АНАЛИЗ НА ЛИНЕЙНИ СИНУСОИДАЛНИ ВЕРИГИ ПРИ УСТАНОВЕН РЕЖИМ

1. Въведение

Вериги при установен синусоидален режим са такива вериги, при които източниците създават синусоидални токове и напрежения. За тях важат същите закони, както и при постояннотоковите вериги, но синусоидите се представят в комплексна форма. Да разгледаме един синусоидален ток:

$$i(t) = I_m.\sin(\omega t + \varphi)$$

където I_m е амплитудната стойност;

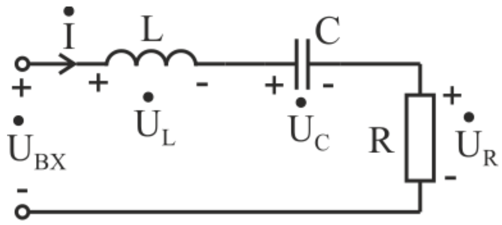
$\omega = 2\pi f$ е ъгловата честота;

φ е началната фаза.

Всяка синусоида може да се представи като въртящ се вектор с помощта на комплексно число:

$$i(t) = I_m.\sin(\omega t + \varphi) \quad => \quad \dot{I} = I_m.e^{j\varphi} = I_m\cos(\varphi) + jI_m\sin(\varphi)$$

Разглежда се последователна RLC верига.



За нея можем да запишем следното уравнение по ВЗК:

$$\dot{U}_{\text{BX}} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

където напреженията върху резистора, бобината и кондензатора са:

$$\dot{U}_R = R.\dot{I}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}X_L\dot{I}$$

$$\dot{U}_C = -\mathrm{j}X_C\dot{I}$$

X_L и X_C са реактивните съпротивленията на бобината и кондензатора:

$$X_L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Като заместим горните изрази в уравнението по ВЗК получаваме:

$$\dot{U}_{\text{BX}} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I}\big(R + j(X_L - \mathrm{X_C})\big) = \dot{I}(R + jX)$$

където $Z = R + jX$ е комплексното съпротивление на веригата.

$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ е общото реактивно съпротивление на клона.

Всяко комплексно число може да се представи в алгебрична или експоненциална форма, т.е. комплексното съпротивление също така е:

$$Z = R + jX = z.e^{-j\varphi}$$

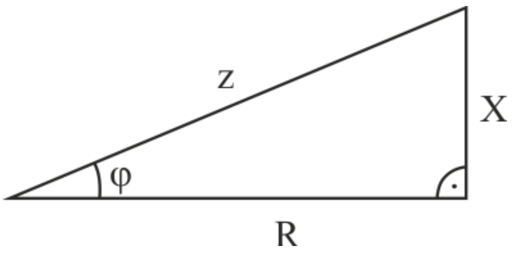
където z е пълното съпротивление на веригата:

$$z = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I} = \sqrt{R^2 + \mathrm{X}^2}$$

φ е фазовата разлика между токът и напрежението във веригата:

$$\varphi = \operatorname{atan}\frac{X}{R}$$

На практика горните връзки произлизат от факта, че съпротивленията във вериги при установен синусоидален режим са свързани със страните на правоъгълен триъгълник, т.е. z е хипотенузата, а φ – ъгълът между активното съпротивление и хипотенузата.



2. Решени задачи

Задача 1. Да се определят комплексните образи на следните синусоиди:

- $i_1(t) = 10\sin(\omega t + 45°)\ \ [A]$
- $i_2(t) = 12\sin(\omega t - 90°)\ \ [A]$
- $i_3(t) = 3\sin(\omega t + 80°)\ \ [A]$
- $u_1(t) = 100\sin(\omega t)\ \ [V]$
- $u_2(t) = 50\sin(\omega t - 35°)\ \ [V]$

Решения:

$$\dot{I}_1 = 10e^{j45°}\ [A]$$

$$\dot{I}_2 = 12e^{-j90°}\ [A]$$

$$\dot{I}_3 = 3e^{j80°}\ [A]$$

$$\dot{U}_1 = 100e^{j0°} = 100\ [V]$$

$$\dot{U}_2 = 50e^{-j35°}\ [V]$$

Задача 2. Да се представят комплексните числа в синусоидална форма:

- $\dot{I}_1 = 2.25e^{j30°}\ [A]$
- $\dot{I}_2 = 1.5e^{-j45°}\ [A]$
- $\dot{U}_1 = 5 + j10\ [V]$
- $\dot{U}_2 = -10 - j10\ [V]$

Решения:

$$i_1(t) = 2.25\sin(\omega t + 30°) \quad [A]$$

$$i_2(t) = 1.5\sin(\omega t - 45°) \quad [A]$$

$$\dot{U}_1 = 5 + j10 = \sqrt{5^2 + 10^2}e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{10}{5}} = 11{,}2e^{j63°} \;\rightarrow\; u_1(t) = 11{,}2\sin(\omega t + 63°) \quad [V]$$

$$\dot{U}_2 = -10 - j10 = \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2}e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{-10}{-10}} = 14{,}1e^{j45°}$$

$$\rightarrow\; u_2(t) = 14{,}1\sin(\omega t + 45°) \quad [V]$$

Задача 3. Да се определят реактивните съпротивления на следните бобини и кондензатори:

- $L_1 = 10\ mH$ при честота $f = 50\ Hz$
- $C_1 = 0{,}5\ F$ при честота $f = 110\ Hz$
- $L_2 = 150\ \mu H$ при честота $f = 10\ kHz$
- $L_3 = 150\ \mu H$ при честота $f = 100\ kHz$
- $C_2 = 10\ \mu F$ при честота $f = 10\ kHz$
- $C_3 = 10\ \mu F$ при честота $f = 100\ kHz$

Решения:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi * 50 * 10 * 10^{-3} = 3{,}14\ [\Omega]$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2\pi * 110 * 0.5} = 0{,}0029\ [\Omega]$$

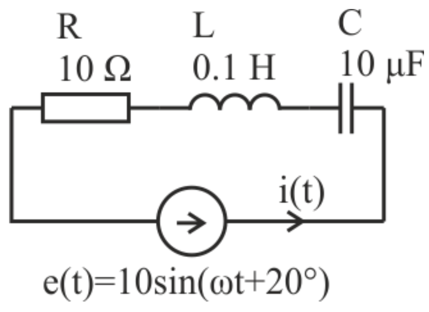
$$X_{L2} = \omega L_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi * 10000 * 150 * 10^{-6} = 9{,}42\ [\Omega]$$

$$X_{L3} = \omega L_3 = 2\pi f L_3 = 2\pi * 100000 * 150 * 10^{-6} = 94{,}2\ [\Omega]$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{1}{2\pi * 10000 * 10 * 10^{-6}} = 1{,}6\ [\Omega]$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{2\pi f C_3} = \frac{1}{2\pi * 100000 * 10 * 10^{-6}} = 0{,}16\ [\Omega]$$

Задача 4. Да се определи токът $i(t)$ във веригата при $f = 100\ Hz$.



За да решим задачата първо трябва да определим реактивните съпротивления (реактансите) на бобината и кондензатора.

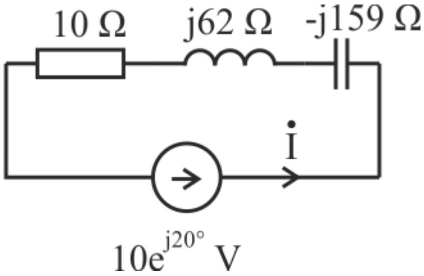
$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 * \pi * 100 * 0.1 = 62\ [\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 * \pi * 100 * 10 * 10^{-6}} = 159\ [\Omega]$$

Също така представяме синусоидалния източник като комплексно число:

$$\dot{E} = 10e^{j20^\circ}\ [V]$$

Сега можем да създадем еквивалентна заместваща схема с комплексните числа:



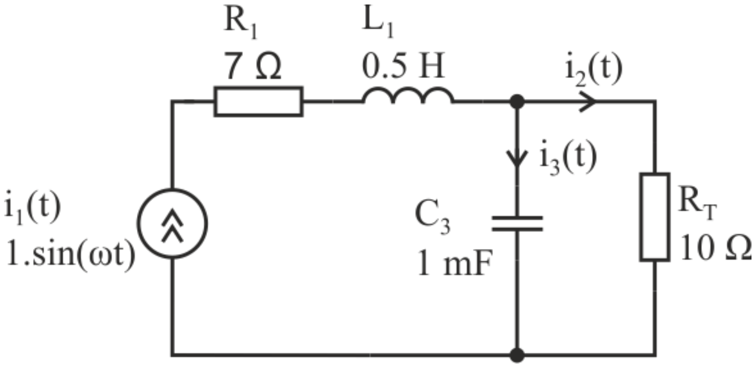
Записваме уравнение по ВЗК за контура:

$$10e^{j20^\circ} = \dot{I}(10 + j60 - j159) \quad => \quad \dot{I} = \frac{10e^{j20^\circ}}{97{,}5e^{-j84^\circ}} = 0{,}103e^{j104^\circ}\ [A]$$

На получения комплексен ток съответства следната синусоида:

$$\dot{I} = 0{,}103e^{j104^\circ} \quad => \quad i(t) = 0{,}103\sin(\omega t + 104^\circ)\ [A]$$

Задача 5. Да се определят токовете във веригата ако честотата на източника е $f = 20\ Hz$ и да се определи мощността отделяна от товара R_T.



Първо ще определим съпротивленията на бобините и кондензаторите за честота $f = 20\ Hz$:

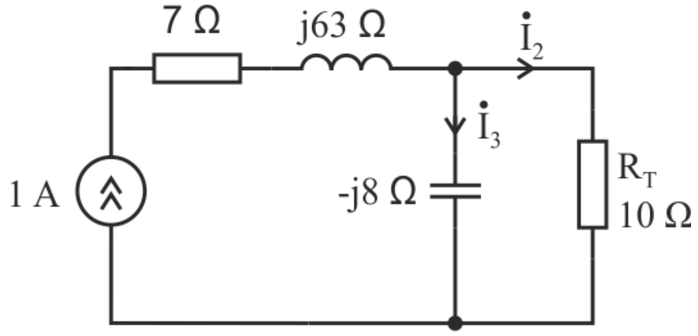
$$X_{L1} = \omega L = 2\pi f L = 2\pi * 20 * 0{,}5 = 63\ [\Omega]$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi * 20 * 1 * 10^{-3}} = 8\ [\Omega]$$

Също така ще представим синусоидалния източник в комплексна форма:

$$i_1(t) = 1.\sin(\omega t + 0) \quad => \quad \dot{I}_1 = 1e^{j0} = 1\ [A]$$

Сега можем да начертаем еквивалентна заместваща схема:



В горната схема има 2 неизвестни тока, така че записваме система от 2 уравнения:

$$\left|\begin{aligned} 1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ 0 &= 10\dot{I}_2 + j8\dot{I}_3 \end{aligned}\right. \quad => \quad \begin{bmatrix}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 10 & j8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 10 & j8\end{bmatrix} = 1 * j8 - 10 = -10 + j8$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & j8\end{bmatrix} = j8$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 10 & 0\end{bmatrix} = -10$$

Комплексните токове са:

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{j8}{-10 + j8} = \frac{8e^{j90^\circ}}{12{,}8e^{-j39^\circ}} = 0{,}63e^{j129^\circ}\ [A]$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-10}{-10 + j8} = \frac{-10}{12{,}8e^{-j39^\circ}} = 0{,}78e^{j39^\circ}\ [A]$$

Получените комплексни токове представяме в синусоидална форма:

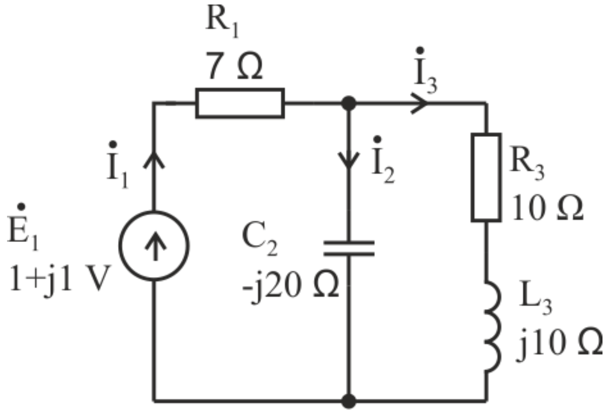
$$\dot{I}_2 = 0{,}63e^{j129^\circ} \quad => \quad i_2(t) = 0{,}63\sin(\omega t + 129^\circ)\ \ [A]$$

$$\dot{I}_3 = 0{,}78e^{j39^\circ} \quad => \quad i_3(t) = 0{,}78\sin(\omega t + 39^\circ)\ \ [A]$$

Мощността отделяна в товара R_T можем да определим чрез:

$$P = \left(\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}\right)^2 R_T = \left(\frac{0{,}63}{\sqrt{2}}\right)^2 10 = 1{,}98\ [W]$$

Задача 6. Да се определят комплексните токове във веригата и да се определят мощностите на R_3 и L_3.



В тази задачи всички стойности на веригата са дадени директно като комплексни числа, така че директно ще приложим законите на Кирхоф:

$$\left|\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ 1 + j1 &= 7\dot{I}_1 - j20\dot{I}_2 \\ (10 + j10)\dot{I}_3 &+ j20\dot{I}_2 = 0 \end{aligned}\right. \quad => \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & -j20 & 0 \\ 0 & j20 & 10 + j10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + j1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & -j20 & 0 \\ 0 & j20 & 10 + j10 \end{bmatrix} = j20(10 + j10) + 7 * j20 - 7(10 + j10)$$
$$= j200 - 200 + j140 - 70 - j70 = -270 + j270 = 382e^{-j45^\circ}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 + j1 & -j20 & 0 \\ 0 & j20 & 10 + j10 \end{bmatrix} = j20(1 + j1) - (1 + j1)(10 + j10) =$$
$$= j20 - 20 - 10 - j10 - j10 + 10 = -20$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 + j1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 + j10 \end{bmatrix} = -(1 + j1)(10 + j10) = -10 - j10 - j10 + 10 = -j20$$
$$= 20e^{-j90^\circ}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -j20 & 1 + j1 \\ 0 & j20 & 0 \end{bmatrix} = -j20(1 + j1) = 20 - j20 = 28{,}3e^{-j45^\circ}$$

Следователно комплексните токове са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{382e^{-j45^\circ}} = -0{,}052e^{j45^\circ} \;\; [A]$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20e^{-j90^\circ}}{382e^{-j45^\circ}} = 0{,}052e^{j-45^\circ} \;\; [A]$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{28{,}3e^{-j45^\circ}}{382e^{-j45^\circ}} = 0{,}074e^{j0} = 0{,}074 \;\; [A]$$

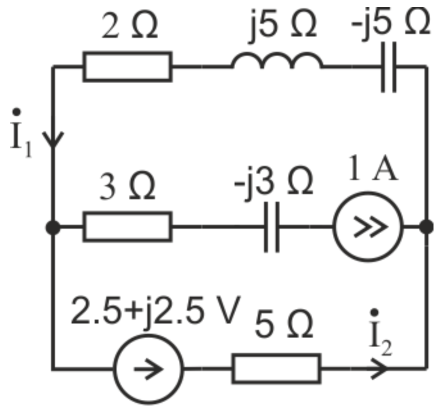
Мощността на R_3 е активна и се определя с:

$$P_{R3} = \left(\frac{I_{3m}}{\sqrt{2}}\right)^2 . R_3 = \left(\frac{0{,}074}{\sqrt{2}}\right)^2 . 10 = 0{,}027 \; [W]$$

Мощността на бобината L_3 е реактивна и може да се определи с:

$$Q_{L3} = \left(\frac{I_{3m}}{\sqrt{2}}\right)^2 .X_{L3} = \left(\frac{0{,}074}{\sqrt{2}}\right)^2 .10 = 0{,}027\ [VAr]$$

Задача 7. Да се определят комплексните токове във веригата.



Във веригата има 2 неизвестни тока (единият ток е известен), така че са нужни 2 уравнения по методът със законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} 1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \\ 2{,}5 + j2{,}5 = 5\dot{I}_2 + \dot{I}_1(2 + j5 - 5j) \end{cases}$$

Записваме системата в матричен вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}5 + j2{,}5 \end{bmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1 * 5 + 1 * 2 = 7$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2{,}5 + j2{,}5 & 5 \end{bmatrix} = 5 + 2.5 + j2.5 = 7{,}5 + j2{,}5$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2{,}5 + j2{,}5 \end{bmatrix} = 2.5 + j2.5 - 2 = 0{,}5 + j2{,}5$$

Следователно токовете са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7{,}5 + j2{,}5}{7} = 1{,}07 + j0{,}36 = 1{,}13e^{j18{,}6^\circ}\ [A]$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0{,}5 + j2{,}5}{7} = 0{,}07 + j0{,}36 = 0{,}37e^{j79^\circ}\ [A]$$