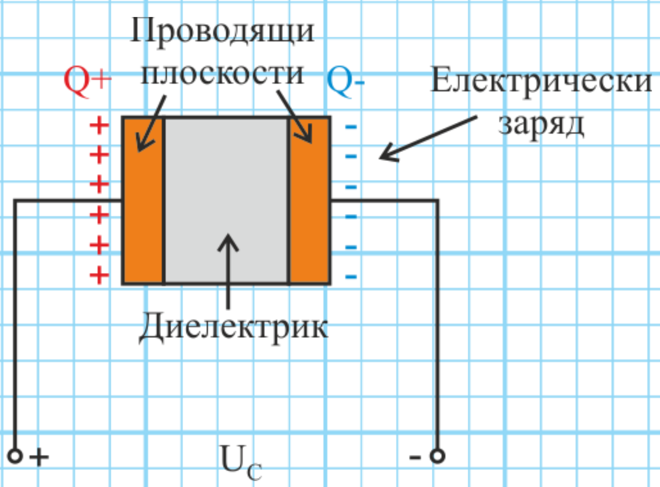
Кондензатори и бобини

Кондензатори

Електрически капацитет и капацитивен елемент

Нека разгледаме ситуацията, при която две плоски проводящи повърхности са разделени от диелектрик и нека към тези повърхности се приложи напрежение U_C.



Това ще доведе до следните процеси:

- Свободните положителните заряди ще се насочат в посока от плюс към минус, но тъй като не могат да преминат през диелектрика, върху едната повърхност ще се натрупа положителен електрически заряд Q^+;

- Свободните отрицателни заряди ще се насочат в посока от минус към плюс, и тъй като също не могат да преминат през диелектрика, върху другата повърхност ще се натрупа отрицателен електрически заряд Q^-.

Отношението между приложеното напрежение U_C и натрупания заряд Q се нарича електрически капацитет:

$$C = \frac{Q}{U_C}$$

Единицата за електрически капацитет е Фарад $[F]$, но обикновено се използват по-малките единици:

- Милифарад $1\ mF = 10^{-3}\ F$;
- Микрофарад $1\ \mu F = 10^{-6}\ F$;
- Нанофарад $1\ nF = 10^{-9}\ F$;
- Пикофарад $1\ pF = 10^{-12}\ F$;

На базата на казаното до тук можем да дефинираме още един двуполюсен елемент наречен кондензатор.

Условното означение за кондензатор е: 

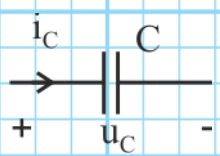
Всеки кондензатор се характеризира с:

- ✓ Капацитет C;
- ✓ Пробивно напрежение $U_{\text{ПР}}$.

Ако към кондензатор се приложи напрежение, по-голямо от пробивното ($U_C > U_{\text{ПР}}$), това ще доведе до пробив в диелектрика и повреждане на кондензатора.

<u>Ток и напрежение на кондензатор</u>

Нека към кондензатор с капацитет C е приложено напрежение u_C.



Знаем, че токът i_C, който ще протече през кондензатора, е:

$$i_C = \frac{dQ}{dt}$$

Ако в горното уравнение заместим $Q = C.u_C$ (идва от $C = \frac{Q}{u_C}$), за тока i_C получаваме:

$$i_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt} + u_C\frac{dC}{dt}$$

В случай, че електрическия капацитет на кондензатора е константа ($C = const$), горното уравнение се свежда до:

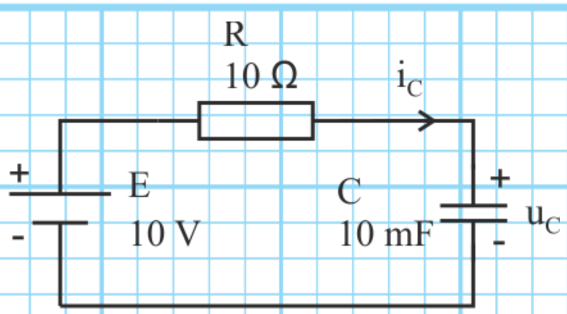
$$\boxed{i_C = C\frac{du_C}{dt}}$$

Можем да получим и обратната зависимост (да изразим u_C чрез i_C), като интегрираме горното уравнение:

$$\boxed{u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + u_C(0)}$$

където $u_C(0)$ е константа на интеграция или така нареченото начално напрежение. Смисълът на $u_C(0)$ ще бъде обяснен в следващата тема.

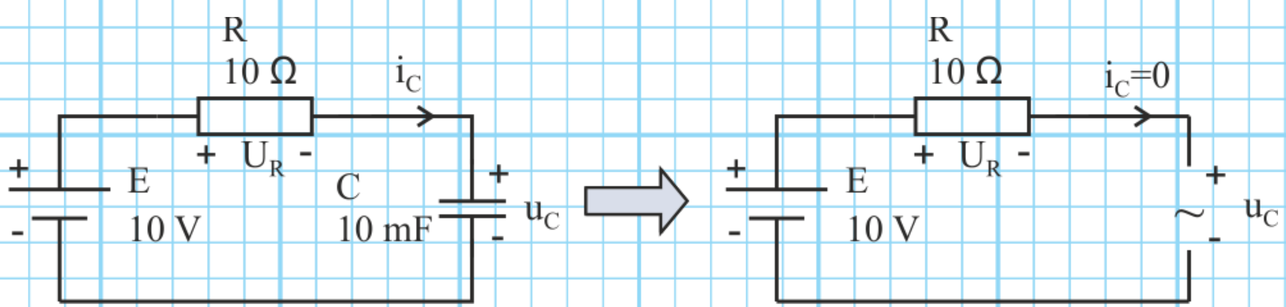
<u>Пример</u>: Да се определят токът i_C и напрежението u_C на кондензатор за следната постояннотокова верига:



Тъй като токът през кондензатора е $i_C = C\frac{du_C}{dt}$, а това е постояннотокова верига ($u_C = const$), през веригата няма да протече ток:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = 0\ A$$

С други думи кондензаторът прекъсва веригата за постоянен ток, т.е. можем да начертаем следната заместваща схема, като заменим кондензатора с прекъсната верига:



Можем също така да запишем следното уравнение по ВЗК:

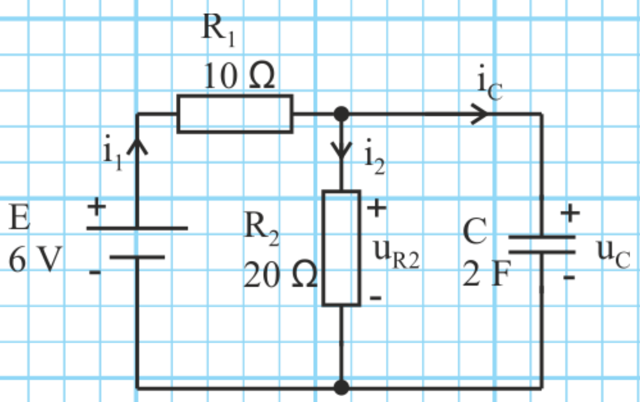
$$E = U_R + u_C = Ri_C + u_C = 0 + u_C$$

Следователно падът на напрежение върху кондензатора и резистора ще бъдат съответно:

$$u_C = E = 10\ [V]$$

$$U_R = i_C.R = 0 \times 10 = 0\ [V]$$

Пример: Да се определят токът i_C и напрежението u_C на кондензатор за следната постояннотокова верига:



Ще решим задачата по два начина.

Решение 1

Можем да запишем следната система уравнения по метода със законите на Кирхоф:

$$\left|\begin{array}{c} i_1 = i_2 + i_C \\ E = R_1.i_1 + R_2.i_2 \\ R_2.i_2 - u_C = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{c} i_1 = i_2 + i_C \\ 6 = 10i_1 + 20i_2 \\ u_C = 20i_2 \end{array}\right.$$

Вече знаем, че кондензаторът не пропуска постоянен ток:

$$i_C = 0$$

Следователно горната система става:

$$\left|\begin{array}{c} i_1 = i_2 + 0 \\ 6 = 10i_1 + 20i_2 \\ u_C = 20i_2 \end{array}\right.$$

От второто уравнение получаваме:

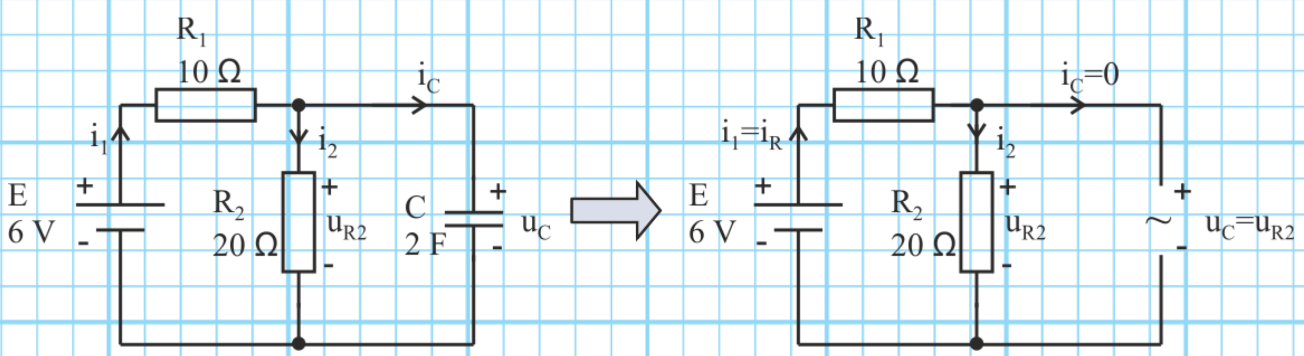
$$i_2 = i_1 = \frac{6}{10 + 20} = 0{,}2\ [A]$$

От третото уравнение получаваме напрежението на кондензатора:

$$u_C = 20 i_R = 20 \times 0{,}2 = 4\ [V]$$

Решение 2

Можем да решим задачата и като съставим еквивалентна заместваща схема. Заменяме кондензатора с прекъсната верига:



Тъй като кондензаторът е свързан паралелно на резистора R_2 техните напрежения са равни:

$$u_C = u_{R2} = R_2 . i_2$$

Вижда се че веригата става еднонконтурна, т.е. $i_1 = i_2$, откъдето по закона на Ом получаваме:

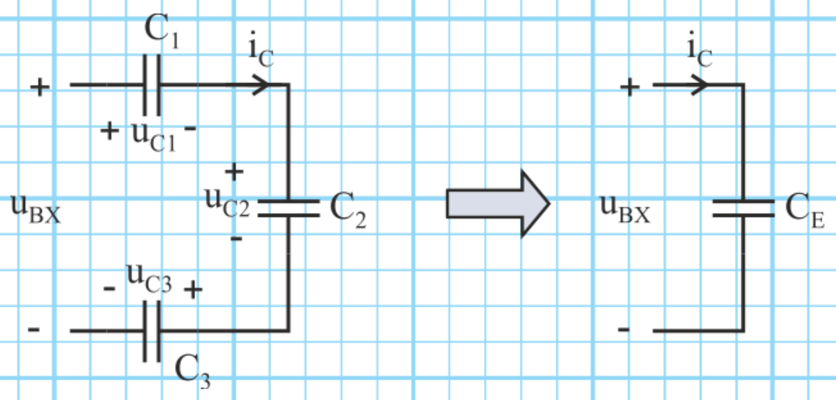
$$i_2 = i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{6}{10 + 20} = 0{,}2\ [A],$$

а напрежението на кондензатора е:

$$u_C = R_2 . i_2 = 20 \times 0{,}2 = 4\ [V]$$

Съединения на кондензатори

Нека да разгледаме последователно съединение на кондензатори:



Тъй като кондензаторите са съединени последователно, през тях тече един и същ ток i_C. По ВЗК можем да запишем:

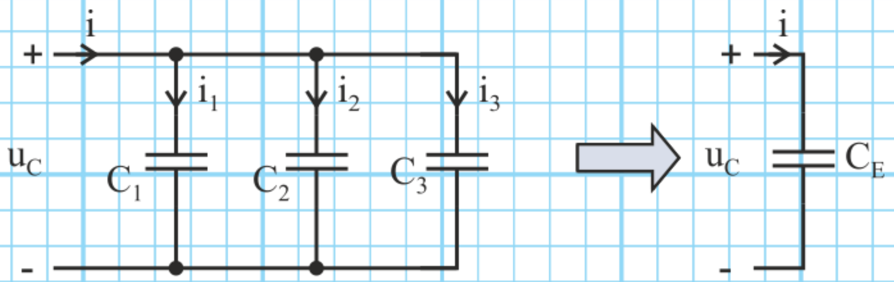
$$u_{\text{BX}} = u_{C1} + u_{C2} + u_{C3} = \frac{1}{C_1}\int_0^t i_C dt + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_C dt + \frac{1}{C_3}\int_0^t i_C dt =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int_0^t i_C dt = \frac{1}{C_E}\int_0^t i_C dt$$

Следователно можем да заменим трите последователно съединени кондензатора с един еквивалентен C_E, чиято големина се определя с:

$$\boxed{C_E = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}}$$

А сега ще разгледаме паралелно съединение на кондензатори. Това означава, че върху трите кондензатора от схемата пада едно и също напрежение u_C.



По ПЗК можем да запишем:

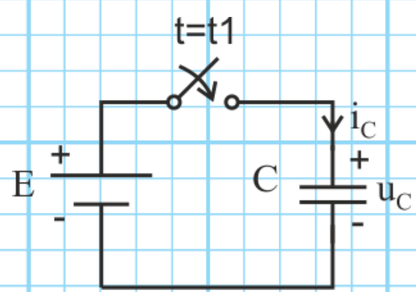
$$i = i_1 + i_2 + i_3 = C_1\frac{dv_C}{dt} + C_2\frac{dv_C}{dt} + C_3\frac{dv_C}{dt} =$$
$$= (C_1 + C_2 + C_3)\frac{dv_C}{dt} = C_E\frac{dv_C}{dt}$$

Следователно еквивалентния капацитет на паралелно свързани кондензатори се определя с:

$$\boxed{C_E = C_1 + C_2 + C_3}$$

<u>Енергия зареждана в кондензаторите</u>

Нека разгледаме ситуация при която кондензатор C се свързва към постоянен източник на напрежение E.



Под действието на източника, плоскостите на кондензатора се зареждат със заряд съответно Q^+ и Q^-. Това води до появата на електрическо поле между двете плоскости, а знаем че електрическото поле може да измества електрически заряди, т.е. извършва някаква работа.

Следователно кондензаторът е зареден с определено количество енергия.

Моментната мощност $p_C(t)$, която влиза в кондензатора, е:

$$p_C(t) = i_C(t).u_C(t) = C\frac{du_C}{dt}u_C$$

Нека приемам, че в момента от времето $t = t1$ кондензаторът започва да се зарежда, а в момент от времето $t = t2$ кондензаторът е напълно зареден. Следователно можем да определим каква енергия W_C се е заредила в него, като интегрираме моментната мощност $p(t)$:

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} p_C(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} C.u_C.\frac{du_C}{dt}dt = \int_{0}^{V_{SRC}} C.u_C.du_C =$$
$$= \frac{1}{2}.C.{u_C}^2$$

С други думи максималната енергия, която може да се зареди в един кондензатор под формата на електрическо поле, е:

$$\boxed{W_C = \frac{1}{2}.C.{u_C}^2}$$

В: Може ли да обясните защо като интегрираме мощността, получаваме заредената енергия?

О: Спомнете си, че енергията се измерва в Джаули [J], а мощността - във Ватове [W]. Също така знаем, че $1\ [W] = \frac{1\ [J]}{1\ [s]}$. Да интегрираме мощността във времето $\int p_C(t)dt$ означава да „умножим“ мощността по времето. А като умножим Ват по Секунда, се получава Джаул:

$$1\ [W] \times 1\ [s] = \frac{1\ [J]}{1\ [s]} \times 1\ [s] = 1\ [J]$$

Пример: Кондензатор с капацитет $C = 10\ [mF]$ се захранва от източник на постоянно напрежение $u_C = 100\ [V]$. Каква енергия ще се зареди в кондензатора?

$$W_C = \frac{1}{2}.C.{u_C}^2 = \frac{1}{2}.10.10^{-3}.100^2 = 50\ \mathrm{J}$$

Бобини

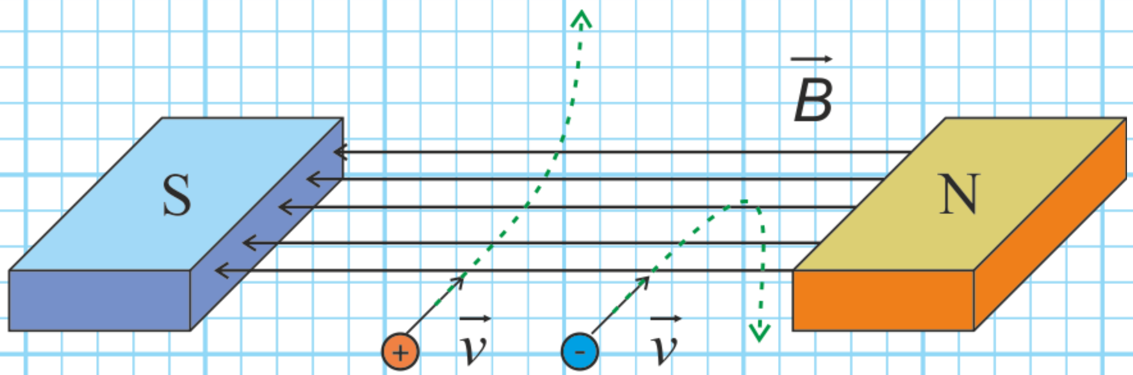
За да можем да дефинираме понятието индуктивен елемент (бобина) ще трябва първо да въведем някои основни понятия за магнитното поле и електромагнетизма.

Магнитна индукция

Магнитното поле се образува около движещи се електрически заредени частици, а също така около изменящо се електрическо поле. Магнитното поле се характеризира с неговата магнитна индукция $\vec{\boldsymbol{B}}$, понякога наричана просто магнитно поле. Единицата за магнитна индукция е Тесла [T].

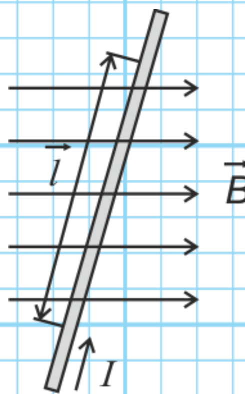
Силата $\overrightarrow{\boldsymbol{F_M}}$, с която полето действа върху заряд $\boldsymbol{q}$, движещ се със скорост $\vec{\boldsymbol{v}}$, е:

$$\overrightarrow{F_M} = q.\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$



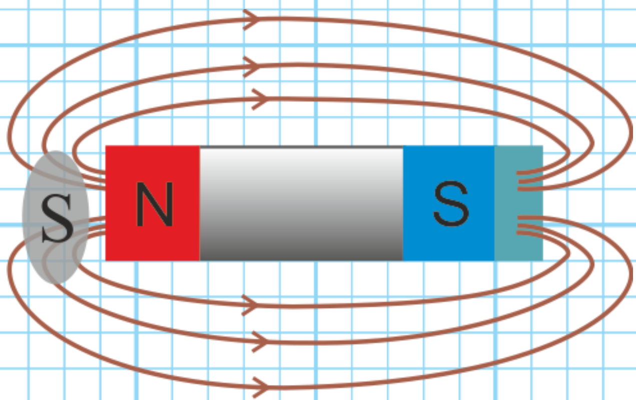
Магнитното поле може също така да се дефинира чрез силата $\overrightarrow{\boldsymbol{F_M}}$, която действа върху проводник с дължина $\vec{\boldsymbol{l}}$, по който тече ток $\boldsymbol{I}$:

$$\overrightarrow{F_M} = I.\left(\vec{l} \times \vec{B}\right)$$



Магнитен поток

Нека постоянен магнит създава магнитно поле $\vec{\boldsymbol{B}}$.

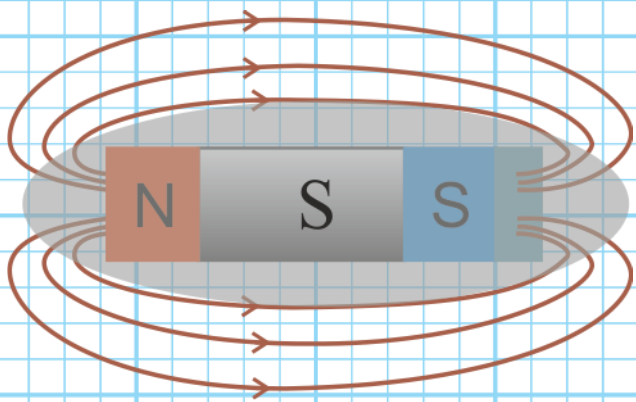


Магнитен поток Ф се нарича интеграла на магнитната индукция по повърхността $\vec{\boldsymbol{S}}$:

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} d\vec{S}$$

Магнитния поток се измерва във Вебери [Wb].

В случай, че повърхността $\vec{S}$ е затворена (например топка, която обгражда магнита) е в сила:

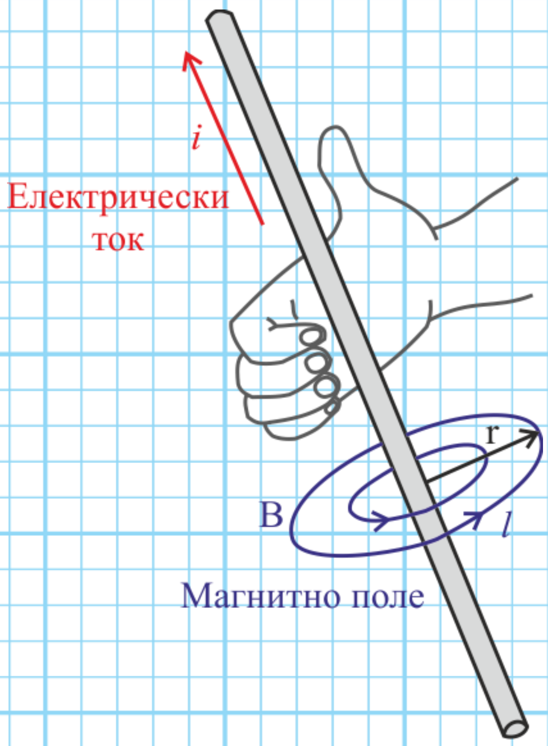


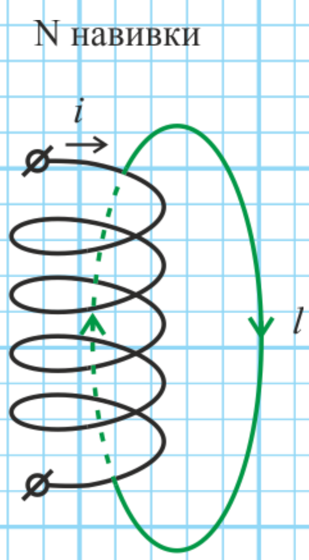
$$\Phi = \oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Това уравнение е известно като закон на Гаус за магнетизма и е едно от уравненията на Максуел. Този закон е следствие от предположението, че магнитни монополи не съществуват.

<u>Коефициент на самоиндукция и индуктивен елемент</u>

Нека по един проводник тече ток с големина $\boldsymbol{i}$. В резултат от тока (движение на заредени частици), около проводника се образува магнитно поле $\vec{\boldsymbol{B}}$, чиято посока се определя според правилото на дясната ръка – ако палецът сочи посоката на тока, завъртането на магнитното поле съвпада с посоката на завъртане на пръстите на ръката.





Това явление се описва със закона на Ампер:

$$\oint_{(l)} \vec{B} d\vec{l} = \mu . i$$

където $\boldsymbol{\mu}$ е магнитната проницаемост на средата.

В случай, че проводника има $\boldsymbol{N}$ на брой навивки, горното уравнение добива вида:

$$\oint_{(l)} \vec{B} d\vec{l} = N . \mu . i$$

Връзката между магнитния поток Ф, минаващ през площта оградена от контура $\vec{\boldsymbol{l}}$ и големината на създаващия го ток $\boldsymbol{I}$, се дава с т.н. коефициент на самоиндукция (или просто индуктивност) $\boldsymbol{L}$:

$$L = \frac{\Phi}{i}$$

L зависи от магнитната проницаемост, формата и размерите на проводника.

Мерната единица за индуктивност е Хенри [H]. В случай, че кабела има ***N*** на брой навивки, индуктивността е:

$$L = N.\frac{\Phi}{i}$$

След казаното до тук можем да дефинираме още един пасивен двуполюсен елемент – индуктивен елемент или бобина. Бобината представлява проводник с множество навивки, предназначен за съхранение на енергия под формата на магнитно поле.

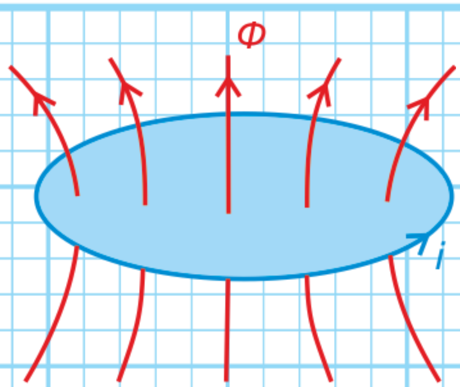
Условното означение за бобина е: 

Всяка бобина се характеризира с индуктивност L, измервана в Хенри.

Закон за електромагнитната индукция (закон на Фарадей)

Законът за електромагнитната индукция, известен още като закон на Фарадей, гласи че всяка промяна в магнитния поток ***Ф*** минаващ през затворен проводников контур, създава електродвижещо напрежение (е.д.н.) ***e*** в контура, което от своя страна създава ток ***i***:

$$\mathrm{e} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

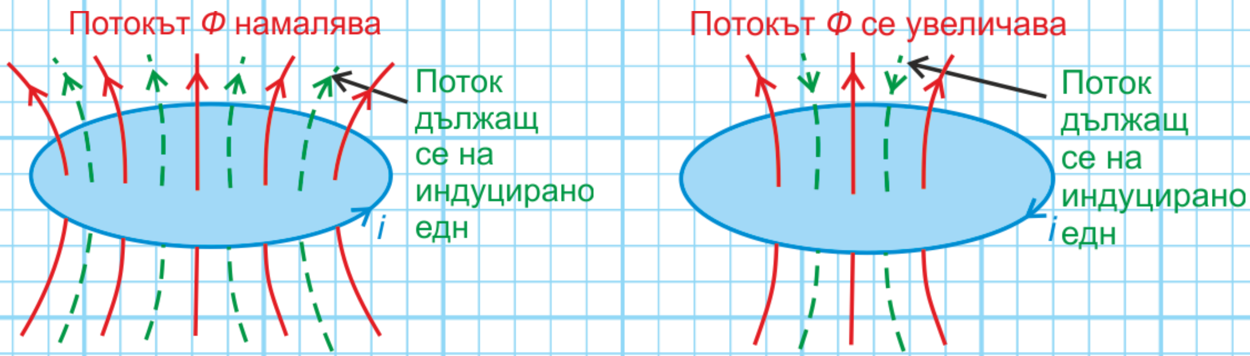


В случай, че контура включва $\boldsymbol{N}$ на брой навивки, горното уравнение става:

$$\mathrm{e} = -N.\frac{d\Phi}{dt}$$

В действителност знакът минус (-) е добавен на по-късен етап от Хайнрих Ленц и се нарича правило на Ленц. То гласи, че когато в затворен контур се създава е.д.н. поради промяна в магнитния поток, посоката на това е.д.н. е такова, че създавания от него ток да се противопостави на изменението.

С други думи контурът се стреми да запази текущият магнитен поток, като създава ЕДН с подходяща посока, което да компенсира изменението $\frac{d\Phi}{dt}$. Възможни са две ситуации:



Потокът *Φ* намалява

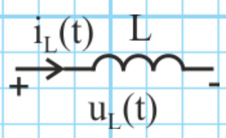
Контурът индуцира е.д.н. (респектвно ток), което създава магнитен поток с посока еднаква на създаващия го.

Потокът *Ф* се увеличава

Контурът индуцира е.д.н., което създава магнитен поток с посока противоположна на създаващия го, за да компенсира намаляването.

<u>Ток и напрежение на бобини</u>

Нека през бобина тече ток с големина i_L:



Изхождайки от законът на Фарадей, знаем че падът на напрежението върху бобината е:

$$u_L(\mathrm{t}) = -e = \frac{d\Phi}{dt}$$

Също така знаем, че $\Phi = L.i_L$ (тъй като $L = \frac{\Phi}{i_L}$), откъдето за напрежението се получава:

$$u_L(\mathrm{t}) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(L.i_L)}{dt} = L.\frac{di_L}{dt} + i_L.\frac{dL}{dt}$$

В случай, че индуктивността е константа ($L = const$), горното уравнение добива вида:

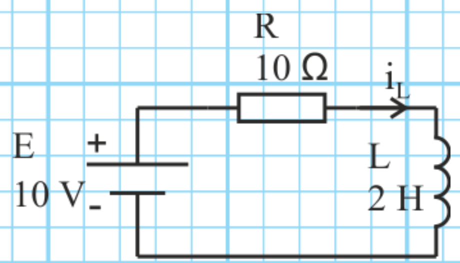
$$\boxed{u_L(\mathrm{t}) = L.\frac{di_L(t)}{dt}}$$

Чрез интегриране можем да получим и токът през бобината:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)dt + i_L(0)$$

От тези уравнения се вижда, че при постоянен ток върху бобината няма пад на напрежение.

Пример: Да се определят токът и напрежението на бобината за посочената схема.



За посочената верига можем да запишем уравнение по ВЗК:

$$E = U_R + U_L$$

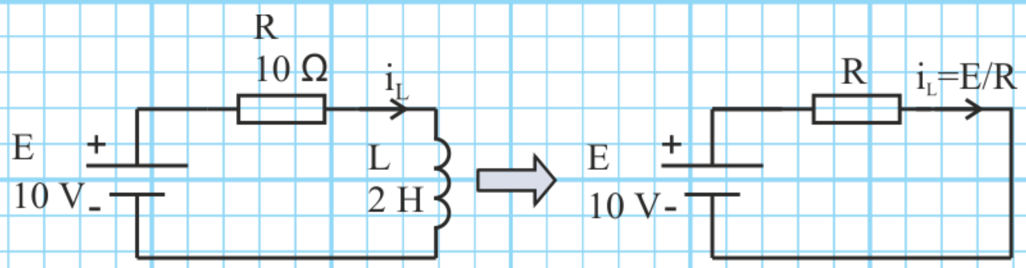
Тъй като веригата е постояннотокова, напрежението върху бобината е нула ($U_L = 0\ [V]$):

$$E = U_R + U_L = U_R + 0 = \mathrm{R}.i_L = 10i_L$$

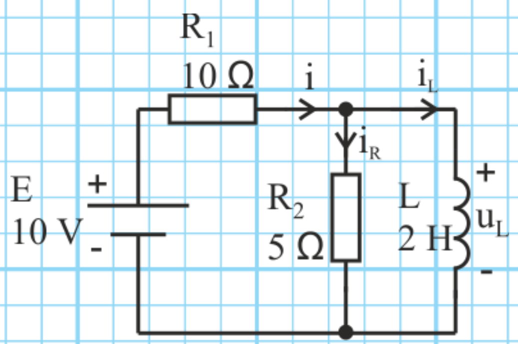
Следователно токът във веригата (на бобината) е:

$$i_L = \frac{E}{R} = \frac{10}{10} = 1\ [A]$$

От казаното до тук се вижда, че също така бихме могли да създадем еквивалентна заместваща схема и да заменим бобината с късо съединение:



Пример: Да се определят токът и напрежението на бобината за посочената схема.



За схемата можем да запишем 1 уравнение по ПЗК и 2 по ВЗК.

$$\left| \begin{array}{c} i = i_R + i_L \\ E = R_1 . i + R_2 . i_R \\ R_2 . i_R - u_L = 0 \end{array} \right.$$

В постояннотокови вериги няма пад на напрежение:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \times 0 = 0\ [V]$$

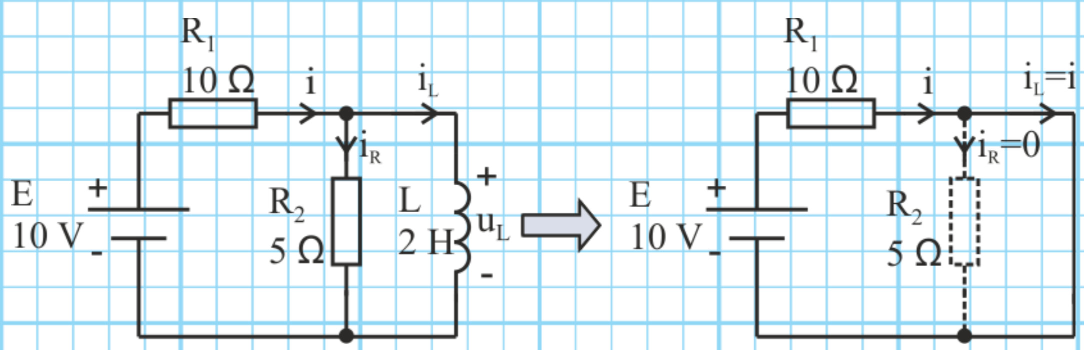
Следователно от третото уравнение получаваме:

$$R_2 . i_R = u_L = 0 \ \rightarrow \quad i_R = 0\ [A]$$

От там за другите токове във веригата се получава:

$$i = i_L = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{10} = 1\ [A]$$

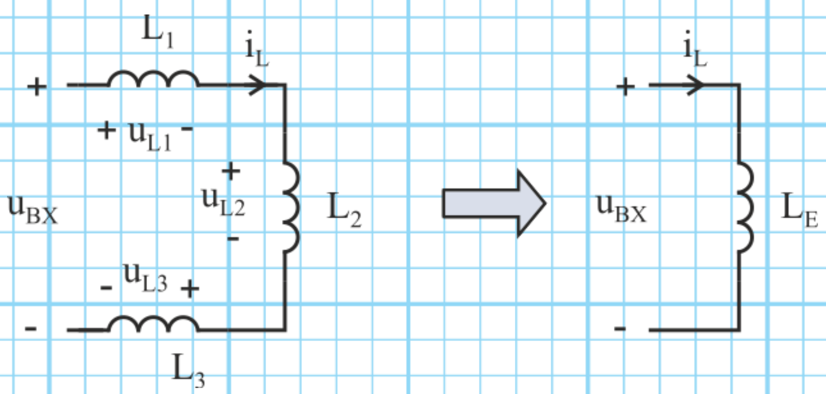
Бихме могли да решим задачата и чрез съставяне на еквивалентна заместваща схема, при която бобината се замени с късо съединение:



Тъй като R_2 е свързан паралелно на късо съединение, той се шунтира, т.е. през него не тече ток.

<u>Съединения на бобини</u>

Нека да разгледаме последователно съединение на бобини:



По ВЗК можем да запишем:

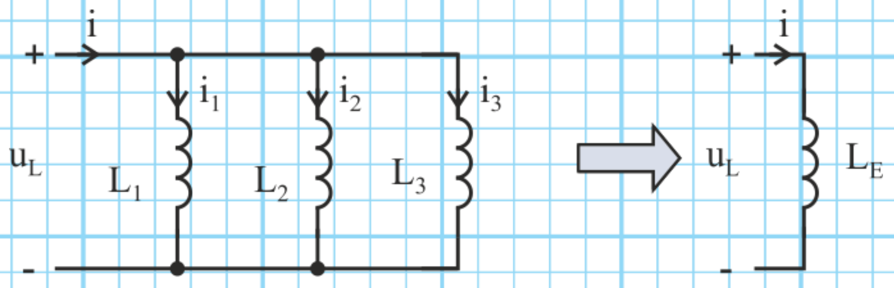
$$u_{\text{ВХ}} = u_{L1} + u_{L2} + u_{L3} = L_1 \frac{di_L}{dt} + L_2 \frac{di_L}{dt} + L_3 \frac{di_L}{dt} =$$

$$= (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di_L}{dt} = L_E \frac{di_L}{dt}$$

С други думи еквивалентната индуктивност на последователно съединени бобини е:

$$L_E = L_1 + L_2 + L_3$$

Сега нека да разгледаме паралелно съединение на бобини:



По ПЗК може да се запише:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{1}{L_1}\int_0^t u_L dt + \frac{1}{L_2}\int_0^t u_L dt + \frac{1}{L_3}\int_0^t u_L dt =$$

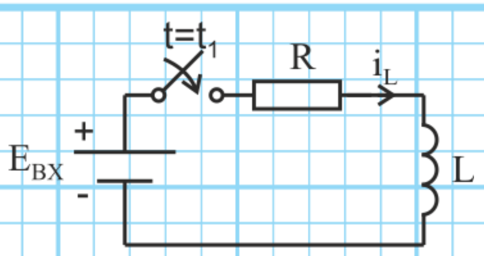
$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_0^t u_L dt = \frac{1}{L_E}\int_0^t u_L dt$$

С други думи еквивалентната индуктивност на паралелно свързани бобини е:

$$L_E = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}}$$

Енергия зареждана в бобините

Нека разгледаме ситуация при която бобина L се свързва към постоянен източник на напрежение $E_{\text{ВХ}}$ със съпротивление R.



Под действието на електрическото поле през бобината започва да тече ток i_L, който от своя страна създава магнитно поле. Знаем, че магнитното поле указва въздействие върху движещи се заредени частици, т.е. е носител на енергия. Казано с други думи, това че в бобината тече ток е равносилно на това, че в бобината се зарежда определено количество енергия.

Моментната мощност $p_L(t)$ зареждана в бобината е:

$$p_L(t) = i_L(t).u_L(t) = i_L L\frac{di_L}{dt}$$

Нека приемам, че в моментът от времето $t = t1$ бобината започва да се зарежда, а в момент от времето $t = t2$ - е напълно заредена. Заредената в бобината енергия W_C можем да определим чрез интегриране на мощността във времевия интервал от t_1 до t_2:

$$W_L = \int_{t_1}^{t_2} p_L(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} i_L L\frac{di_L}{dt}dt = \int_{0}^{I_{MAX}} L\, i_L di_L = \frac{1}{2}.\mathrm{L}.{i_L}^2$$

С други думи максималната енергия, която може да се зареди в една бобина под формата на магнитно поле, е:

$$\boxed{W_L = \frac{1}{2}.L.{i_L}^2}$$