Несинусоидални режими в електрическите вериги

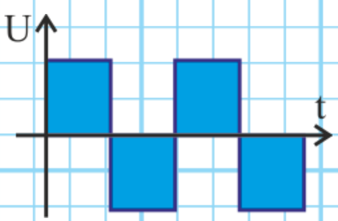
Ред на Фурие

Несинусоидални сигнали

До този момент разглеждахме електрически вериги, захранвани от постояннотокови и от синусоидални източници на напрежение. Но в повечето ситуации формата на сигнала не е нито постоянна, нито синусоидална. Форма на сигнала, която не е синусоидална, се нарича несинусоидална. Несинусоидалните сигнали имат следните характеристики:

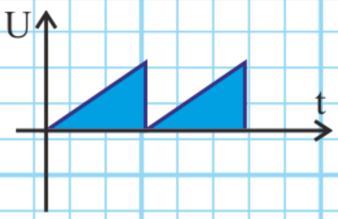
- Средната им стойност може да не е нула (сигналът може да има положително или отрицателно отместване);
- Моментната им стойност не може да бъде описана със синусоида;
- Въпреки това, сигналът е периодичен.

Типични несинусоидални сигнали са:

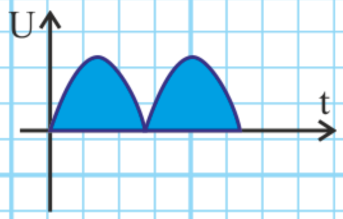


Сигнал с правоъгълна форма

Сигнал с триъгълна форма



Сигнал с трионообразна форма



Изправена синусоида

Много устройства създават несинусоидални токове и напрежения, въпреки че се захранват от синусоидални. Примери за това са токоизправителите (ще бъдат разгледани в последната тема от този курс), различните интегриращи и диференциращи вериги и т.н. В тази лекция ще се научите да анализирате такива вериги, независимо от формата на сигнала.

<u>Разлагане в ред на Фурие</u>

Всеки периодичен несинусоидален сигнал може да бъде представен като сума от синусоидални съставки с различни честоти, наричани хармоници. Получаването на тази сума се нарича разлагане в ред на Фурие.

Нека да разгледаме периодичния несинусоидален ток $i(t)$. Той може да бъде разложен в ред на Фурие по следния начин:

$$i(t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \, sin\left(\omega t + \varphi_I^{(1)}\right) + I_m^{(2)} \, sin\left(2\omega t + \varphi_I^{(2)}\right) + \cdots$$
$$= I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \, sin\left(k.\omega.t + \varphi_I^{(k)}\right)$$

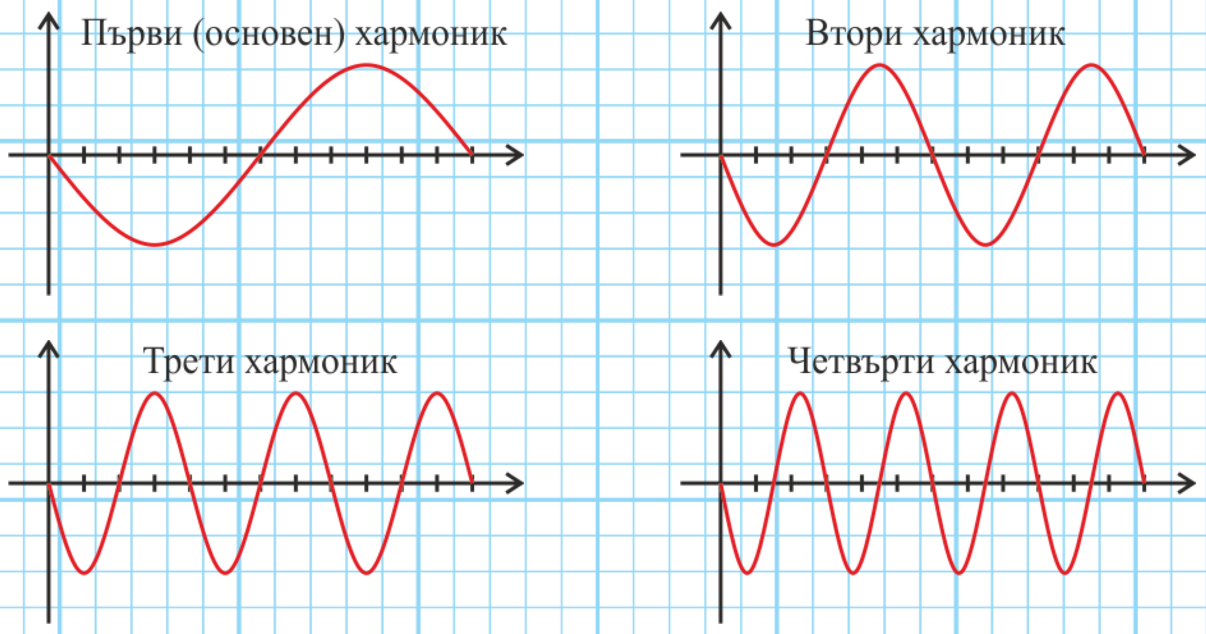
където $I^{(0)}$ е постоянната съставка, добавяща положително или отрицателно отместване;

$I_m^{(k)}$ е амплитудата на k-тия хармоник;

$\varphi_I^{(k)}$ е началната фаза на k-тия хармоник;

Първата синусоидална съставка ($I_m^{(1)}\, sin\left(\omega t + \varphi_I^{(1)}\right)$) се нарича основен (първи) хармоник, като той представлява минималната честота, необходима за представяне на съответния сигнал. Честотата на несинусоидалния сигнал е равна на честотата на първия хармоник.

Честотата на k-тия хармоник е k пъти по-голяма от честотата на основния, където k е цяло и положително числа. С други думи всички хармоници са кратни на основния. Графичната интерпретация на последното твърдения е:



Горното уравнение би могло да бъде представени по следния начин:

$$i(t) = I^{(0)} + A_1 \sin(1\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + \cdots + B_1 \cos(1\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + \cdots$$

или съкратено като:

$$i(t) = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t))$$

където A_k и B_k са константи.

Постоянната съставка представлява средната стойност на несинусоидалната величина, и може да се определи с:

$$I^{(0)} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}} I(t) dt$$

Константите A_k и B_k могат да се определят с:

$$A_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}} I(t) \sin(k\omega t)\, dt$$

$$B_k = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}} I(t)\, cos(k\omega t)\, dt$$

Горните три уравнения се отнасят за непрекъснати сигнали. В случай на дискретен сигнал $I[k]$, съдържащ N дискретни стойности, се използват:

$$I^{(0)} = \frac{\sum_{k=0}^{T} (I[k])}{N}$$

$$A_k = \frac{2 \sum_{k=0}^{T} (I[k] \sin(k\omega t))}{N}$$

$$B_k = \frac{2 \sum_{k=0}^{T} (I[k]\, cos(k\omega t))}{N}$$

Използвайки константите A_k и B_k, можем да определим амплитудата и началната фаза на хармониците с:

$$I_m^{(k)} = \sqrt{A_k{}^2 + B_k{}^2}$$

$$\varphi_I^{(k)} = arctg\,\frac{A_k}{B_k}$$

Разлагането в ред на Фурие е представено само с информационна цел. То няма да бъде използвано при анализа на несинусоидални сигнали.

Несинусоидални токове и напрежения

За да разберете смисъла на несинусоидалните токове и напрежения, ще разгледаме следния пример.

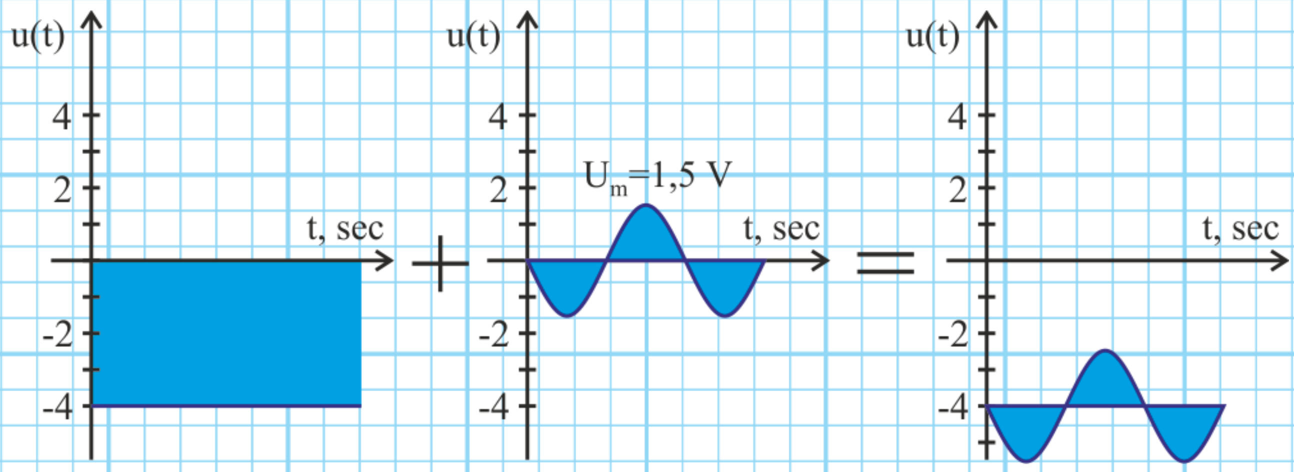
Пример: Да се скицира несинусоидалното напрежение:
$u(t) = -4 + 1{,}5\sin(\omega t)\ \ [V]$

Несинусоидалното напрежение има две съставки (два хармоника):

- Постоянна съставка $U^{(0)} = -4\ [V]$;
- Синусоидална съставка $u^{(1)}(t) = 1{,}5\sin(\omega t)\ \ [V]$;

За да скицираме напрежението, ще изпълним следното:

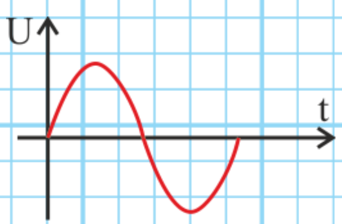
- Първо ще скицираме постоянната съставка;
- После ще скицираме синусоидалната съставка;
- Накрая ще ги съберем (графично) за да определим резултатното несинусоидално напрежение.

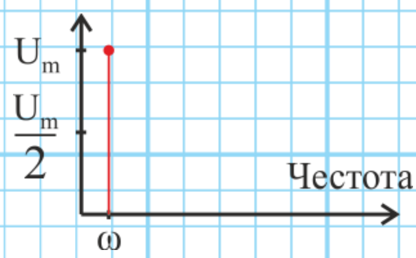


На практика всеки периодичен несинусоидален ток/напрежение може да се разложи в ред на Фурие, като сума от синусоидални съставки. Например:

- Синусоидален сигнал

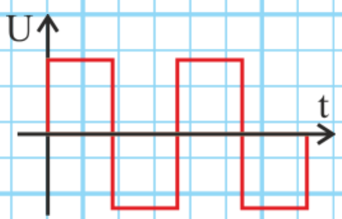
$$u(t) = U_m \sin(\omega t)$$

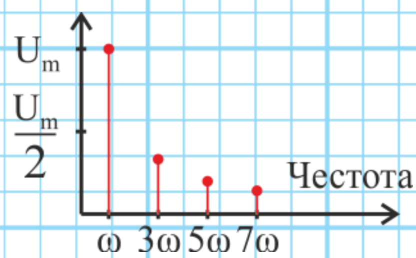




- Правоъгълен сигнал

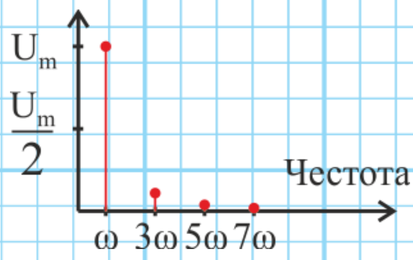
$$u(t) = U_m \sin(\omega t) + \frac{U_m}{3}\sin(3\omega t) + \frac{U_m}{5}\sin(5\omega t) + \\ + \frac{U_m}{7}\sin(7\omega t) + \cdots$$





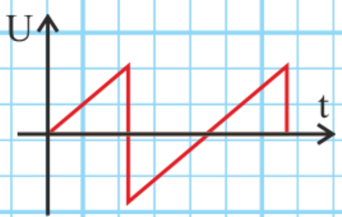
- Триъгълен сигнал

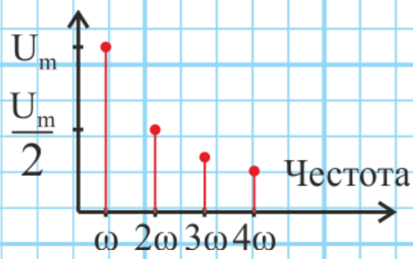
$$u(t) = U_m \sin(\omega t) - \frac{U_m}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{U_m}{5^2}\sin(5\omega t) - \\ - \frac{U_m}{7^2}\sin(7\omega t) + \cdots$$



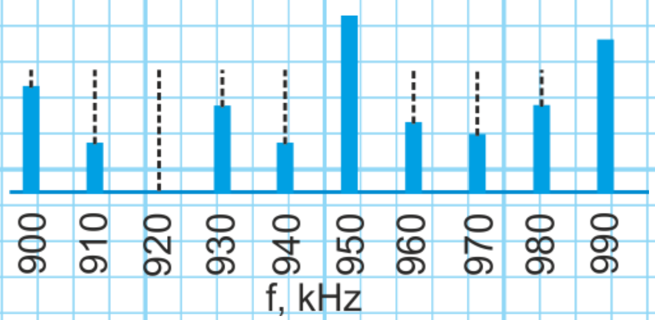
- Трионообразен сигнал

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) - \frac{U_m}{2}\sin(2\omega t) + \frac{U_m}{3}\sin(3\omega t) - \\ - \frac{U_m}{4}\sin(4\omega t) + \cdots$$





Друг пример за несинусоидално напрежение, е сигналът улавян от антената на радио или телевизионен приемник. Всеки канал се излъчва на определена честота, но тъй като антената улавя всички канали, сигналът е сумата от всички тях, т.е. - несинусоидален.



Ефективна стойност на несинусоидални токове и напрежения

Нека е даден несинусоидалният ток:

$$i(t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \sin\left(\omega t + \varphi_I^{(1)}\right) + I_m^{(2)} \sin\left(2\omega t + \varphi_I^{(2)}\right) + \cdots$$

Неговата ефективна стойност се определя съгласно:

$$\boxed{I = \sqrt{(I^{(0)})^2 + \left(\frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_m^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots}}$$

където $\frac{I_m^{(k)}}{\sqrt{2}}$ е ефективната стойност на k-тия хармоник, а $I_m^{(k)}$ – амплитудната стойност на k-тия хармоник. По аналогичен начин се определя ефективната стойност на напреженията в несинусоидалните вериги.

Пример: Да се определи ефективната стойност на несинусоидалното напрежение:

$$u_1(t) = 10 + 2\sin(\omega t) + 7\sin(3\omega t) + 11\sin(5\omega t) + \\ +3\sin(7\omega t) + 5\sin(9\omega t)\ \ [V]$$

Решение:

$$U_1 = \sqrt{(10)^2 + \frac{(2)^2 + (7)^2 + (11)^2 + (3)^2 + (5)^2}{2}} = 14{,}28\ [V]$$

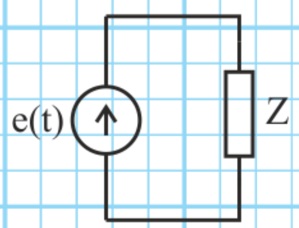
Анализ на вериги при установен несинусоидален режим

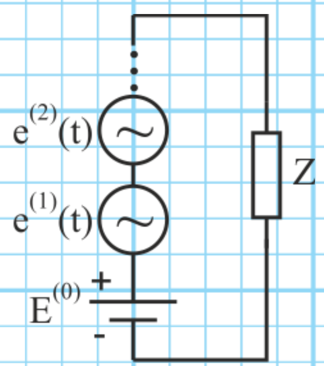
Принцип на наслагването

Нека несинусоидален източник на напрежение захранва товар Z, като моментна стойност на източника е:

$$e(t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \sin\left(\omega t + \varphi_E^{(1)}\right) + E_m^{(2)} \sin\left(2\omega t + \varphi_E^{(2)}\right) + \cdots$$
$$= E^{(0)} + e^{(1)}(t) + e^{(2)}(t) + \cdots$$

Тъй като имаме $e(t) = E^{(0)} + e^{(1)}(t) + e^{(2)}(t) + \cdots$, а знаем че източниците на напрежение се сумират когато са свързани последователно, можем да съставим еквивалентна заместваща схема, където всяка хармонична съставка е отделен източник:





Тъй като веригата е линейна, можем да приложим принципа на наслагването (теоремата за суперпозицията), т.е. да анализираме веригата за всеки източник по отделно. Важат същите правила, както и при постояннотоковите вериги - когато анализираме веригата за даден източник, всички други източници се премахват, като:

- Източниците на напрежение се заменят с късо съединение;

- Източниците на ток се заменят с прекъсната верига.

Съгласно принципа на наслагването, всеки източник ще създаде някакъв ток във веригата, като общия ток ще бъде сума от въздействията на отделните източници, т.е.:

$$i(t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \sin\left(\omega t + \varphi_I^{(1)}\right) + I_m^{(2)} \sin\left(2\omega t + \varphi_I^{(2)}\right) + \cdots$$

Следователно анализът на линейни несинусоидални вериги се свежда до прилагане на принципа на наслагването и анализ на веригата за всеки хармоник по отделно.

Реактивни съпротивления

Друго важно нещо в несинусоидалните вериги е това, че различните хармоници имат различни честоти. Знаем, че реактивните съпротивления на бобини и кондензатори зависят от честотата на сигнала, т.е. те няма да са едни и същи за отделните хармоници.

Нека отново разгледаме горната схема, при която товарът $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ се захранва от източник:

$$e(t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \sin\left(\omega t + \varphi_E^{(1)}\right) + E_m^{(2)} \sin\left(2\omega t + \varphi_E^{(2)}\right) + \cdots$$

Постоянна съставка $\boldsymbol{E^{(0)}}$

Знаем, че при постоянни токове и напрежения бобината е късо съединение, а кондензатора – прекъсната верига. С други думи техните съпротивления ще бъдат:

$$X_L^{(0)} = \omega L = 0.L = 0 \qquad X_C^{(0)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{0.C} = \infty$$

Първи хармоник $E_m^{(1)} \sin\left(\omega t + \varphi_E^{(1)}\right)$

Честотата на първия хармоник е ω, т.е. съпротивленията на бобината и кондензатора са:

$$X_L^{(1)} = \omega L \qquad X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C}$$

Втори хармоник $E_m^{(2)} \sin\left(2\omega t + \varphi_E^{(2)}\right)$

Честотата на втория хармоник е 2ω, т.е. съпротивленията на бобината и кондензатора са:

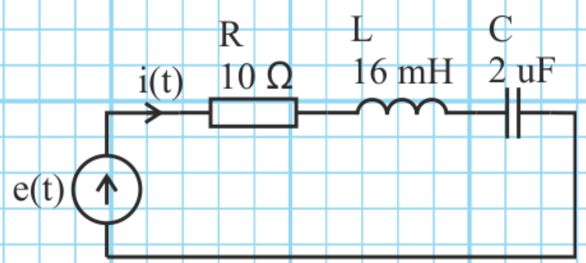
$$X_L^{(2)} = 2\omega L \qquad X_C^{(2)} = \frac{1}{2\omega C}$$

k-ти хармоник $E_m^{(k)} \sin\left(k\omega t + \varphi_E^{(k)}\right)$

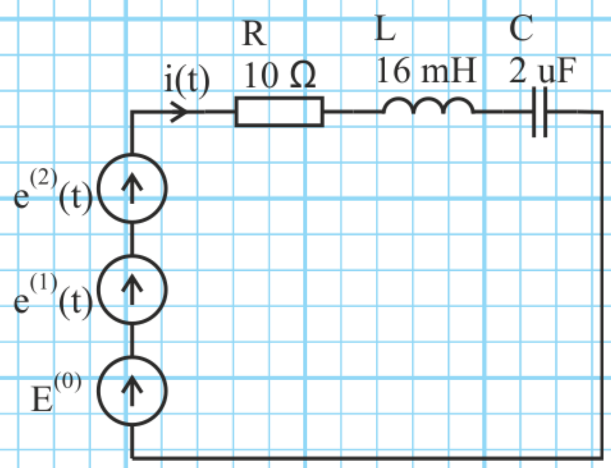
Честотата на k-тия хармоник е $k\omega$, т.е. съпротивленията на бобината и кондензатора са:

$$\boxed{\mathrm{X}_\mathrm{L}^{(k)} = k\omega\mathrm{L} \qquad \mathrm{X}_\mathrm{C}^{(k)} = \frac{1}{k\omega\mathrm{C}}}$$

Пример: Да се определят моментната и ефективната стойност на тока във веригата, ако несинусоидалният източник е зададен с $e(t) = 100 + 25.\sin(\omega t + 10°) + 5.\sin(2\omega t)$, а честотата на основния хармоник е $f = 10\ kHz$.



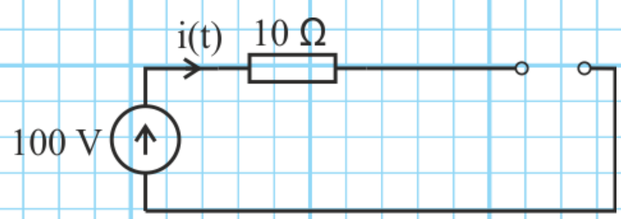
Ще създадем еквивалентна заместваща схема, с три източника:



Сега ще приложим принципа на наслагването, като анализираме задачата за всеки източник по отделно.

Постоянна съставка

Напрежението на източника е $E^{(0)} = 100\ [V]$. Знаем, че при постоянен ток, бобината е късо съединение, а кондензатора – прекъсва веригата. Следователно еквивалентната заместваща схема за постоянната съставка е:



Вижда се, че веригата е прекъсната, т.е. ток не тече. Следователно токът, дължащ се на постоянната съставка е:

$$I^{(0)} = 0\ [A]$$

Първи нархмоник

Напрежението на източника за първия хармоник е:

$$e^{(1)}(t) = 25.\sin(\omega t + 10°) \ [V]$$

Записваме го в комплексна форма:

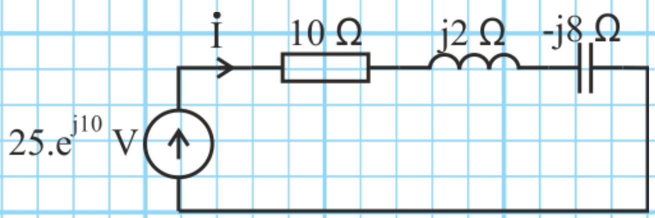
$$\dot{E} = 25.e^{j10} \ [V]$$

Ъгловата честота за първия хармоник е $\omega = 2\pi f \ [s^{-1}]$, т.е. индуктивното и капацитивното съпротивления са:

$$X_L^{(1)} = \omega L = 2\pi f L = 2\pi 10^4.32.10^{-6} = 2 \ [\Omega]$$

$$X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi 10^4.2.10^{-6}} = 8 \ [\Omega]$$

Сега можем да създадем еквивалентна заместваща схема:



Записваме уравнение по ВЗК и определяме тока:

$$\dot{E} = 10\dot{I} + j2\dot{I} - j8\dot{I}$$

$$\rightarrow \quad \dot{I} = \frac{25.e^{j10°}}{10 + j2 - j8} = \frac{25.e^{j10°}}{11{,}6.e^{-j30{,}1}} = 2{,}16.e^{j40{,}1} \ [A]$$

В синусоидална форма:

$$i^{(1)}(t) = 2{,}16 \sin(\omega t + 40{,}1°) \ [A]$$

Втори хармоник

Напрежението на източника за втория хармоник е:

$$e^{(2)}(t) = 5.\sin(2\omega t) \ \ [V]$$

Записваме го в комплексна форма:

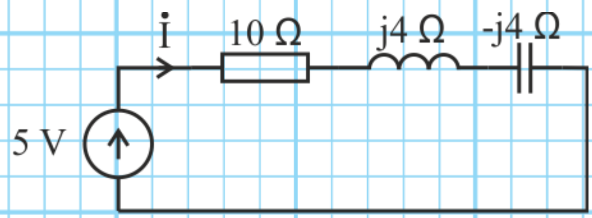
$$\dot{E} = 5.e^{j0} = 5 \ [V]$$

Ъгловата честота за втория хармоник е $2\omega = 2(2\pi f)\ [s^{-1}]$, т.е. индуктивното и капацитивното съпротивления са:

$$X_L^{(2)} = 2\omega L = 2\pi f L = 4\pi 10^4.32.10^{-6} = 4\ [\Omega]$$

$$X_C^{(2)} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{1}{2(2\pi f)C} = \frac{1}{4\pi 10^4.2.10^{-6}} = 4\ [\Omega]$$

Създаваме еквивалентна заместваща схема:



Определяме тока във веригата от ВЗК:

$$\dot{I} = \frac{5}{10 + j4 - j4} = \frac{5}{10} = 0{,}5\ [A]$$

В синусоидална форма:

$$i^{(2)}(t) = 0{,}5\sin(2\omega t) \ \ [A]$$

Прилагаме принципа на наслагването и определяме общия ток във веригата:

$$i(t) = I^{(0)} + i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) =$$
$$= 0 + 2{,}16\sin(\omega t + 40{,}1°) + 0{,}5\sin(2\omega t) \ \ [A]$$

За ефективната стойност на тока се получава:

$$I = \sqrt{(I^{(0)})^2 + \frac{\left(I_m^{(1)}\right)^2 + \left(I_m^{(2)}\right)^2}{2}} = \sqrt{0 + \frac{(2,16)^2 + (0,5)^2}{2}} =$$
$$= 1,57\ [A]$$

Мощности в несинусоидални вериги

Активна мощност

Като следствие от принципа на наслагването, общата консумирана мощност в несинусоидална верига може да се определи съгласно:

$$\boxed{P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + \cdots}$$

където $P^{(0)}$ е мощността, консумирана в следствие на постоянната съставка;

$P^{(1)}$, $P^{(2)}$, и т.н. са активната мощност, консумирана от всеки хармоник.

Следователно за активната мощност в несинусоидална верига можем да запишем:

$$P = U^{(0)}.I^{(0)} + U^{(1)}.I^{(1)}.cos\,\varphi^{(1)} + U^{(2)}.I^{(2)}.cos\,\varphi^{(2)} + \cdots$$

където $U^{(k)}$ и $I^{(k)}$ са ефективните стойности на тока и напрежението на k-тия хармоник;

$\varphi^{(k)}$ е началната фаза на k-тия хармоник.

Реактивна мощност

По аналогичен начин реактивната мощност може да се определи като сума от реактивните мощности на всеки хармоник:

$$\boxed{Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} + \cdots}$$

или

$$Q = U^{(1)}.I^{(1)}.\sin\varphi^{(1)} + U^{(2)}.I^{(2)}.\sin\varphi^{(2)} + \cdots$$

Пълна мощност

Пълната мощност на несинусоидална верига се определя с:

$$S = U.I = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \frac{\left(U_m^{(1)}\right)^2 + \left(U_m^{(2)}\right)^2 + \cdots}{2}}.$$

$$.\sqrt{(I^{(0)})^2 + \frac{\left(I_m^{(1)}\right)^2 + \left(I_m^{(2)}\right)^2 + \cdots}{2}}$$

Забележете, че за несинусоидални вериги пълната мощност не може да бъде определена чрез активната и реактивната, и в общия случай е изпълнено:

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$