен резистор

Вече разгледахме последователната RLC верига.



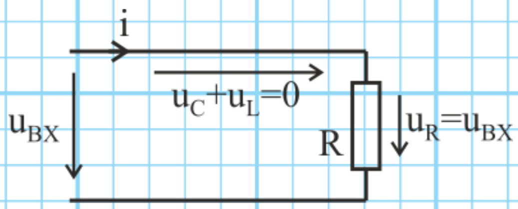
За нея може да се запише следното уравнение по ВЗК:

$$u_{\text{ВХ}} = u_C + u_L + u_R$$

В случай на резонанс на напреженията, $X_L - X_C = 0$, поради което $u_C + u_L = 0$. Следователно ВЗК приема вида:

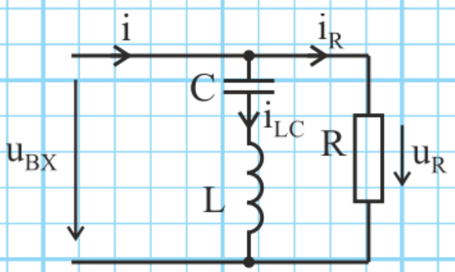
$$u_{\text{ВХ}} = u_C + u_L + u_R = 0 + u_R = u_R$$

т.е. можем да създадем следната еквивалентна заместваща схема:



Резонанс на напреженията при паралелно съединен резистор

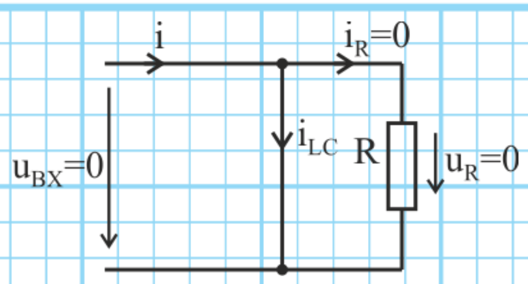
Друга схема, в която може да възникне резонанс на напреженията, е:



За нея можем да запишем следното уравнение по ПЗК:

$$i = i_{LC} + i_R$$

В случай на резонанс на напреженията, отново $u_C + u_L = 0$, т.е. бобината и кондензатора взети заедно ще представляват късо съединение. Следователно можем да съставим следната заместваща схема:



Тъй като R и L/C са свързани паралелно, техните напрежения ще бъдат равни, т.е.:

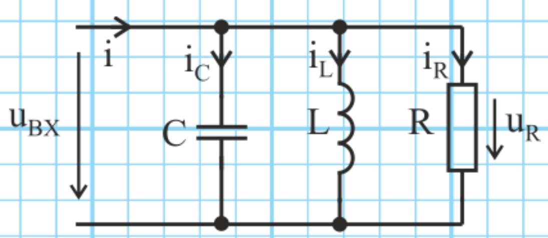
$$u_R = u_L + u_C = 0$$

При тази ситуация казваме, че резисторът R бива шунтиран от късото съединение, т.е. токът през него ще бъде:

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{0}{R} = 0$$

Резонанс на токовете при паралелно съединен резистор

Другата ситуация, която вече частично разгледахме, е паралелното RLC съединение:



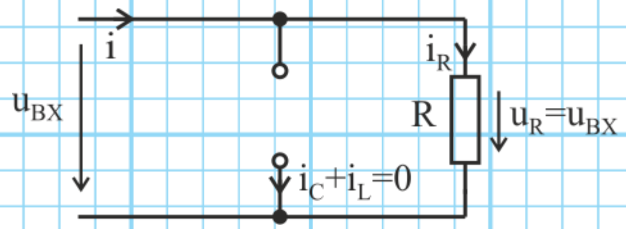
За нея може да се запише уравнение по ПЗК:

$$i = i_C + i_L + i_R$$

При резонанс на токовете, $i_C + i_L = 0$, т.е. горното уравнение добива вида:

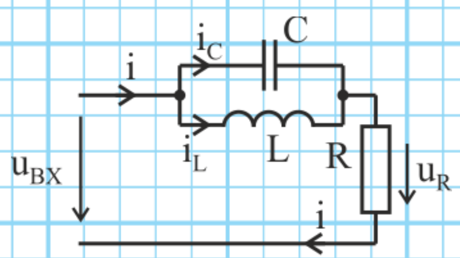
$$i = i_C + i_L + i_R = 0 + i_R = i_R$$

т.е. на практика L и C, взети заедно по време на резонанс, представляват прекъсната верига, поради което можем да създадем следната еквивалентна заместваща схема:



Резонанс на токовете при последователно съединен резистор

Друга характерна ситуация е, когато резистор е свързан последователно на паралелно свързани бобина и кондензатор:



За схемата може да се запише уравнение по ПЗК:

$$i = i_L + i_C$$

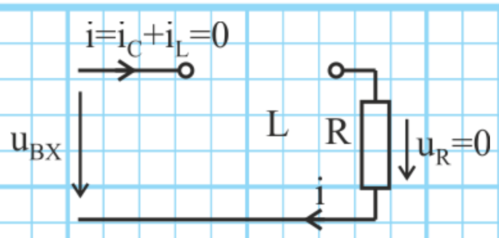
При резонанс на токовете горното уравнение става:

$$i = i_L + i_C = 0$$

т.е. във веригата няма да тече ток. Следователно напрежението върху резистора ще бъде:

$$u_R = i.R = 0.R = 0$$

Можем да създадем следната еквивалентна заместваща схема:


i=i_C+i_L=0
u_BX
L
R
u_R=0
i