

АНАЛИЗ НА ПОСТОЯННОТОКОВИ ВЕРИГИ ПРИ УСТАНОВЕН РЕЖИМ

1. Въведение

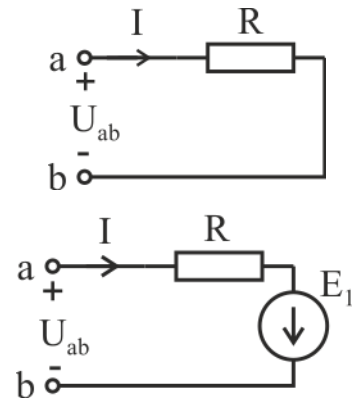
Основните величини в електрическите вериги са електрически ток, напрежение и съпротивление. Връзката между тях се дава със **закона на Ом**. Токът в пасивен клон от верига е:

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{U_a - U_b}{R}$$

където U_a и U_b са потенциалите на възлите **a** и **b**.

При активен участък от верига, в който посоката на източника на напрежение E_1 съвпада с тази на тока, законът на Ом добива следния вид:

$$I = \frac{U_{ab} + E_1}{R} = \frac{U_a - U_b + E_1}{R}$$



Първият закон на Кирхоф (ПЗК) се отнася за възел във верига и гласи: сумата на влизащите токове в даден възел е равна на сумата от излизащите токове:

$$\sum I_{\text{вл}} = \sum I_{\text{изл}}$$

Вторият закон на Кирхоф (ВЗК) се отнася за затворен контур във верига и гласи: алгебричната сума от падовете на напрежения в кой да е затворен контур е нула:

$$\sum U_k = 0$$

Обикновено е по-удобно ВЗК да се запише като: алгебричната сума от големините на източниците на напрежение в затворен контур е равна на алгебричната сума от падовете на напрежения:

$$\sum E_k = \sum U_k = \sum I_k R_k$$

На практика законът на Ом е частен случай на ВЗК.

Мощността в ДС електрически вериги се определя съгласно:

$$P = U \cdot I$$

Ако в горното уравнение се замени законът на Ом, можем да получим мощността по още два начина:

$$P = I^2 \cdot R \quad P = \frac{U^2}{R}$$

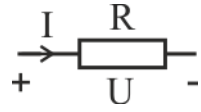
За всяка електрическа верига е изпълнен **балансът на мощностите**, който гласи: Сумата от мощностите отделяна от източниците е равна на сумата от мощностите консумирана от консуматорите:

$$\sum P_{\text{изт}} = \sum P_{\text{конс}}$$

2. Решени задачи

Задача 1. Да се определят тока, напрежението, мощността и съпротивлението на резистора ако:

- а) През резистора $R_1 = 100 \Omega$ минава ток с големина $I_1 = 10 A$;
б) Върху резистора $R_2 = 50 \Omega$ има пад на напрежение $U_2 = 25 V$;
в) В резистора $R_3 = 120 \Omega$ се разсейва мощност $P_3 = 1 W$;
г) През резистор минава ток с големина $I_4 = 1 A$ и се разсейва мощност $P_4 = 1 W$;
д) Напрежението на резистор е $U_5 = 12 V$, а разсейваната мощност - $P_5 = 2 W$.



Решения:

а) По законът на Ом определяме напрежението върху резистора:

$$U_1 = I_1 R_1 = 10 \cdot 100 = 1000 [V]$$

Разсейваната мощност определяме чрез законът на Джаул-Ленц:

$$P_1 = U_1 I_1 = 10 \cdot 1000 = 10000 = 10 [kW]$$

б) По законът на Ом определяме токът през резистора:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{25}{50} = 0,5 [A]$$

Следователно разсейваната мощност е:

$$P_2 = U_2 I_2 = 25 \cdot 0,5 = 12,5 [W]$$

в) От законът на Ом знаем:

$$U_3 = I_3 R_3$$

Законът на Джаул-Ленц гласи:

$$P_3 = U_3 I_3 = I_3 I_3 R_3 = I_3^2 R_3 \rightarrow I_3^2 = \frac{P_3}{R_3} \rightarrow I_3 = \sqrt{\frac{P_3}{R_3}} = \sqrt{\frac{1}{120}} = 0,091 = 91 [mA]$$

Следователно напрежението е:

$$U_3 = I_3 R_3 = 0,091 \cdot 120 = 11 [V]$$

г) Записваме законът на Джаул-Ленц:

$$P_4 = U_4 I_4 = I_4^2 R_4 \rightarrow R_4 = \frac{P_4}{I_4^2} = \frac{1}{1^2} = 1 [\Omega]$$

Следователно от законът на Ом можем да определим напрежението:

$$U_4 = I_4 R_4 = 1 \cdot 1 = 1 [V]$$

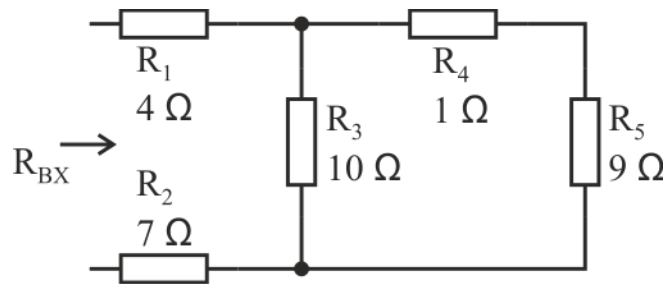
д) От законът на Джаул-Ленц определяме токът във веригата:

$$P_5 = I_5 U_5 \rightarrow I_5 = \frac{P_5}{U_5} = \frac{2}{12} = 0,167 [A]$$

Следователно съпротивлението на резистора е:

$$R_5 = \frac{U_5}{I_5} = \frac{12}{0,167} = 72 [\Omega]$$

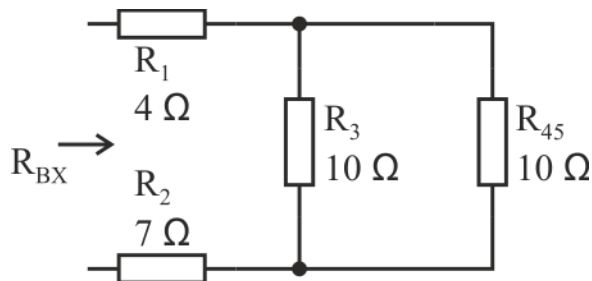
Задача 2. Да се определи еквивалентното съпротивление R_{BX} и каква мощност ще се разсее, ако веригата се захрани с напрежение $U = 2 V$.



Започваме да опростяваме веригата, като първо обединяваме последователните и паралелните елементи. R_4 и R_5 са свързани последователно, така че ги обединяваме:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 1 + 9 = 10 \Omega$$

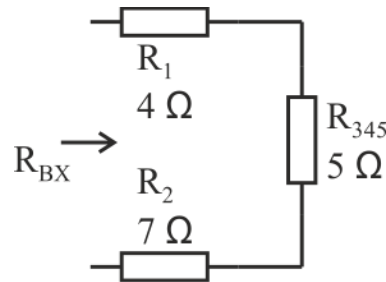
Чертаем нова еквивалентна схема:



Елементите R_3 и R_{45} са свързани паралелно, така че еквивалентното им е:

$$R_{345} = \frac{R_3 R_{45}}{R_3 + R_{45}} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \Omega$$

Чертаем нова еквивалентна схема:



В нея има 3 последователно свързани резистора. Следователно получаваме:

$$R_{BX} = R_1 + R_2 + R_{345} = 4 + 7 + 5 = 16 \Omega$$

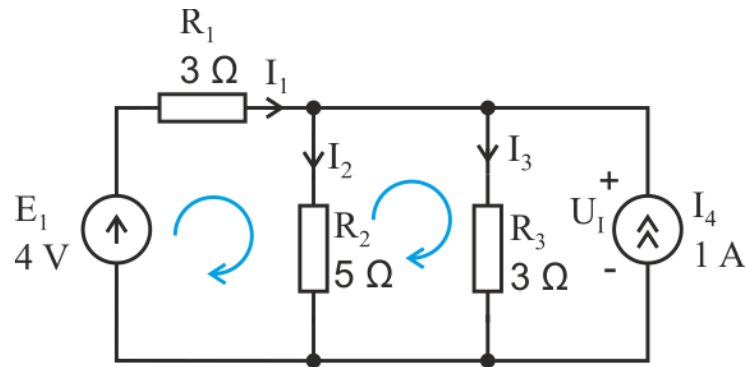
Ако захраним веригата с напрежение $U = 2 V$, входният ток ще бъде:

$$I = \frac{U}{R_{BX}} = \frac{2}{16} = 0,125 [A]$$

Следователно във веригата се разсейва следната мощност:

$$P = U \cdot I = 2 \cdot 0,125 = 0,25 [W]$$

Задача 3. Да се определят токовете във веригата по метода със законите на Кирхоф и да се провери балансът на мощностите.



Веригата има 3 неизвестни тока (четвъртият е известен защото има източник на ток), така че ни е нужна система с три уравнения. Веригата има два възела, така че можем да запишем 1 уравнение по ПЗК и 2 по ВЗК:

$$\begin{cases} I_1 + I_4 = I_2 + I_3 \\ E_1 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \\ 0 = -R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 + 1 = I_2 + I_3 \\ 4 = 3 \cdot I_1 + 5 \cdot I_2 \\ 0 = -5 \cdot I_2 + 3 \cdot I_3 \end{cases}$$

Записваме горното уравнение в матрична форма:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 = -39$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 4 = -17$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 = -21$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot 5 = -35$$

Тогава за токовете се получава:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-17}{-39} = 0,436 \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-21}{-39} = 0,539 \text{ [A]}$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-35}{-39} = 0,897 \text{ [A]}$$

Баланс на мощностите

За да проверим баланса на мощностите ще ни е нужен падът на напрежението върху източника на ток. За целта записваме едно уравнение по ВЗК, минаващо през него и R_3 :

$$U_1 = R_3 \cdot I_3 = 3 \cdot I_3 = 3 \cdot 0,897 = 2,691 \text{ [V]}$$

За мощността на източниците се получава:

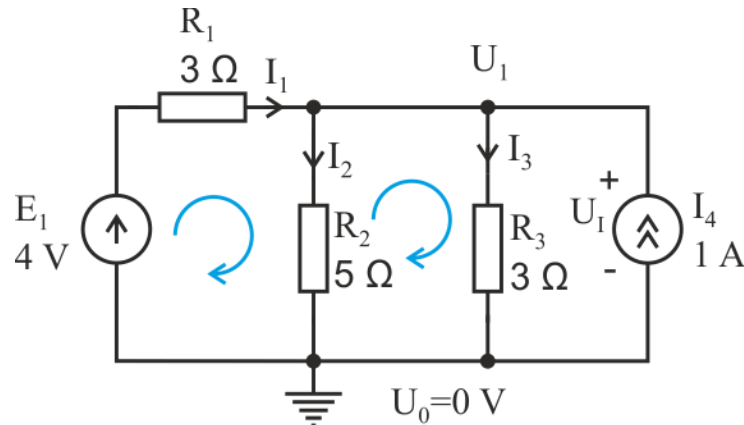
$$P_{\text{ИЗТ}} = P_{E_1} + P_{I_4} = E_1 \cdot I_1 + V_I \cdot I_4 = 4,0,436 + 2,691 = 4,435 \text{ [W]}$$

Мощността консумирана от резисторите е:

$$P_{\text{КОНС}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 0,436^2 \cdot 3 + 0,539^2 \cdot 5 + 0,897^2 \cdot 3 = 4,436 \text{ [W]}$$

Тъй като $P_{\text{ИЗТ}} = P_{\text{КОНС}}$ балансът излиза, т.е. задачата е решена правилно.

Задача 4. Да се определят токовете във веригата по метода с възловите потенциали.



Схемата има 2 възела, като приемаме, че долният (в.0) е свързан към земя, т.е. има потенциал 0: $U_0 = 0 \text{ V}$, а търсим напрежението във в.1 U_1 .

Записваме уравнение по ПЗК за в.1:

$$I_1 + 1 = I_2 + I_3$$

Изразяваме трите тока по закона на Ом:

$$I_1 = \frac{U_0 - U_1 + 4}{3} = \frac{-U_1 + 4}{3}$$

$$I_2 = \frac{U_1 - U_0}{5} = \frac{U_1}{5}$$

$$I_3 = \frac{U_1 - U_0}{3} = \frac{U_1}{3}$$

Заместваме трите тока в уравнението по ПЗК:

$$I_1 + 1 = I_2 + I_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-U_1 + 4}{3} + 1 = \frac{U_1}{5} + \frac{U_1}{3} \quad \Rightarrow \quad U_1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \left(1 + \frac{4}{3} \right)$$

За възловия потенциал се получава:

$$U_1 = 2,692 \text{ [V]}$$

Следователно трите тока са:

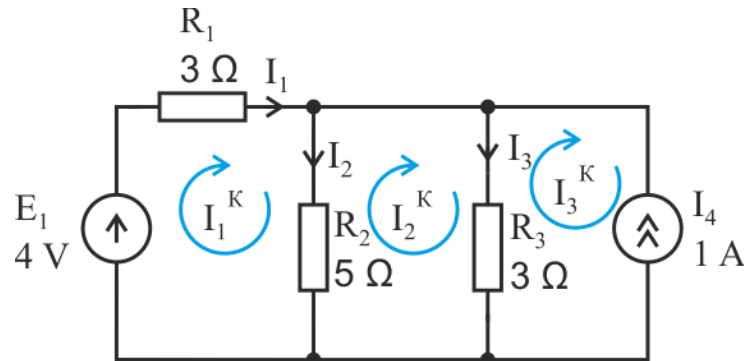
$$I_1 = \frac{-U_1 + 4}{3} = \frac{-2,692 + 4}{3} = 0,436 \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{U_1}{5} = \frac{2,692}{5} = 0,539 \text{ [A]}$$

$$I_3 = \frac{U_1}{3} = \frac{2,692}{3} = 0,897 \text{ [A]}$$

Забележете, че се получават същите резултати като при методът с законите на Кирхоф, но в случая нямаме система, а само едно уравнение с 1 неизвестно.

Задача 5. Определете токовете във веригата по метода с контурните токове.



Задават се достатъчно контурни токове, така че да се обходят всички елементи във веригата, като е прието всички да се въртят по посока на часовниковата стрелка. В случая са достатъчни 3 контурни тока. Тъй като токът I_3^K минава през източника на ток, неговата големина е известна:

$$I_3^K = -I_4 = -1 \text{ [A]}$$

За другите два контура записваме уравнения по ВЗК:

$$\begin{aligned} E_1 &= I_1^K(R_1 + R_2) - I_2^K R_2 \Rightarrow 8I_1^K - 5I_2^K = 4 \\ 0 &= I_2^K(R_2 + R_3) - I_1^K R_2 - I_3^K R_3 \Rightarrow 8I_2^K - 5I_1^K = -3 \end{aligned}$$

Записваме горното уравнение в матричен вид:

$$\begin{vmatrix} I_1^K \\ I_2^K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 25 = 39 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 15 = 17 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 20 = -4 \end{aligned}$$

За контурните токове се получава:

$$\begin{aligned} I_1^K &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{17}{39} = 0,436 \text{ [A]} \\ I_2^K &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{39} = -0,103 \text{ [A]} \end{aligned}$$

Всеки клонов ток е алгебрична сума от контурните токове, минаващи през него:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^K \\ I_2 &= I_1^K - I_2^K \end{aligned}$$

$$I_3 = I_2^K - I_3^K = I_2^K + 1$$

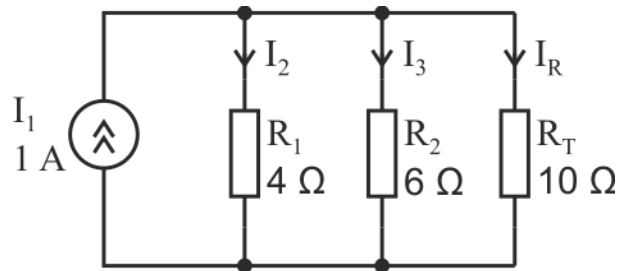
Тогава за клоновите токове се получава:

$$I_1 = I_1^K = 0,436 \text{ [A]}$$

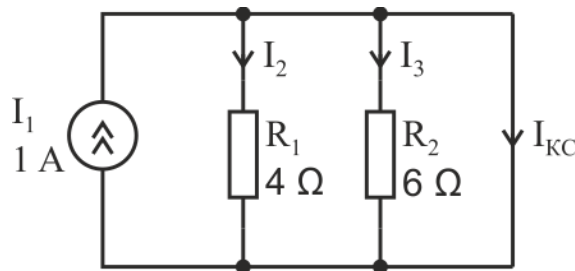
$$I_2 = I_1^K - I_2^K = 0,436 + 0,103 = 0,539 \text{ [A]}$$

$$I_3 = I_2^K + 1 = 0,897 \text{ [A]}$$

Задача 6. Да се анализира веригата по теоремата на Тевенен и да се определи мощността, разсейвана в товара R_T .



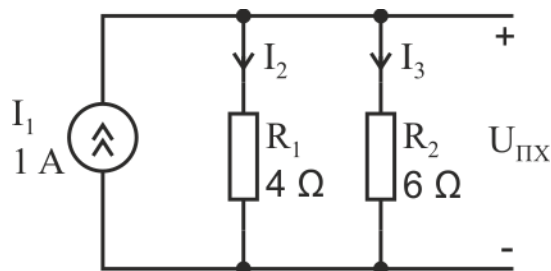
Първо ще определим токът на късо съединение, ако на мястото на товара, схемата се даде на късо.



Тъй като резисторите R_1 и R_2 са дадени на късо, върху тях няма пад на напрежение. Следователно токът от източника на ток минава изцяло през късото съединение:

$$I_{КС} = I_1 = 1 \text{ [A]}$$

След това ще разгледаме схемата като отново махнем товара, но този път ще я оставим на празен ход, като целта е да намерим $U_{ПХ}$.



Можем да обединим двата резистора в един еквивалентен:

$$R_{ЕКВ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2,4 \text{ [}\Omega\text{]}$$

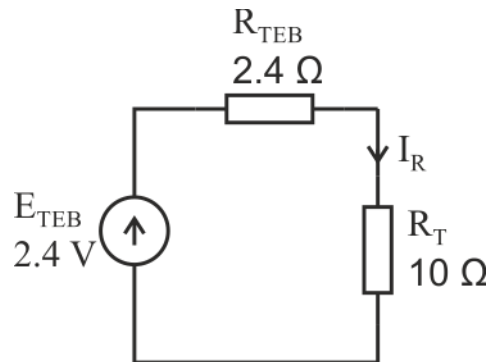
Напрежението върху двата резистора е всъщност $U_{ПХ}$ и можем да го определим по закона на Ом:

$$U_{ПХ} = I_1 R_{ЕКВ} = 2,4 \cdot 1 = 2,4 \text{ [V]}$$

Следователно еквивалентният източник на Тевенен има следните характеристики:

$$E_{\text{ТЕВ}} = U_{\text{ПХ}} = 2,4 \text{ [V]}$$
$$R_{\text{ТЕВ}} = \frac{U_{\text{ПХ}}}{I_{\text{КС}}} = \frac{2,4}{1} = 2,4 \text{ [\Omega]}$$

Следователно еквивалентната схема на Тевенен ще бъде:



Токът и мощността през товара са:

$$I_{\text{R}} = \frac{E_{\text{ТЕВ}}}{R_{\text{ТЕВ}} + R_{\text{T}}} = \frac{2,4}{2,4 + 10} = 0,194 \text{ [A]}$$
$$P_{\text{RT}} = I_{\text{R}}^2 R_{\text{T}} = 0,194^2 \cdot 10 = 0,375 \text{ [W]}$$