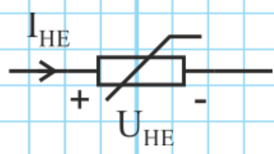
Нелинейни елементи в постояннотокови вериги

Нелинейни резистори

Най-често срещаният нелинеен елемент е нелинейният резистор.

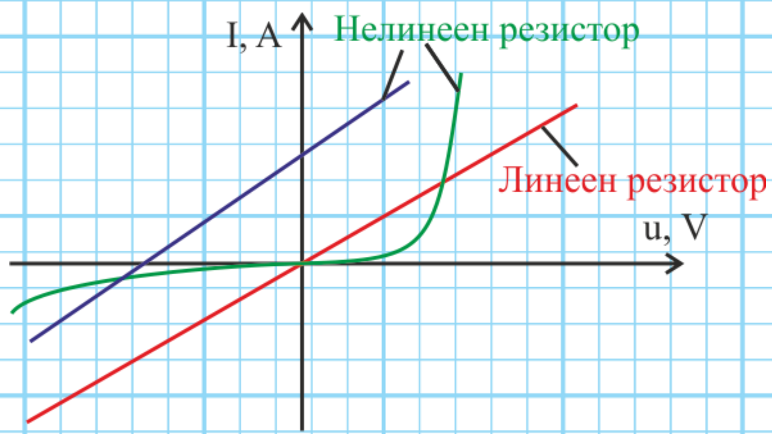
Условното означение за нелинеен резистор е:



Типичен пример за нелинеен елемент е полупроводниковият диод. За условно означение на диод обикновено се използва:

Нелинейните елементи се наричат нелинейни, защото тяхната волт-амперна характеристика (съкратено ВАХ) не е права линия минаваща през нулата.

Например на фигурата са представени ВАХ на три резистора:



1. Червената ВАХ е права линия минаваща през нулата, т.е. е на линеен резистор;

2. Синята ВАХ е права линия, но не минава през нулата, т.е. е на нелинеен елемент;

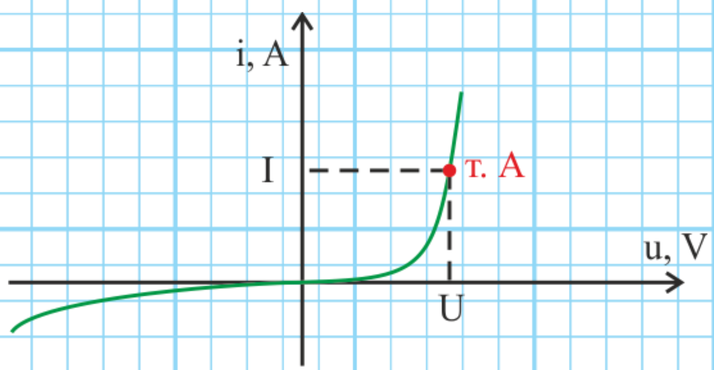
3. Зелената ВАХ не е права линия, т.е. е на нелинеен елемент.

В: Добре де, ВАХ на нелинейните елементи не е права линия минаваща през нулата, но какво от това? Не разбирам какво всъщност показва ВАХ.

О: Спомнете си как се дефинира величината електрическо съпротивление: $R = \frac{U}{I}$. Но тъй като ВАХ на нелинейните елементи не е права линия минаваща през нула, това означава че и отношението $\frac{U}{I}$ няма да е едно и също.

Казано с други думи съпротивлението на нелинейния резистор не е постоянно, а зависи от това какви са токът/напрежението на елемента.

Нека ВАХ на нелинеен елемент има вида показан на фигурата отдолу. Ако през нелинейния елемент тече ток I, токът пресича ВАХ на нелинейния резистор в т. А, т.е. падът на напрежението върху елемент е U.

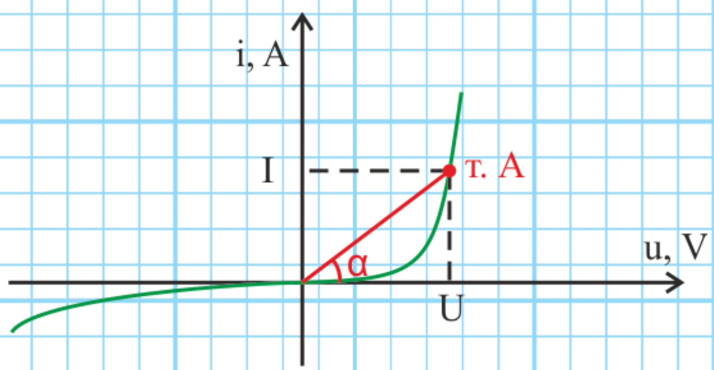


В случая т. А се нарича **работна точка**, като тя зависи от токът/напрежението на нелинейния елемент.

За дадена работна точка могат да се дефинират два вида съпротивления: статично и динамично. На този етап ще дефинираме единствено понятието статично съпротивление, тъй като динамичното няма физически смисъл в постояннотокови вериги.

Статичното съпротивление на нелинейния елемент се дефинира за определена работна точка, като котангенса на ъгъла между правата, съединяваща т. А с началото на координатната система и абсцисната ос:

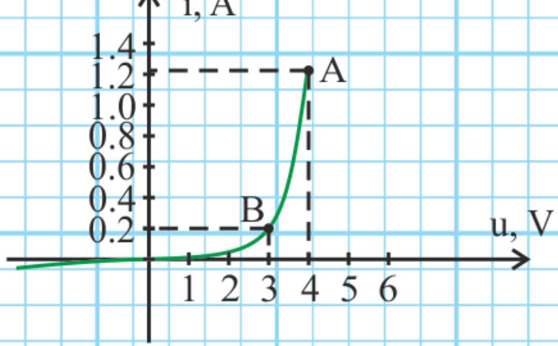
$$R_{ST} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$$



Пример: Да се определи статичното съпротивление на нелинеен елемент, за следните работни точки:

- ако към него се приложи напрежение $V = 4\ [V]$;

- ако към него се приложи напрежение $V = 3\ [V]$.



Статичните съпротивления за двете точки са:

$$R_A = \frac{V_A}{I_A} = \frac{4}{1,2} = 3,33\ [\Omega]$$

$$R_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{3}{0,2} = 15\ [\Omega]$$

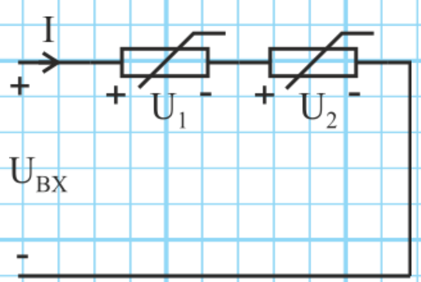
Вижда се, че съпротивлението на нелинейния елемент е различно за различните работни точки.

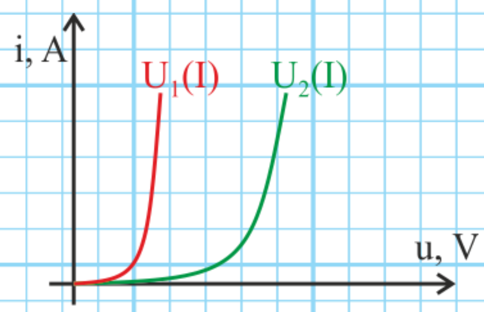
Графични методи за анализ на нелинейни вериги

Въпреки, че графичният анализ се използва рядко, той ще помогне да разберете как функционират нелинейните елементи. За целта ще изследваме няколко ситуации.

Последователно съединение на нелинейни елементи

Нека са дадени два последователно съединени нелинейни елементи, чиито ВАХ са:



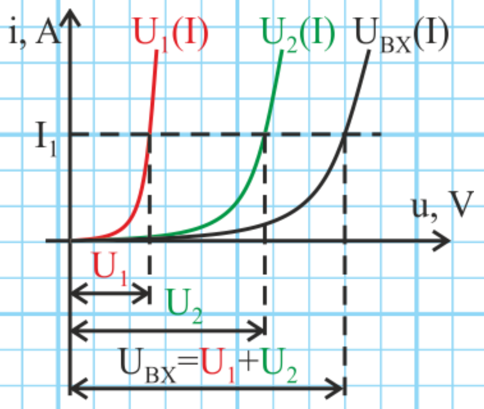


Уравнението по ВЗК за веригата е:

$$U_{\text{ВХ}} = U_1 + U_2$$

Това уравнение е изпълнени винаги и за всяка стойност на входните напрежение и ток. Също така, тъй като **веригата е последователна**, през двата нелинейни елемента **тече един и същ ток**.

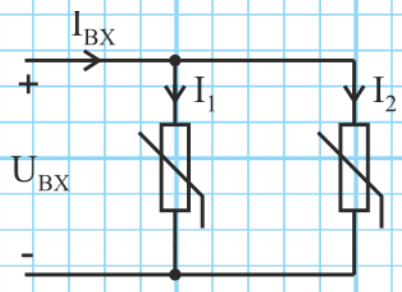
Като се имат предвид тези две твърдения, лесно можем да построим общата ВАХ на двата елемента $U_{\text{ВХ}}$, като за всяка стойност на тока съберем $U_1(I) + U_2(I)$:

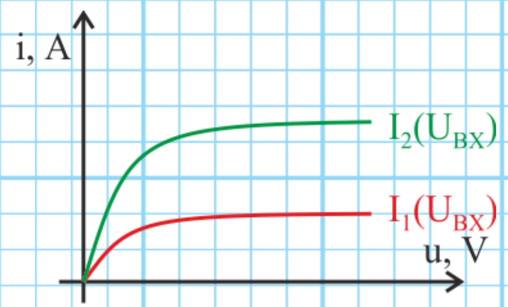


По аналогичен начин можем да съберем ВАХ на последователно съединени нелинеен и линеен резистор.

Паралелно съединение на нелинейни елементи

Нека са дадени два паралелно съединени нелинейни резистора, чиито ВАХ са:



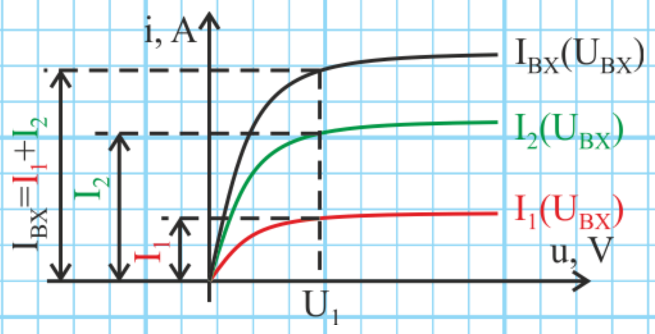


За горната схема е в сила следното уравнение по ПЗК:

$$I_{\text{ВХ}} = I_1 + I_2,$$

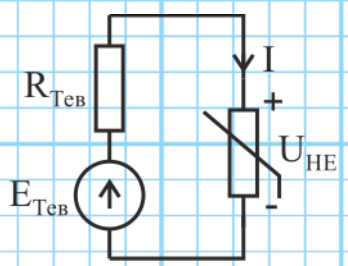
като това уравнение е изпълнено за всяка стойност на входното напрежение $U_{\text{ВХ}}$. Също така, тъй като **двата елемента са свързани паралелно**, тяхното **напрежение е** винаги едно и също и е **равно на входното** $U_{\text{ВХ}}$.

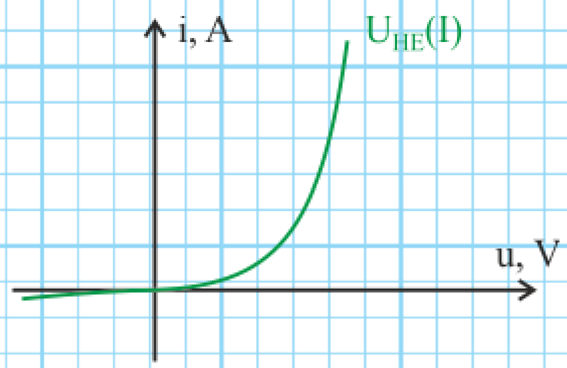
Отчитайки тези две твърдения, лесно можем да построим общата ВАХ на двата елемента, като за всяка стойност на $U_{\text{ВХ}}$ съберем токовете $I_1 + I_2$:



Метод с товарна права

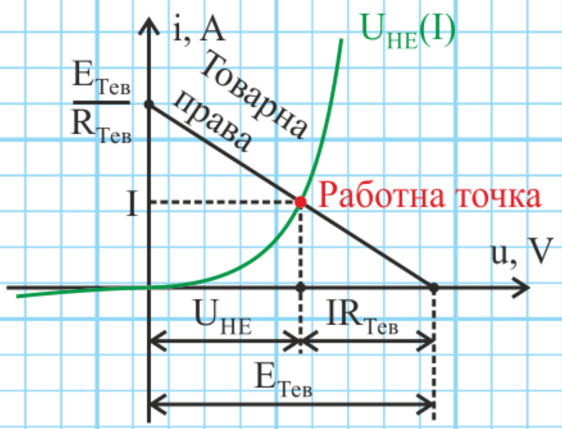
Сравнително често използван метод за графичен анализ на нелинейни вериги (например при диоди) е така наречената товарна права по постоянен ток. Нека нелинеен елемент, чиято ВАХ е представена отдолу, се захранва от еквивалентна схема на Тевенен.





Методът с товарната права позволява да се определи работната точка на нелинейния елемент. За целта върху графиката с ВАХ на нелинейния елемент се построява така наречената товарна права, която свързва точките $E_{\text{Тев}}$ върху абсцисната ос и $\frac{E_{\text{Тев}}}{R_{\text{Тев}}}$ върху ординатната ос.

Забележете, че товарната права по никакъв начин не зависи от ВАХ на нелинейния елемент, а единствено от параметрите на захранващия източник - $E_{\text{Тев}}$ и $R_{\text{Тев}}$.



Числени методи за анализ на нелинейни вериги

Нелинейните вериги могат да бъдат анализирани използвайки числено методи в случаите, когато ВАХ на нелинейните елементи може да бъде апроксимирана с някаква зависимост (уравнение).

Метод по законите на Кирхоф

Анализ на нелинейни вериги по метода със законите на Кирхоф е напълно приложим, като методиката е същата като при постояннотоковите вериги и целта е да се запише система уравнение, в която броят на неизвестните е равен на броя на клоновите токове.

Нека ВАХ на нелинейния елемент е зададена с:

$$\left| \begin{array}{c} U_{\text{НЕ}} = f_1(I_{\text{НЕ}}); \quad I_{\text{НЕ}} < a \\ U_{\text{НЕ}} = f_2(I_{\text{НЕ}}); \, a \le I_{\text{НЕ}} \le b, \\ U_{\text{НЕ}} = f_3(I_{\text{НЕ}}); \quad I_{\text{НЕ}} > b \end{array} \right.$$

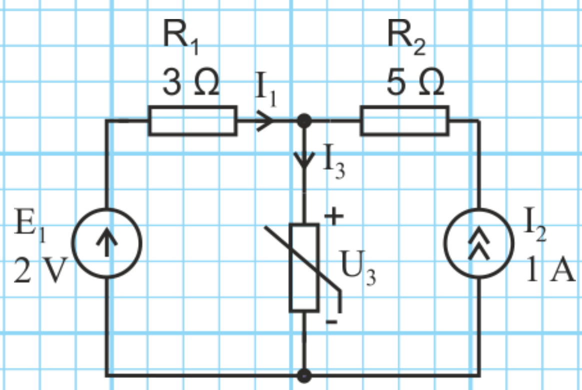
където $f_1(I_{\text{НЕ}})$, $f_2(I_{\text{НЕ}})$ и $f_3(I_{\text{НЕ}})$ могат да бъдат линейни или нелинейни функции на тока $I_{\text{НЕ}}$.

В случая различните участъци от ВАХ са дефинирани с различни функции, в зависимост от големината на тока $I_{\text{НЕ}}$ през нелинейния елемент.

След написване на системата уравнения ние реално не знаем кое от трите решения на ВАХ е истинското. Затова трябва да решим системата за всяко едно от възможните решения и да се търси несъответствие. Например ако решим с ВАХ $U_{\text{НЕ}} = f_1(I_{\text{НЕ}});\quad I_{\text{НЕ}} < a$, трябва да проверим дали е изпълнено условието $I_{\text{НЕ}} < a$. Ако е изпълнено това е нашият отговор, а в противен случай трябва да проверим другите възможни решения.

За да ви се изяснят нещата, нека да решим следната задача.

Пример: Да се определят токът I_3, напрежението U_3 и мощността P_3 на нелинейния елемент, ако неговата ВАХ е дефинирана с $U_3 = \begin{cases} 3I_3^2, & I_3 \geq 0 \\ 0, & I_3 < 0 \end{cases}$



В схемата има два неизвестни тока (I_1 и I_3), така че ни е нужна система с две уравнения - едно по ПЗК и едно по ВЗК.

$$\left| \begin{aligned} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 = I_1 . R_1 + U_3 \end{aligned} \right. \quad \rightarrow \quad \left| \begin{aligned} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + U_3 \end{aligned} \right.$$

Трябва да решим получената система, но не знаем дали $I_3 \geq 0$ или $I_3 < 0$, и затова трябва да анализираме системата и при двете възможни решения.

Първо ще решим задачата, като предположим че $\boldsymbol{I_3 < 0}$, т.е. $U_3 = 0\ [V]$. Системата става:

$$\left| \begin{array}{l} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + U_3 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + 0 \end{array} \right.$$

Решенията за токовете са:

$$I_1 = 0{,}667\ [A], \qquad I_3 = 1{,}667\ [A]$$

В: Тук се получава несъответствие! Получихме ток $I_3 = 1{,}667\ [A]$, а той трябва да бъде по-малък от 0.

О: Точно така. Напрежението на нелинейния елемент е $U_3 = 0\ [V]$ ако $I_3 < 0$, а ние получаваме $I_3 = 1{,}667$, което е по-голямо от нула. **Следователно това не може да е решение на задачата.**

Следователно **трябва да решим задачата при $\boldsymbol{I_3 \geq 0}$**, т.е. при ВАХ на нелинейния елемент $\boldsymbol{U_3 = 3I_3^2}$. Системата става:

$$\left| \begin{array}{l} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + U_3 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} I_1 + 1 = I_3 \\ 2 = 3I_1 + 3I_3^2 \end{array} \right.$$

В случая системата е нелинейна, поради което не можем да приложим матричния метод. Изразяваме I_1 от първото уравнение и го заместваме във второто:

$$I_1 = I_3 - 1$$

$$2 = 3I_1 + 3I_3^2 \quad \rightarrow \quad 2 = 3(I_3 - 1) + 3I_3^2 \quad \rightarrow \quad 3I_3^2 + 3I_3 - 5 = 0$$

Полученото квадратно уравнение има две решения:

$$I_3 = \frac{-3 + \sqrt{3^2 + 4 * 3 * 5}}{2 * 3} = 0{,}884$$

$$I_3 = \frac{-3 - \sqrt{3^2 + 4 * 3}}{2 * 3} = -1{,}88$$

Очевидно е, че $I_3 = -1{,}88 < 0$ не може да бъде решение на системата, тъй като $I_3 \geq 0$. Следователно токът през нелинейния елемент е:

$$I_3 = 0{,}884\ [A]$$

Сега можем да изразим напрежението и мощността му:

$$U_3 = 3I_3^2 = 3.0{,}884^2 = 2{,}34\ [V]$$

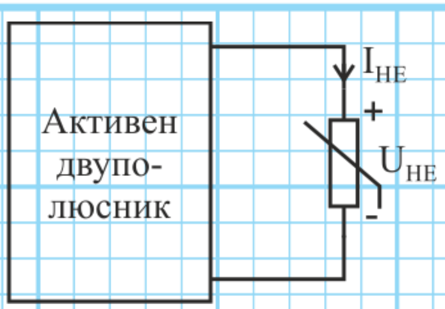
$$P_3 = U_3.I_3 = 3I_3^2.I_3 = 2{,}07\ [W]$$

В: Ако първо бяхме решили задачата за $\mathrm{I}_3 \geq 0$ нямаше да има смисъл да я решаваме за $\mathrm{I}_3 < 0$.

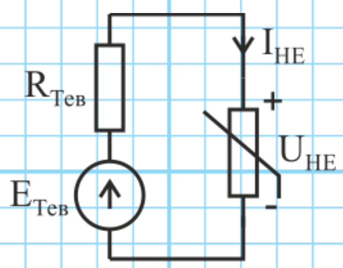
О: Това е така, но нямаше как да знаем дали токът е положителен или отрицателен и избрахме случайно последователността на решенията. Ако сте късметлии, бихте могли да си спестите едното решение.

<u>Метод с еквивалентна схема на Тевенен</u>

Нека нелинеен елемент се захранва от линеен активен двуполюсник:



В случая е удобно да се приложи теоремата на Тевенен, и активния двуполюсник да се замени с еквивалентен източник на напрежение:



След установяване напрежението $E_{\text{Тев}}$ и съпротивлението $R_{\text{Тев}}$ на еквивалентния източник, нелинейната верига става едноконтурна, като уравнението по ВЗК е:

$$E_{\text{Тев}} = U_{\text{НЕ}} + I_{\text{НЕ}}.R_{\text{Тев}}$$

Забележка: Този метод не е приложим, ако схемата съдържа повече от един нелинеен елемент.

Метод с възловите потенциали

Методът с възловите потенциали също е приложим при анализа на нелинейни вериги, но са нужни някои модификации. Методът включва:

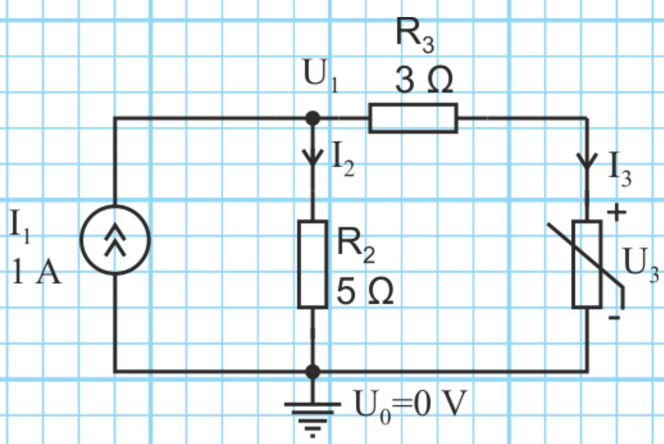
1. Ако веригата съдържа n възела, записват се $n - 1$ уравнения по ПЗК, като единият от възлите се заземява;

2. Ако даден клон не съдържа нелинеен елемент, големината на тока му се определя по закона на Ом чрез възловите потенциали във веригата;

3. Ако даден клон съдържа нелинеен елемент, големината му се определя чрез втори закон на Кирхоф.

Нека да разгледаме следния пример.

Пример: Да се определят токът I_3, напрежението U_3 и мощността P_3 на нелинейния елемент, ако неговата ВАХ е дефинирана с $U_3 = 2I_3^2 - I_3;\ \ I_3 \geq 0$



Веригата съдържа два възела. Ще заземим единия ($\mathrm{U}_0 = 0\ [\mathrm{V}]$), като неизвестното става едно - U_1. Записваме едно уравнение по ПЗК:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \rightarrow \quad 1 = I_2 + I_3$$

Изразяваме тока I_2 по закона на Ом:

$$I_2 = \frac{U_1 - U_0}{R_2} = \frac{U_1}{5} = 0{,}2U_1$$

Заместваме го в уравнението по ПЗК:

$$1 = I_2 + I_3 \;\; \rightarrow \quad 1 = 0{,}2U_1 + I_3$$

Клонът с индекс 3 съдържа нелинеен елемент, така че трябва да го изразим от ВЗК:

$$0 = I_3.R_3 + U_3 + U_0 - U_1 \quad \rightarrow \quad 0 = 3I_3 + U_3 - U_1$$

В горното уравнение заместваме $U_3 = 2I_3^2 - I_3$ и получаваме:

$$0 = 3I_3 + U_3 - U_1 \; \rightarrow \quad 0 = 3I_3 + 2I_3^2 - I_3 - U_1$$

За потенциалът U_1 се получава:

$$U_1 = 2I_3^2 + 2I_3$$

В случая е по-удобно в уравнението по ПЗК да заместим $U_1 = 2I_3^2 + 2I_3$, при което се получава:

$$1 = 0{,}2U_1 + I_3 \;\; \rightarrow \;\; 1 = 0{,}2(2I_3^2 + 2I_3) + I_3$$

$$\rightarrow \quad 0{,}4I_3^2 + 1{,}4I_3 - 1 = 0$$

Решенията на квадратното уравнение са:

$$I_3 = \frac{-1{,}4 + \sqrt{1{,}4^2 - 4 * 0{,}4 * (-1)}}{2 * 0{,}4} = 0{,}609\ [A]$$

$$I_3 = \frac{-1{,}4 - \sqrt{1{,}4^2 - 4 * 0{,}4 * (-1)}}{2 * 0{,}4} = -4{,}11\ [\mathrm{A}]$$

Тъй като $I_3 \geq 0$, $I_3 = -4{,}11$ не може да бъде решение, т.е. решението е:

$$I_3 = 0{,}609\ [A]$$

Следователно напрежението и мощността на нелинейния елемент са:

$$U_3 = 2I_3^2 - I_3 = 0{,}133\ [V]$$

$$P_3 = U_3 . I_3 = 0{,}081\ [W]$$

Числено решение при по-сложни ВАХ

В случай, че нелинейния елемент може да се апроксимира като множество линейни и/или квадратни уравнения, можем да използваме познатите методи за пресмятане на получената система. Но когато става дума за реални нелинейни елементи (например диоди), техните ВАХ най-често имат експоненциален характер, поради което директното им пресмятане често е невъзможно.

За целта се използват методи базирани на итерации, намиращи широко приложение при софтуерите за симулация на електрически вериги. Ще разгледаме два от тези методи:

- Метод на итерациите;

- Метод на Нютон-Рафсон.

Метод на итерациите

Методът на итерациите включва следните основни стъпки:

1. Избира се с каква точност желаем да пресмятаме токовете във веригата. Например:

$$\text{Точност} = 0{,}01\ [A]$$

2. Записва се система от нелинейни уравнения по кой да е от изучените методи;

3. Избира се начална стойност на тока (или напрежението) на нелинейния елемент:

$$I_{\text{НЕ}(k)} = I_0$$

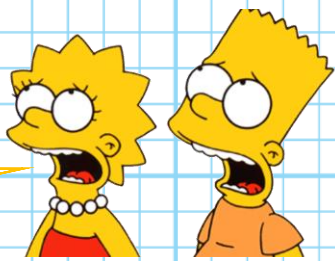
4. Определя се напрежението на нелинейния елемент при работна точка $I_{\text{НЕ}(k)}$:

$$U_{\text{НЕ}(k)} = f\left(I_{\text{НЕ}(k)}\right)$$

5. Системата уравнения се решава, като $U_{\text{НЕ}}$ се замени с получената стойност $f\left(I_{\text{НЕ}(k)}\right)$, откъдето се определя стойността $I_{\text{НЕ}(k+1)}$:

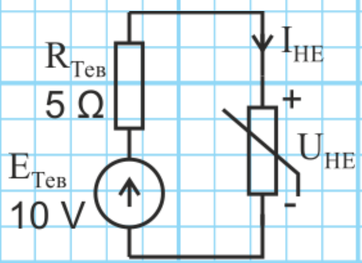
- Ако $\left|I_{\text{НЕ}(k+1)} - I_{\text{НЕ}(k)}\right| <$ Точност, имаме решение на задачата;
- В противен случай се връщаме обратно към стъпка 4, като този път работната точка на нелинейния елемент се определя при $I_{\text{НЕ}(k)} = I_{\text{НЕ}(k+1)}$.

В: ……… ууууууммммм …. ааааааа…



О: Виждам, че сте леко объркани. Затова ще разгледаме следния пример:

Пример: Нелинеен елемент, чиято ВАХ е апроксимирана с $U_{\text{НЕ}} = 3I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2$, се захранва от еквивалентна схема на Тевенен. Да се определи токът $I_{\text{НЕ}}$ във веригата.



1. Първо ще изберем с каква точност желаем да определим токовете. Нека точността да е:

$$\text{Точност} = 0{,}001\ [A]$$

2. След това ще запишем системата нелинейни уравнения. В случая можем да запишем само едно уравнение по ВЗК:

$$E_{\text{Тев}} = 5I_{\text{НЕ}} + U_{\text{НЕ}} \quad \rightarrow \quad 10 = 5I_{\text{НЕ}} + U_{\text{НЕ}}$$

3. След това следва да изберем начален ток във веригата за първата итерация:

$$I_{\text{НЕ}(1)} = 1\ [A]$$

ИТЕРАЦИЯ 1

4. Определяме напрежението на нелинейния елемент при работна точка $I_{\text{НЕ}(0)} = 1$:

$$U_{\text{НЕ}(1)} = 3I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2 = 3.1 - 1^2 = 2\ [V]$$

5. Определяме тока във веригата при $U_{\text{НЕ}(1)} = 2\ [V]$:

$$10 = 5I_{\text{НЕ}(2)} + U_{\text{НЕ}(1)}$$

$$\rightarrow \quad I_{\text{НЕ}(2)} = \frac{10 - U_{\text{НЕ}(1)}}{5} = \frac{10 - 2}{5} = 1{,}6\ [A]$$

Определяме разликата $\left|I_{\text{НЕ}(2)} - I_{\text{НЕ}(1)}\right|$:

$$\left|I_{\text{НЕ}(2)} - I_{\text{НЕ}(1)}\right| = |1{,}6 - 1| = 0{,}6 > 0{,}01$$

Вижда се, че $\left|I_{\text{НЕ}(2)} - I_{\text{НЕ}(1)}\right|$ е по-голямо от избраната точност и следователно това не е решение на задачата.

ИТЕРАЦИЯ 2

Връщаме се обратно към стъпка 4, като този път определяме напрежението на нелинейния елемент при ток $I_{\text{НЕ}(2)} = 1{,}6\ [A]$:

$$U_{\text{НЕ}(2)} = 3I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2 = 3.1{,}6 - 1{,}6^2 = 2{,}240\ [V],$$

откъдето за тока $I_{\text{НЕ}(3)}$ във веригата се получава:

$$I_{\text{НЕ}(3)} = \frac{10 - U_{\text{НЕ}(2)}}{5} = \frac{10 - 2{,}240}{5} = 1{,}552\ [A]$$

Разликата $\left|I_{\text{НЕ}(3)} - I_{\text{НЕ}(2)}\right|$ е:

$$\left|I_{\text{НЕ}(3)} - I_{\text{НЕ}(2)}\right| = |1{,}552 - 1{,}6| = 0{,}048 > 0{,}001$$

Следователно и тази работна точка не е решение на задачата.

ИТЕРАЦИЯ 3

Продължаваме нататък, като този път определяме напрежението $U_{\text{НЕ}}$ при работна точка $I_{\text{НЕ}} = 1{,}552\ [A]$:

$$U_{\text{НЕ}(3)} = 3I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2 = 3.1{,}552 - 1{,}552^2 = 2{,}2473\ [V]$$

За тока във веригата се получава:

$$I_{\text{НЕ}(4)} = \frac{10 - U_{\text{НЕ}(3)}}{5} = \frac{10 - 2{,}2473}{5} = 1{,}5505\ [A]$$

Получаваме:

$$\left|I_{\text{НЕ}(4)} - I_{\text{НЕ}(3)}\right| = |1{,}5505 - 1{,}552| = 0{,}00146 > 0{,}001$$

Вижда се, че след третата итерация $I_{\text{НЕ}(k+1)}$ все още не клони към $I_{\text{НЕ}(k)}$ с желаната точност, така че правим следваща итерация.

ИТЕРАЦИЯ 4

Определяме напрежението $U_{\text{НЕ}}$ при работна точка $I_{\text{НЕ}} = 1{,}5505\ [A]$:

$$U_{\text{НЕ}(3)} = 3I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2 = 3.1{,}5505 - 1{,}5505^2 = 2{,}2475\ [V]$$

За тока във веригата се получава:

$$I_{\text{НЕ}(4)} = \frac{10 - U_{\text{НЕ}(3)}}{5} = \frac{10 - 2{,}2475}{5} = 1{,}5505\ [A]$$

Получаваме:

$$\left|I_{\text{НЕ}(4)} - I_{\text{НЕ}(3)}\right| = |1{,}5505 - 1{,}5505| = 0{,}0000 < 0{,}001$$

Вижда се, че след 4-тата итерация имаме решение на задачата с желаната точност. Следователно за дадената схема, токът през нелинейния елемент е:

$$I_{\text{НЕ}} = 1{,}5505[A]$$

Описаните итерациите са представени и в табличен вид:

Номер на итерация	$I_{\text{НЕ}(k)}$ $[A]$	$U_{\text{НЕ}(k)}$ $[B]$	$I_{\text{НЕ}(k+1)}$ $[A]$	$\left\|I_{\text{НЕ}(k+1)} - I_{\text{НЕ}(k)}\right\|$ $[A]$
$k = 1$	1,00	2,00	1,6	|1,6-1,00|=0,6
$k = 2$	1,6	2,24	1,552	|1,552-1,6|=0,048
$k = 3$	1,552	2,2473	1,5505	|1,5505-1,552|=0,0015

$k = 4$	1,5505	2,2475	1,5505	|1,5505-1,5505|=0,0000

Метод на Нютон-Рафсон

Друг метод, базиран на итерации, е т.н. метод на Нютон-Рафсон. Този метод позволява да се намали броят на итерациите, като на практика се смята за най-ефективния.

Нека нелинейното уравнение $f(x) = 0$ има едно единствено решение $x = x_{k+1}$. Това позволява да запишем $f(x_{k+1})$ като:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + \Delta x_k . f'(x_k) = 0$$

където $f'(x_k)$ е производната на $f(x_k)$.

Следователно решението за x_{k+1} е:

$$f(x_k) + \Delta x_k . f'(x_k) \quad \rightarrow \quad x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

След казаното до тук можем да обобщим стъпките, до които се свежда решението на нелинейни вериги чрез метода на Нютон-Рафсон:

1. Избираме с каква точност желаем да определим токовете. Например:

$$\text{Точност} = 0{,}001\ [A]$$

2. Записва се система от нелинейни уравнения по кой да е от изучените методи, откъдето се определя нелинейната функция $f\left(I_{\text{НЕ}(k)}\right)$ и първата и производна $f'\left(I_{\text{НЕ}(k)}\right)$;

3. Избира се начална стойност на тока (или напрежението) на нелинейния елемент:

$$I_{\text{НЕ}(k)} = I_0$$

4. Определя се тока при следващата итерация съгласно:

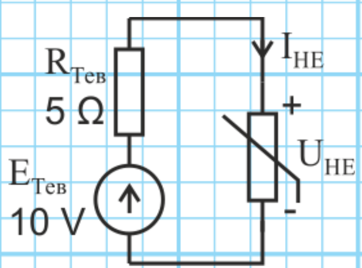
$$I_{\text{НЕ}(k+1)} = I_{\text{НЕ}(k)} - \frac{f\left(I_{\text{НЕ}(k)}\right)}{f'\left(I_{\text{НЕ}(k)}\right)}$$

5. Стъпка 4 се повтаря докато не получим:

$$\left|I_{\text{НЕ}(k+1)} - I_{\text{НЕ}(k)}\right| < \text{Точност}$$

А сега ще решим последния пример, но този път прилагайки метода на Нютон Рафсон.

Пример: Нелинеен елемент, чиято ВАХ е апроксимирана с $U_{\text{НЕ}} = 3I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2$, се захранва от еквивалентна схема на Тевенен. Да се определи токът във веригата $I_{\text{НЕ}}$.



1. Първо ще изберем с каква точност желаем да определим токовете. Нека точността да е:

$$\text{Точност} = 0{,}001\ [A]$$

2. Записваме системата нелинейни уравнения (в случая 1 уравнение по ВЗК):

$$E_{\text{Тев}} = 5I_{\text{НЕ}} + U_{\text{НЕ}} \quad \rightarrow \quad 10 = 5I_{\text{НЕ}} + 3I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2$$

$$\rightarrow \quad 10 = 8I_{\text{НЕ}} - I_{\text{НЕ}}^2$$

Следователно нашата функция $f(I_{\text{НЕ}})$ е:

$$f(I_{\text{НЕ}}) = I_{\text{НЕ}}^2 - 8I_{\text{НЕ}} + 10 = 0,$$

а първата и производна е:

$$f'(I_{\text{НЕ}}) = \frac{d\left(I_{\text{НЕ}}^2 - 8I_{\text{НЕ}} + 10\right)}{dI_{\text{НЕ}}} = 2I_{\text{НЕ}} - 8$$

3. Избираме начален ток във веригата за първата итерация:

$$I_{\text{НЕ}(1)} = 1\ [A]$$

<u>ИТЕРАЦИЯ 1</u>

Определяме тока на нелинейния елемент след първата итерация:

$$I_{\text{НЕ}(2)} = I_{\text{НЕ}(1)} - \frac{f\left(I_{\text{НЕ}(1)}\right)}{f'\left(I_{\text{НЕ}(1)}\right)} = I_{\text{НЕ}(1)} - \frac{I_{\text{НЕ}(1)}^2 - 8I_{\text{НЕ}(1)} + 10}{2I_{\text{НЕ}(1)} - 8} =$$

$$= 1 - \frac{1^2 - 8.1 + 10}{2.1 - 8} = 1{,}500\ [A]$$

Токът $I_{\text{НЕ}(2)}$ не клони към $I_{\text{НЕ}(1)}$, тъй като:

$$\left|I_{\text{НЕ}(2)} - I_{\text{НЕ}(1)}\right| = |1{,}500 - 1.000| = 0{,}500 > 0{,}001$$

<u>ИТЕРАЦИЯ 2</u>

Пресмятаме тока отново, този път при работна точка $I_{\text{НЕ}(2)} = 1{,}500\ [A]$:

$$I_{\text{НЕ}(3)} = I_{\text{НЕ}(2)} - \frac{I_{\text{НЕ}(2)}^2 - 8I_{\text{НЕ}(2)} + 10}{2I_{\text{НЕ}(2)} - 8} =$$

$$= 1{,}5 - \frac{1{,}5^2 - 8.1{,}5 + 10}{2.1{,}5 - 8} = 1{,}550\ [A]$$

Токът $I_{\text{НЕ}(3)}$ не клони към $I_{\text{НЕ}(2)}$:

$$\left|I_{\text{НЕ}(3)} - I_{\text{НЕ}(2)}\right| = |1{,}550 - 1.500| = 0{,}050 > 0{,}001$$

ИТЕРАЦИЯ 3

Пресмятаме тока при работна точка $I_{\text{НЕ}(3)} = 1{,}550\ [A]$:

$$I_{\text{НЕ}(4)} = I_{\text{НЕ}(3)} - \frac{I_{\text{НЕ}(3)}^2 - 8I_{\text{НЕ}(3)} + 10}{2I_{\text{НЕ}(3)} - 8} =$$

$$= 1{,}55 - \frac{1{,}55^2 - 8.1{,}55 + 10}{2.1{,}55 - 8} = 1{,}5505\ [A]$$

За разликата между двете итерации се получава:

$$\left|I_{\text{НЕ}(4)} - I_{\text{НЕ}(3)}\right| = |1{,}5505 - 1{,}550| = 0{,}0005 < 0{,}001$$

Вижда се, че $I_{\text{НЕ}(4)}$ клони към $I_{\text{НЕ}(3)}$ с достатъчна точност, т.е. можем да приемем, че сме получили решение на задачата:

$$I_{\text{НЕ}} = 1{,}5505\ [A]$$

Забележете, че по този метод ни бяха нужни три итерации, докато по предходния – четири.

Описаните итерациите са представени и в табличен вид:

Номер на итерация	$I_{\text{НЕ}(k)}$ $[A]$	$I_{\text{НЕ}(k+1)}$ $[A]$	$\left\|I_{\text{НЕ}(k+1)} - I_{\text{НЕ}(k)}\right\|$ $[A]$
$k = 1$	1,000	1,500	|1,500-1,000|=0,5
$k = 2$	1,500	1,550	|1,550-1,500|=0,050
$k = 3$	1,550	1,5505	|1,5505-1,550|=0,0005