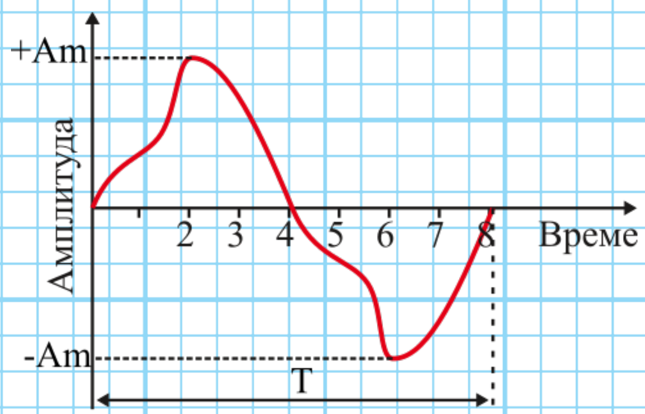
Синусоидални електрически вериги

Променливотокови (AC) вериги

Основни понятия

В променливотоковите вериги действат променливотокови сигнали. Това са такива токове и напрежения, които се изменят както по големина, така и по посока.



Формата на сигнала се характеризира с няколко величини:

- **Периодът** (T) е най-краткият интервал от време за който сигналът се повтаря. Мерната единица за период е секунди [*s*];
- **Честотата** (f) е броят повторения на сигнала за една секунда:

$$f = \frac{1}{T}$$

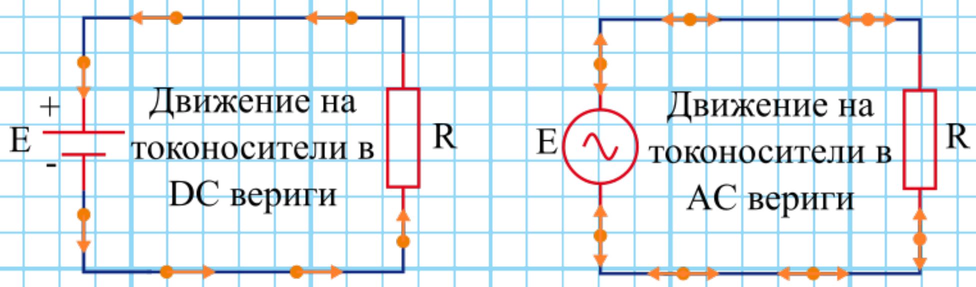
Мерната единица за честота е Херц [*Hz*].

- **Амплитудата** [A_m] е пиковата стойност на сигнала. Мерната единица зависи от типа на величината: за токове е Ампер, а за напрежение – Волт.

Съществуват няколко фундаментални разлики между постоянният (DC) и променливият (AC) ток:

Посока на тока

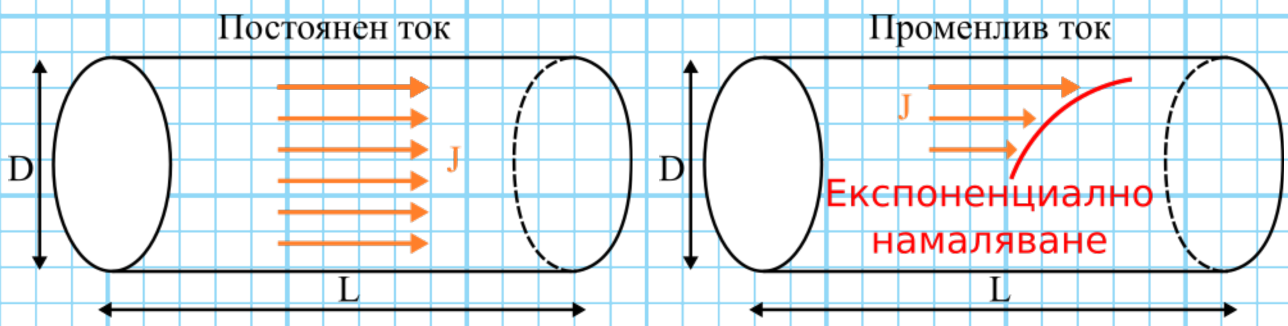
- В постояннотоковите вериги токът тече винаги в една и съща посока - от плюс към минус, т.е. електроните се движат от минус към плюс и обикалят цялата верига;
- В променливоковите вериги посоката на движение на електрическите заряди се изменя във времето. Казано с други думи токоносителите трептят около началната си позиция, като непрекъснато променят посоката си на движение.



Повърхностен ефект

- В постояннотоковите вериги плътността на тока е еднаква в целия обем на проводника;
- В променливотоковите вериги плътността на токоносителите намалява експоненциално в дълбочина на проводника. Това означава, че

съпротивлението на един проводник при DC и AC режим не е едно и също.



Повърхностния ефект оказва влияние при много високи честоти, поради което няма да бъде разглеждан подробно в рамките на тази дисциплина.

Синусоидални сигнали

Най-често използваната форма на сигнала е синусоидална. Нека $A(t)$ е синусоида, зададена с:

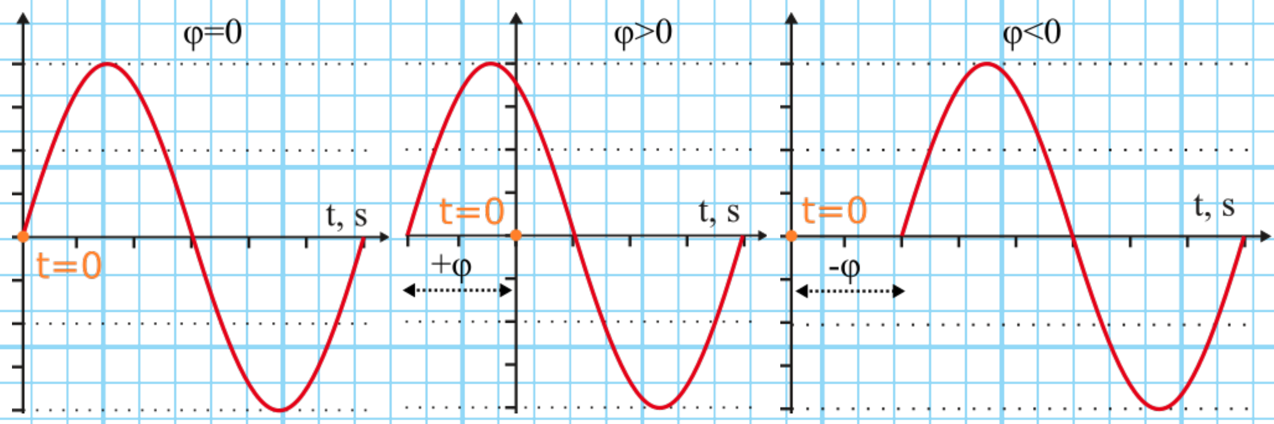
$$A(t) = A_m . \sin(\omega t + \varphi_A)$$

където A_m е амплитудата на синусоидата;

$\omega = 2.\pi.f$ е ъгловата честота на сигнала. Тя се измерва в радиани за секунда [$rad.s^{-1}$];

φ_A е началната фаза на синусоидата, измервана в радиани или градуси. Началната фаза показва отместването на синусоидата от нулевия момент $t=0$.

Когато $\varphi_A = 0$, казваме че синусоидата е с нулева начална фаза. Когато $\varphi_A > 0$ или $\varphi_A < 0$, синусоидата съответно избързва или закъснява спрямо нулата.



$A(t) = A_m \sin(\omega t)$ $A(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ $A(t) = A_m \sin(\omega t - \varphi)$

Нека са дадени токът и напрежението на даден клон от веригата:

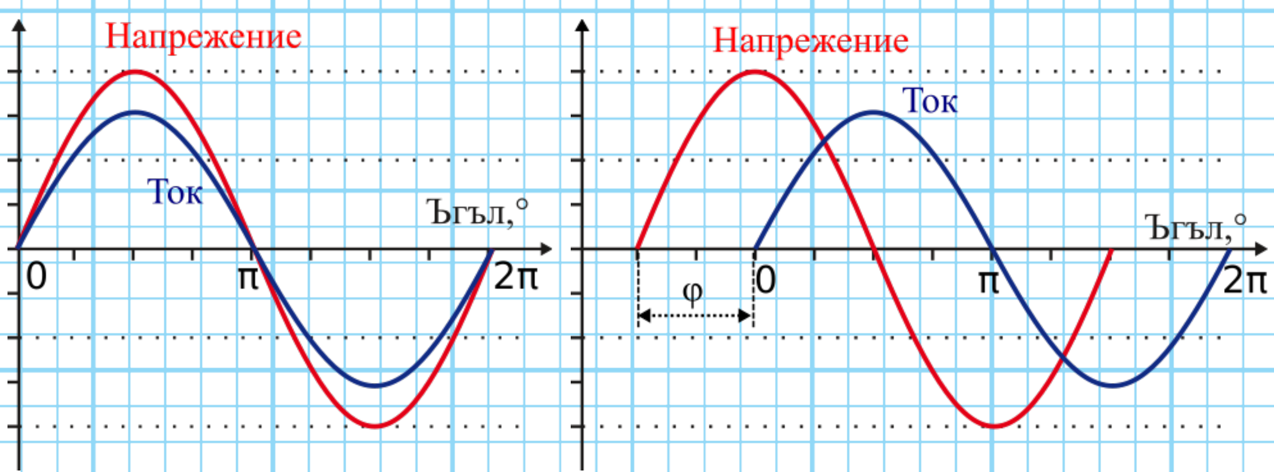
$$u(t) = U_m . \sin(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = I_m . \sin(\omega t + \varphi_i)$$

където φ_u и φ_i са началните им фази.

Разликата φ_u-φ_i се нарича **фазова разлика**:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

В случай, че $\varphi=0$, токът и напрежението са **във фаза**.



Тока и напрежението са във фаза ($\varphi=0$)

Фазовата разлика е различна от нула ($\varphi<>0$)

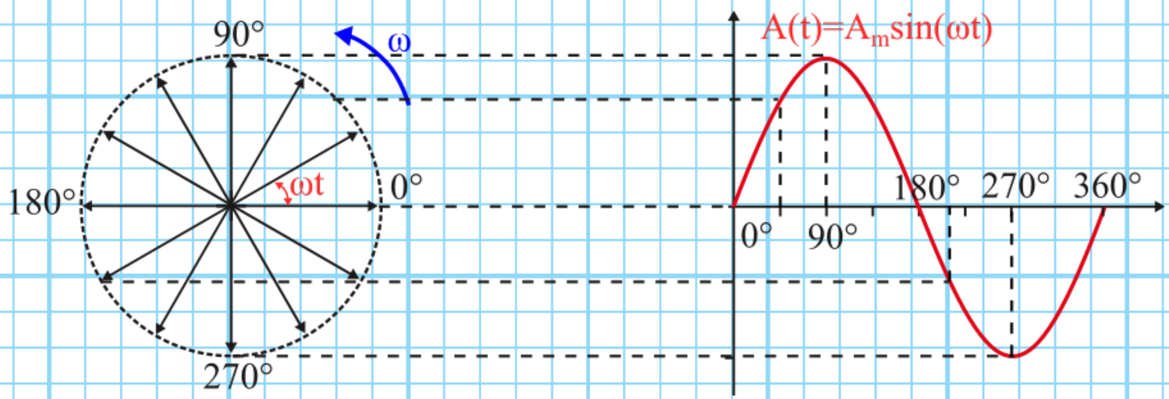
Ако $\varphi>0$ токът изостава от напрежението с φ градуса;

Ако $\varphi<0$ напрежението изостава от тока с φ *градуса.*

Комплексен образ на синусоида

Синусоидата като вектор

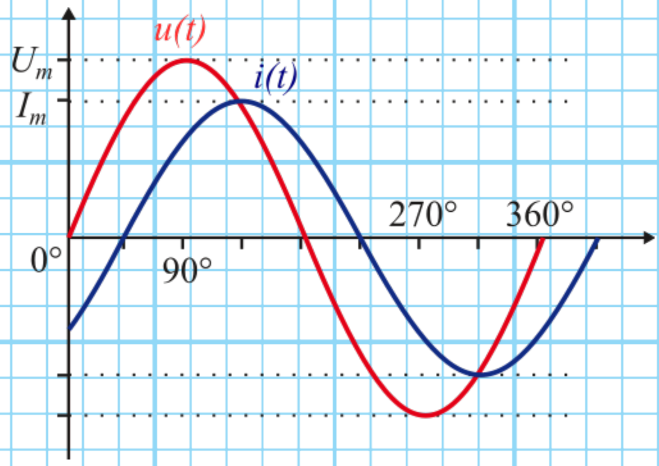
Синусоидата $A(t)=A_m.\sin(\omega t+\varphi_A)$ може да се представи като вектор, който се върти в посока обратна на часовниковата, с ъглова скорост ωt.



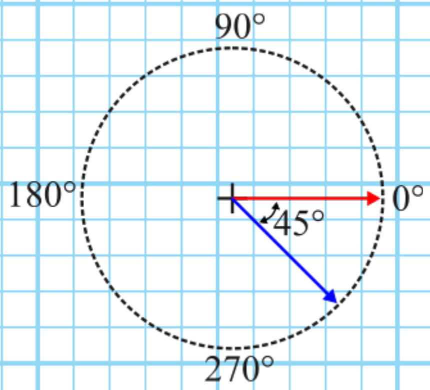
- В момент от времето $t=0$, векторът е завъртян на ъгъл *0*°;
- Когато $A(t)$ има максимум ($+A_m$), векторът е завъртян на *90*°;
- Когато $A(t)$ има минимум ($-A_m$) – векторът е завъртян на -*90*° (*270*°).

Нека токът и напрежението на даден участък от веригата са:

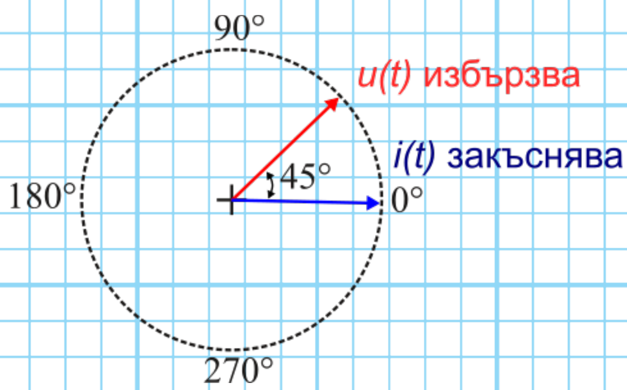
$$u(t)=U_m.\sin(\omega t) \qquad i(t)=I_m.\sin(\omega t-45°)$$



Токът закъснява от напрежението с $\varphi=45°$. Тогава векторите на двете синусоиди за момент от времето $t=0$ ще бъдат:



Във времето двата вектора ще се въртят заедно с една и съща ъглова честота ω, като токът ще продължава да изостава от напрежението на същият ъгъл *45°*.



Комплексен образ на синусоида

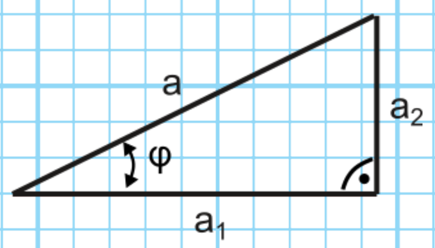
Синусоидата $A(t)=A_m.sin(\omega t+ \varphi_A)$ може да се представи в комплексна форма по следния начин:

$$\dot{A}_m = A_m . e^{j\varphi_A} = A_m \cos(\varphi_A) + j A_m \sin(\varphi_A)$$

Последното уравнение е следствие от формулата на Ойлер:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

Комплексните числа описват правоъгълен триъгълник, като съществуват няколко форми за записването им:



- Алгебрична форма:

$$\dot{A} = a_1 + j a_2$$

- Експоненциална (показателна) форма:

$$\dot{A} = a . e^{j\varphi}$$

- Полярна форма:

$$\dot{A} = a \angle \varphi$$

Преминаване от алгебрична в експоненциална/полярна форма

Нека е дадено комплексното число $\dot{A}=a_1+ja_2$, където a_1 и a_2 са двата катета на правоъгълния триъгълник. Хипотенузата a и ъгълът φ могат да бъдат определи с:

$$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2} \qquad \varphi=arctg\frac{a_2}{a_1}$$

$$\dot{A}=a.e^{j\varphi}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.e^{jarctg\frac{a_2}{a_1}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\angle arctg\frac{a_2}{a_1}$$

Следва да се отбележи, че ако реалната част a_1 е отрицателна, следва първо да се извади минус (–) пред скоби и едва след това да се представи в експоненциална/полярна форма:

$$\dot{A}=a_1+ja_2=-(-a_1-ja_2)=-\sqrt{a_1^2+a_2^2}.e^{j.arctg\frac{-a_2}{-a_1}}$$

Преминаване от експоненциална/полярна в алгебрична форма

Нека е дадено комплексно число в експоненциална форма $\dot{A}=a.e^{j\varphi}$. Двата катета на правоъгълния триъгълник могат да бъдат намерени чрез формулата на Ойлер:

$$\dot{A}=a.e^{j\varphi}=a.\cos(\varphi)+ja.\sin(\varphi)=a_1+ja_2$$

Пример: Да се представят следните синусоидални напрежения в комплексна форма:

$$u_1(t)=6.\sin(\omega t+60°)[V] \qquad u_2(t)=-6.\sin(\omega t+30°)[V]$$

Можем да ги представим в експоненциална и полярна форма по следния начин:

$$\dot{U}_1=6.e^{j60°}=6\angle 60°[V] \qquad \dot{U}_2=-6.e^{j30°}=-6\angle 30°[V]$$

Прилагаме формулата на Ойлер, за да ги представим в комплексна алгебрична форма:

$$\dot{U}_1=6.e^{j60°}=6\cos(60°)+j6\sin(60°)=3+j5{,}20[V]$$

$$\dot{U}_2=-6.e^{j30°}=-6\cos(30°)-j6\sin(30°)=-5{,}20-j3[V]$$

Пример: Да се определят синусоидите, съответстващи на следните комплексни напрежения:

$$\dot{U}_1=2+j5[V] \qquad \dot{U}_2=-5+j1[V]$$

Първо ще ги преобразуваме в експоненциална форма:

$$\dot{U}_1=2+j5=\sqrt{2^2+5^2}.e^{j\,arctg\left(\frac{5}{2}\right)}=5{,}34\,e^{j68{,}2°}[V]$$

$$\dot{U}_2=-5+j1=-(5-j1)=-\sqrt{5^2+1^2}.e^{j\,arctg\left(\frac{-1}{5}\right)}=5{,}1\,e^{-j11{,}3°}[V]$$

Вече можем да ги запишем като синусоиди:

$$u_1(t)=5{,}34\sin(\omega t+68{,}2°)[V] \qquad u_2(t)=5{,}1\sin(\omega t-11{,}3°)[V]$$

Събиране/изваждане на комплексни числа:

Нека са дадени комплексните числа в алгебрична форма $A=a_1+ja_2$ и $B=b_1+jb_2$:

$$A \pm B = (a_1 + j a_2) \pm (b_1 + j b_2) = (a_1 \pm b_1) + j (a_2 \pm b_2)$$

Умножение на комплексни числа:

Ако комплексните числа са дадени в алгебрична форма ($A = a_1 + j a_2$ и $B = b_1 + j b_2$) можем да ги умножим, като разкрием скобите:

$$A . B = (a_1 + j a_2) . (b_1 + j b_2) = a_1 b_1 + j a_2 b_1 + j a_1 b_2 - a_2 b_2 = \\ = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + j (a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

Ако комплексните числа са дадени в експоненциална форма ($A = a . e^{j \varphi_a}$ и $B = b . e^{j \varphi_b}$), е в сила:

$$A . B = a . e^{j \varphi_a} . b . e^{j \varphi_b} = a . b . e^{j (\varphi_a + \varphi_b)}$$

Деление на комплексни числа:

Ако комплексните числа са дадени в алгебрична форма ($A = a_1 + j a_2$ и $B = b_1 + j b_2$) може да се използва комплексно-спрегнатата стойност на знаменателя:

$$\frac{A}{B} = \frac{a_1 + j a_2}{b_1 + j b_2} = \frac{a_1 + j a_2}{b_1 + j b_2} . \frac{b_1 - j b_2}{b_1 - j b_2} = \frac{(a_1 b_1 - a_2 b_2) + j (a_2 b_1 + a_1 b_2)}{b_1^2 + j b_1 b_2 - j b_1 b_2 + b_2^2} = \\ = \frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2}$$

Ако комплексните числа са дадени с техните експоненциални форми ($A = a . e^{j \varphi_a}$ и $B = b . e^{j \varphi_b}$), е в сила:

$$\frac{A}{B} = \frac{a . e^{j \varphi_a}}{b . e^{j \varphi_b}} = \frac{a}{b} . e^{j (\varphi_a - \varphi_b)}$$

Пасивни елементи при установен синусоидален режим

Резистори при синусоидални токове и напрежения

Нека през идеален резистор тече синусоидален ток с нулева начална фаза ($\varphi_i=0$):

$$i_R(t)=I_m.\sin(\omega t+0°)$$

Съгласно закона на Ом, падът на напрежението върху резистора е:

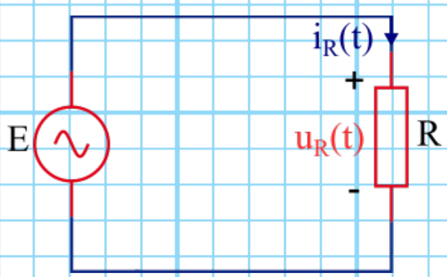
$$u_R(t)=R.i_R(t)=R.I_m.\sin(\omega t+0°)$$

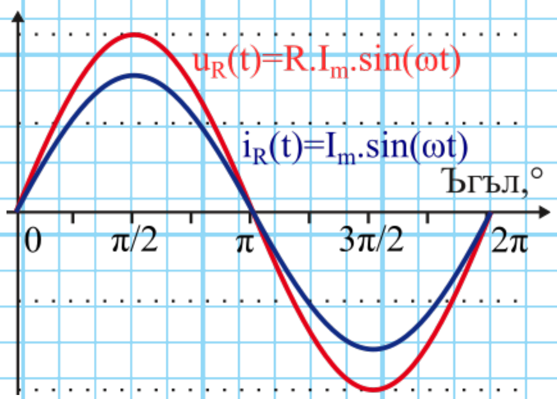
Получената зависимост показва няколко неща:

- Фазовата разлика е:

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=0-0=0°$$

- Токът и напрежението на резистора са във фаза.





Бобини при синусоидални токове и напрежения

Нека през идеална бобина тече синусоидален ток с нулева начална фаза ($\varphi_i=0$):

$$i_L(t)=I_m.\sin(\omega t)$$

Падът на напрежението върху бобината е:

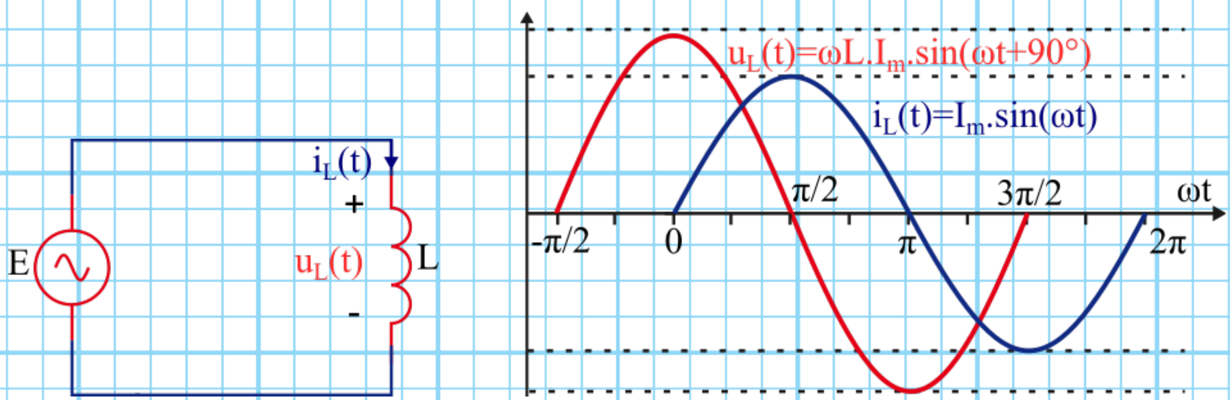
$$u_L(t)=L.\frac{d\,i_L(t)}{dt}=L.\frac{d(I_m.\sin(\omega t))}{dt}=\omega L.I_m.\cos(\omega t)=$$
$$=\omega L.I_m.\sin(\omega t+90°)$$

Получената зависимост показва няколко неща:

- Фазовата разлика за бобина е:

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=90°-0°=90°$$

- Напрежението $u_L(t)$ изпреварва тока $i_L(t)$ с *90°*;
- Съпротивлението на бобината при синусоидални токове и напрежения е ωL.



<u>Кондензатори при синусоидални токове и напрежения</u>

Нека през идеален кондензатор тече синусоидален ток с нулева начална фаза ($\varphi_i=0$):

$$i_C(t)=I_m.\sin(\omega t)$$

Тогава падът на напрежението върху кондензатора е:

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int i_C(t)\,dt=\frac{1}{C}\int I_m.\sin(\omega t)\,dt=-\frac{1}{\omega C}I_m\cos(\omega t)=$$

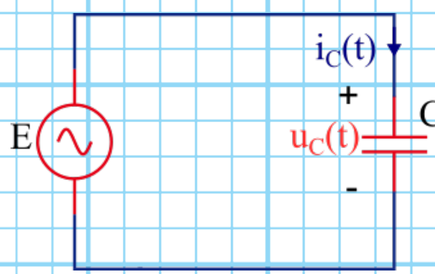
$$=-\frac{1}{\omega C}I_m.\sin(\omega t+90°)=\frac{1}{\omega C}I_m.\sin(\omega t-90)$$

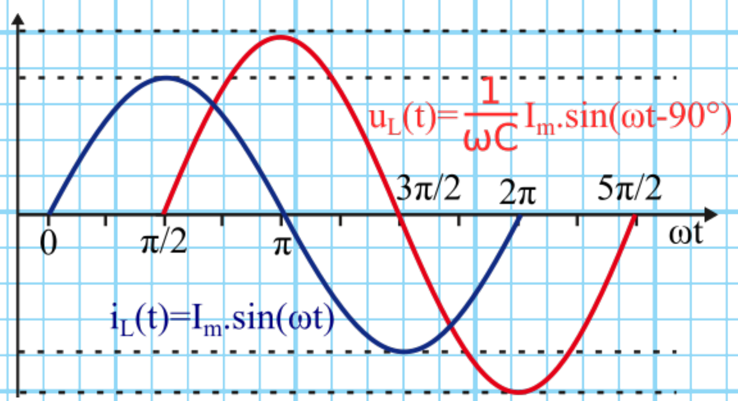
Получената зависимост показва няколко неща:

- Фазовата разлика е:

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=-90°-0°=-90°$$

- Напрежението $u_C(t)$ закъснява от тока $i_C(t)$ с *90°*;
- Съпротивлението на кондензатора при синусоидални токове и напрежения е $\frac{1}{\omega C}$.





<u>Последователна RL верига</u>

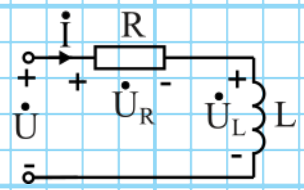
Нека последователна RL верига се захранва от синусоидален източник на напрежение $u(t)$, който създава следния ток:

$$i(t)=I_m.\sin(\omega t)$$

Вече знаем, че падовете на напрежение върху бобината и резистора са съответно:

$$u_R(t)=R.I_m.\sin(\omega t) \qquad u_L(t)=\omega L.I_m.\sin(\omega t+90°)$$

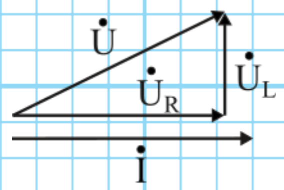
Горните синусоиди могат да бъдат представени в комплексна форма:



$$\dot{I}=I_m e^{j0}=I_m$$

$$\dot{U}_R=R.I_m.e^{j0}=R.\dot{I} \qquad \dot{U}_L=\omega L.I_m e^{j90°}=X_L.\dot{I}.e^{j90°}$$

Ако начертаем горните вектори, се получава следната векторна диаграма:



От векторната диаграма се вижда, че:

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L=\dot{I}\left(R+X_L e^{j90°}\right)=\dot{I}\left(R+jX_L\right)$$

В последното уравнение, може да се докаже, че $e^{j90°}=j$, като се приложи формулата на Ойлер.

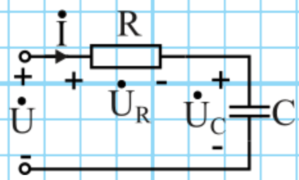
Величината ωL е индуктивното съпротивление (реактанс) на бобината, а $jX_L=j\omega L$ е комплексното и съпротивление. И двете се измерват в Омове.

<u>Последователна RC верига</u>

Нека последователна RC верига се захранва от синусоидален източник $u(t)$, който създава ток $i(t)=I_m.\sin(\omega t)$. Падовете на напрежение във веригата са:

$$u_R(t)=R.I_m.\sin(\omega t) \qquad u_C(t)=\frac{1}{\omega C}.I_m.\sin(\omega t-90)$$

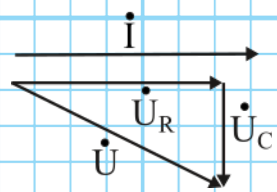
Токовете и напреженията, в комплексна форма, са:



$$\dot{I}=I_m e^{j0}=I_m$$

$$\dot{U}_R=R.I.e^{j0}=R.\dot{I} \qquad \dot{U}_C=\frac{1}{\omega C}.I_m.e^{-j90°}=X_C.\dot{I}.e^{-j90°}$$

Следователно векторната диаграма има следния вид:



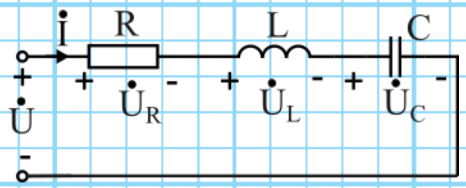
С други думи, като сумираме векторите, получаваме:

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_C=\dot{I}\left(R+X_C e^{-j90°}\right)=\dot{I}\left(R-jX_C\right)$$

Величината $\frac{1}{\omega C}$ се нарича капацитивно съпротивление (реактанс), а $-jX_C=-j\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{j\omega C}$ е комплексното съпротивление на кондензатора, измервани отново в Омове.

Последователна RLC верига

Нека последователна RLC верига се захранва от синусоидален източник на напрежение, който създава ток $i(t)=I_m.\sin(\omega t)$. Следователно комплексните токове и напрежения във веригата са:

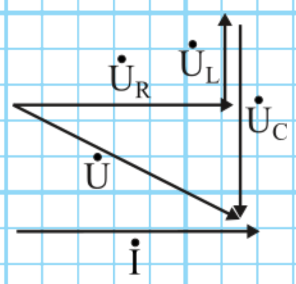


$$\dot{I}=I_m e^{j0}=I_m \qquad \dot{U}_R=\dot{I}\,R \qquad \dot{U}_L=\omega L.\dot{I}.e^{j90°}=X_L.\dot{I}.e^{j90°}$$

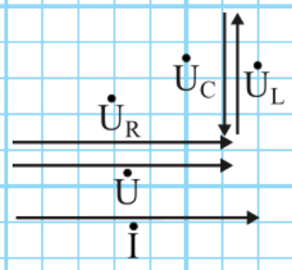
$$\dot{U}_C=\frac{1}{\omega C}\dot{I}.e^{-j90°}=X_C.\dot{I}.e^{-j90°}$$

Векторната диаграма на веригата може да изглежда по три начина, в зависимост от големините на X_L и X_C:

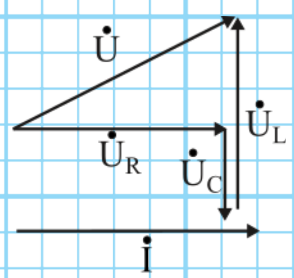
- При $\dfrac{1}{\omega C}>\omega L$:



- При $\dfrac{1}{\omega C}=\omega L$:



- При $\dfrac{1}{\omega C}<\omega L$:



Можем да обобщим горните зависимости със следното уравнение:

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=\dot{I}\left(R+jX_L-jX_C\right)=\dot{I}\left(R+jX\right)=Z.\dot{I}$$

където $Z=R+jX$ е комплексното съпротивление на последователна RLC верига в Омове.

Получената зависимост представлява ВЗК в комплексна форма. Ситуацията при която $\frac{1}{\omega C}=\omega L$ се нарича резонанс на напреженията и ще бъде разгледана по-подробно в рамките на този курс.

<u>Получените зависимост показват няколко неща:</u>

- Комплексното съпротивление има две съставки – активна R и реактивна $X=X_L\text{-}X_C$;
- Реактивното съпротивлението на бобината е положително, а на кондензатора – отрицателно.

<u>Паралелна RLC верига</u>

Нека паралелна RLC верига се захранва от синусоидален източник на напрежение $u(t)=U_m.\sin(\omega t)$. Токовете през трите елемента са:

$$i_R(t)=\frac{u(t)}{R}=G.u(t)=G.U_m.\sin(\omega t)$$

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int u(t)\,dt=\frac{1}{\omega L}U_m.\sin(\omega t-90°)$$

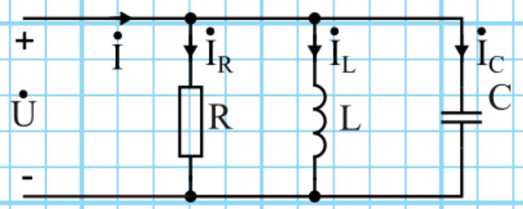
$$i_C(t)=C\frac{du(t)}{dt}=\omega C.U_m\sin(\omega t+90°)$$

където $G=\dfrac{1}{R}$ е проводимостта на резистора в Симесни, $[S]$;

$B_L=\dfrac{1}{\omega L}$ е реактивната проводимостта на бобината в Сименси, $[S]$;

$B_C=\omega C$ е реактивната проводимостта на кондензатора в Сименси, $[S]$.

В комплексна форма токовете и напреженията са:

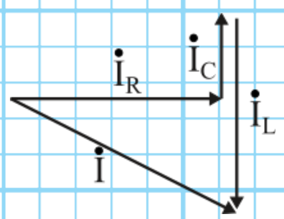


$$\dot{U}=U_m e^{j0}=U_m \qquad \dot{I}_R=G.\dot{U}$$

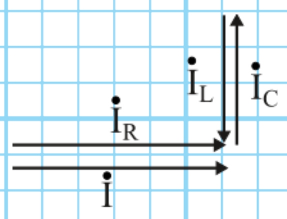
$$\dot{I}_L=\frac{1}{\omega L}\dot{U}\,e^{-j90^\circ}=B_L\dot{U}\,e^{-j90^\circ} \qquad \dot{I}_C=\omega C.\dot{U}\,e^{j90^\circ}=B_C\dot{U}\,e^{j90^\circ}$$

В зависимост от големините на B_L и B_C, векторната диаграма може да изглежда по три начина:

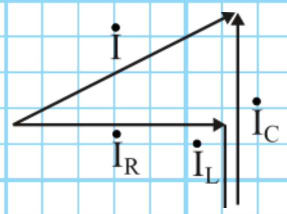
- Ако $\omega C<\dfrac{1}{\omega L}$:



- Ако $\omega C = \dfrac{1}{\omega L}$:



- Ако $\omega C > \dfrac{1}{\omega L}$:



Общият ток във веригата е:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U}\left(G - j\left(B_L - B_C\right)\right) = \dot{U}\left(G - jB\right) = Y.\dot{U}$$

където $Y{=}G{-}jB$ е комплексната проводимост на веригата в Сименси, [S].

Получената зависимост представлява ПЗК в комплексна форма. Ситуацията при която $\omega C = \dfrac{1}{\omega L}$ се нарича резонанс на токовете и ще бъде разгледана по-подробно в рамките на курса.

Получените зависимост показват няколко неща:

- Комплексната проводимост има две съставки – активна G и реактивна $B{=}B_L{-}B_C$;
- Проводимостта на бобината е отрицателна, а на кондензатора – положителна.

Основни закони в синусоидални вериги

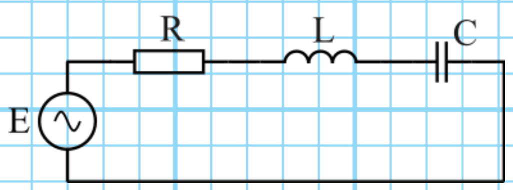
В този раздел ще дефинираме и обобщим понятията и зависимостите, които вече установихме в предходния.

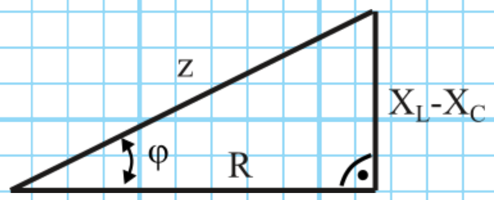
Съпротивления в синусоидални вериги

Както вече установихме, комплексното съпротивление на една последователна RLC верига е:

$$Z=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=R+j\left(X_L-X_C\right)=R+jX$$

където активното съпротивление R и реактивното съпротивление $X=\omega L-\frac{1}{\omega C}$ са двата катета на правоъгълен триъгълник.





Комплексното съпротивление може да се запише и в експоненциална форма като:

$$Z=z.e^{j\varphi}$$

където $z=\sqrt{R^2+X^2}$ е пълното съпротивление (импеданса) на веригата, а $\varphi=arctg\frac{X}{R}$ е ъгълът на фазовата разлика.

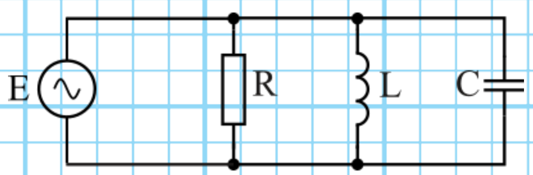
Всички съпротивления се измерват в Омове.

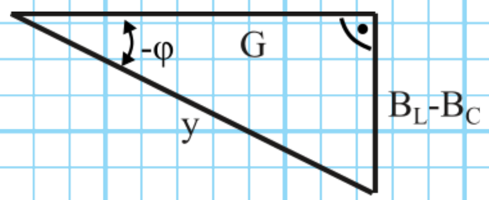
Проводимости в синусоидални вериги

Вече установихме, че комплексната проводимост е:

$$Y=\frac{1}{R}-j\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)=G-j\left(B_L-B_C\right)=G-jB$$

където $G=\frac{1}{R}$ и $B=\frac{1}{\omega L}-\omega C$ са съответно активната и реактивната проводимости.





Комплексната проводмост в експоненциална форма е:

$$Y=y.e^{-j\varphi}$$

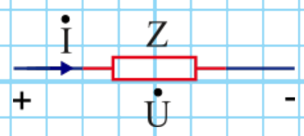
където $y=\sqrt{G^2+B^2}$ е пълната проводимост (наричана още адмитанс), а φ е ъгъла на фазовата разлика.

Всички проводимости се измерват в Сименси.

Закон на Ом

Нека в последователна RLC верига има пад на напрежение $u(t)=U_m.\sin(\omega t+\varphi)$ и тече ток $i(t)=I_m.\sin(\omega t)$. В комплексен вид двете величини са:

$$\dot{U}=U_m.e^{j\varphi} \qquad \dot{I}=I_m.e^{j0}$$



Законът на Ом в комплексен вид (за синусоидални вериги) гласи:

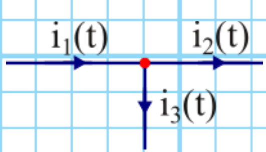
$$\boxed{\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}}$$

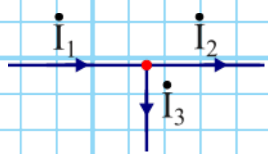
където $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ е комплексното съпротивление на веригата.

<u>Първи закон на Кирхоф</u>

Първият закон на Кирхоф за синусоидални вериги може да се запише по два начина: за моментни стойности и в комплексен вид.

Нека разгледаме следния възел от верига:





ПЗК за моментните стойности за този възел гласи:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

В комплексен вид, горното уравнение е:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

В общия случай ПЗК за моментните стойности се записва като:

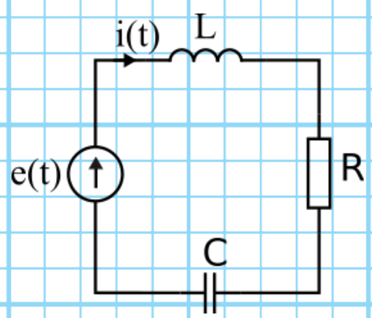
$$\sum i_{вл}(t)=\sum i_{изл}(t)$$

а в комплексен вид като:

$$\sum \dot{I}_{ВЛ}=\sum \dot{I}_{ИЗЛ}$$

Втори закон на Кирхоф

Нека да разгледаме една последователна RLC верига, захранвана от синусоидален източник $e(t)$:



Във веригата тече ток $i(t)=I_m.\sin(\omega t)$, а вече знаем, че падовете на напрежения са:

$$u_R(t)=R.I_m.\sin(\omega t) \qquad u_L(t)=\omega L.I_m\sin(\omega t+90°)$$

$$u_C(t)=\frac{1}{\omega C}I_m.\sin(\omega t-90°)=-\frac{1}{\omega C}I_m.\sin(\omega t+90°)$$

ВЗК за моментните стойности гласи:

$$e(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=I_m\left(\sin(\omega t).R+\sin(\omega t+90°).\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right)$$

В комплексен вид уравнението става:

$$\dot{E}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=\dot{I}\left(R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right)=\dot{I}.Z$$

В общия случай ВЗК в комплексен вид гласи:

$$\boxed{\sum \dot{E}_k=\sum \dot{U}_k=\sum \dot{I}_k.Z_k}$$

Мощности в синусоидални вериги

Моментна мощност на резистор

Нека да разгледаме един резистор, върху който са приложени синусоидални ток и напрежение. Вече знаем, че при резисторите токът и напрежението са във фаза:

$$i(t)=I_m.\sin(\omega t) \qquad u(t)=U_m.\sin(\omega t)$$

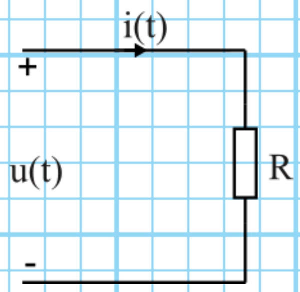
Следователно моментната мощност, разсейвана в резистор, е:

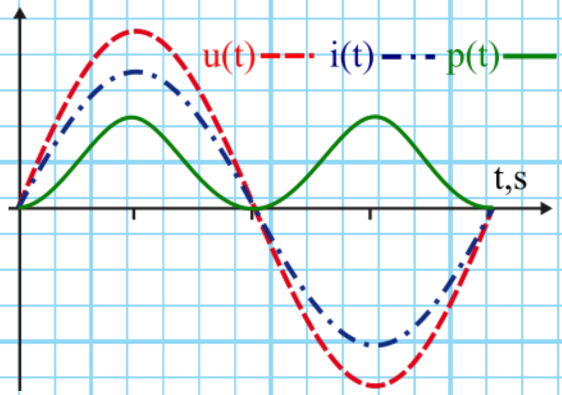
$$p(t)=i(t).u(t)=I_m U_m \sin^2(\omega t)$$

Като се има предвид, че съставката $\sin^2(\omega t)$ е винаги положителна, същото важи и за моментната мощност:

$$p(t)\geq 0$$

Получената зависимост за мощността е представена и графично на фигурата отдолу:





Средната мощност, разсейвана в резистора, може да се определи, като мощността $p(t)$ се интегрира за един период на синусоидата:

$$P_{CP}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T I_m.U_m.\sin^2(\omega t)\,dt=\frac{I_m U_m}{2}$$

Средната мощност P_{CP} е по-голяма от нула и такава мощност се нарича активна (реално консумирана).

<u>Моментна мощност на бобина</u>

Нека разгледаме идеална бобина, върху която са приложени синусоидални ток и напрежение:

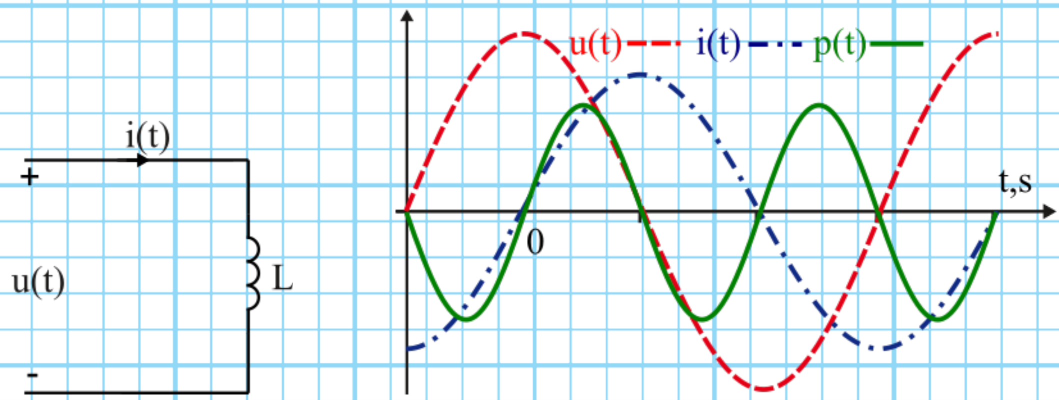
Знаем, че токът изостава по фаза от напрежението с ъгъл *90°*:

$$i(t)=I_m.\sin(\omega t) \qquad u(t)=U_m.\sin(\omega t+90°)$$

Тогава моментната мощност във веригата е:

$$p(t)=i(t).u(t)=I_m U_m\frac{-\cos(2\omega t+90°)}{2}=\frac{I_m U_m}{2}\sin(2\omega t)$$

От полученото уравнение се вижда, че моментната мощност на бобината се изменя между $-\frac{I_m U_m}{2}$ и $+\frac{I_m U_m}{2}$, което е представено графично на фигурата:



Средната разсейвана мощност от бобината за един период на синусоидата е:

$$P_{CP}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T I_m U_m \sin(2\omega t)\,dt=0$$

Вижда се, че средната разсейвана мощност е $P_{cp}=0$, т.е. идеалната бобина не консумира мощност, а единствено зарежда временно енергия под формата на магнитно поле, след което я връща обратно. Такава енергия се нарича реактивна, т.е. тя не е реално консумирана.

Моментна мощност на кондензатор

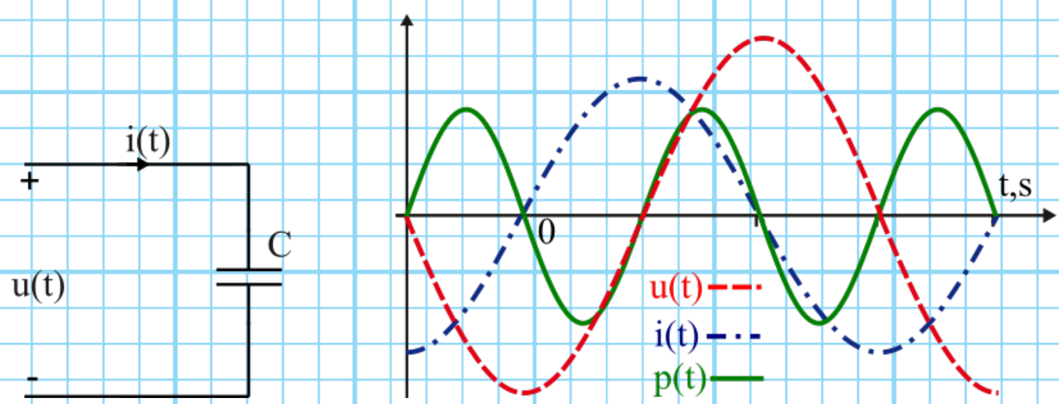
Нека разгледаме идеален кондензатор със синусоидални ток и напрежение:

$$i(t)=I_m \sin(\omega t) \qquad u(t)=U_m \sin(\omega t-90°)$$

Моментната мощност е:

$$p(t)=i(t).u(t)=-I_m U_m \frac{\cos(2\omega t-90°)}{2}=-\frac{I_m U_m}{2}\sin(2\omega t)$$

Вижда се, че и при кондензатора моментната мощност се изменя между $-\frac{I_m U_m}{2}$ и $+\frac{I_m U_m}{2}$, което е представено графично:



Средната консумирана мощност на кондензатора е:

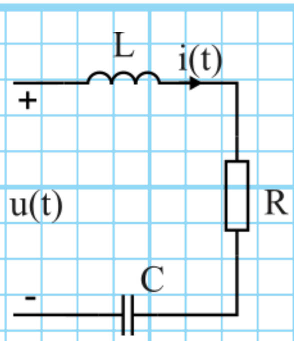
$$P_{CP}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T -\frac{I_m U_m}{2}\sin(2\omega t)\,dt=0$$

Вижда се, че кондензаторът не консумира мощност, а единствено временно зарежда енергия под формата на електрическо поле, сред което обратно я връща към веригата. Тази мощност също се нарича реактивна.

<u>Моментна мощност на RLC верига</u>

Нека да разгледаме последователна RLC верига, с ток и напрежение съответно:

$$u(t)=U_m.\sin(\omega t) \qquad i(t)=I_m.\sin(\omega t-\varphi)$$



Моментната мощност във веригата е:

$$p(t)=i(t).u(t)=U_m.\sin(\omega t).I_m.\sin(\omega t-\varphi)=$$
$$=U_m I_m\left[\cos(\varphi)\sin^2(\omega t)-\sin(\varphi)\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]$$

Тогава за средната консумирана мощност, в рамките на един период на синусоидата, се получава:

$$P_{CP}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)$$

Вижда се, че средната мощност има максимум когато $\varphi=0°$ ($X=0$) и минимум когато $\varphi=\pm 90°$ ($R=0$).

Ефективна стойност

Често е удобно да се използват така наречените ефективни стойности на напрежението и тока, наричани още средно-квадратични. За синусоидални вериги ефективните стойности са:

$$U=\frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

В общия случай за какъв да е сигнал (несинусоидален), ефективната стойност се определя съгласно:

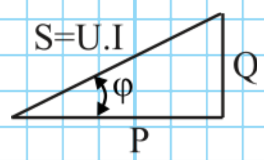
$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t).dt}$$

Ако се използват ефективните стойности на токовете и напреженията, средната мощност в последователна RLC верига става:

$$P_{CP}=\frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)=\frac{U_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\varphi)=U.I.\cos(\varphi)$$

Мощности в синусоидални вериги

Вече знаем, че резисторите действително консумират енергия (активна енергия), докато реактивните елементи (бобини и кондензатори) зареждат енергията временно, след което я връщат във веригата (реактивна енергия). Подобно на съпротивленията, в една синусоидална верига мощностите са свързани със страните на правоъгълен триъгълник.



Активната мощност P, измервана във Ватове [W], е:

$$P=U.I.\cos\varphi$$

Реактивната мощност Q, измервана във Волт-Ампер реактивен [VAr], е:

$$Q=U.I.\sin\varphi$$

Хипотенузата на правоъгълния триъгълник се нарича пълна или привидна (от англ. Apparent power) мощност и се измерва във Волт-Ампери [VA]:

$$S=U.I=\sqrt{P^2+Q^2}$$

Ъгълът между активната и пълната мощност е ъгълът на фазовата разлика:

$$\varphi = arctg\frac{Q}{P}$$

Ъгълът на фазовата разлика може да бъде положителен или отрицателен, както и реактивната мощност, докато активната (реалната) мощност е винаги положителна.

Правоъгълният триъгълник може да се опише и с комплексно число, наречено Комплексна мощност:

$$\dot{S} = P + jQ = S.e^{j\varphi}$$

Комплексната мощност се измерва във Волт-Ампери $[V.A]$.

Баланс на мощностите при синусоидални вериги

Балансът на мощностите при синусоидални вериги е следствие от закона за запазване на енергията:

$$\sum \dot{S}_{ИЗТ} = \sum \dot{S}_{КОНС}$$

където $\dot{S}_{ИЗТ}$ и $\dot{S}_{КОНС}$ са сумарните комплексни мощности във веригата, съответно на източниците и на консуматорите. Като се има предвид, че $\dot{S} = P + jQ$, горната зависимост може да се запише и като:

$$\sum P_{ИЗТ} = \sum P_{КОНС}$$

и

$$\sum Q_{ИЗТ}=\sum Q_{КОНС}$$

Активната и реактивната **мощност на консуматорите** се определя съответно с:

$$P=I^2.R \qquad Q=I^2.\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=I^2.X$$

Мощността на източник на напрежение се определя с:

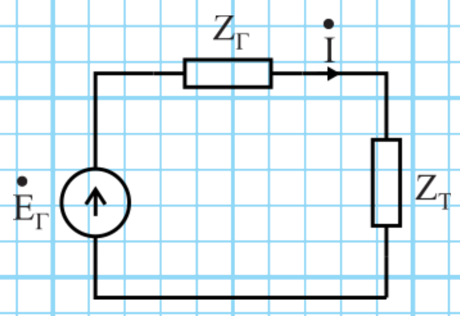
$$\dot{S}_E=\dot{E}.\overset{*}{I}_E$$

където $\dot{E}$ и $\overset{*}{I}_E$ са съответно комплексното напрежение и комплексно-спрегнатия ток на източника.

Комплексната мощност на източник на ток с големина $\dot{I}$ и пад на напрежението $\dot{U}_I$, е:

$$\dot{S}_I=\dot{U}_I.\overset{*}{I}$$

<u>Теорема за предаване на максимална активна мощност</u>



Нека е даден еквивалентен генератор (на Тевенен) с големина $\dot{E}_Г$ и комплексно съпротивление $Z_Г=R_Г+jX_Г$, захранващ товар с комплексно съпротивление $Z_T=R_T+jX_T$.

Ако съпротивлението на източника $Z_Г$ е известно, **целта е** да се определи какво трябва да бъде съпротивлението на товара $Z_Т$, такова че до него да достига максимална активна мощност.

Еквивалентното съпротивление на цялата верига Z_E може да се представи в експоненциална форма:

$$Z_E=(R_Т+R_Г)+j(X_Т+X_Г)=z.e^{j\varphi}=\sqrt{(R_Т+R_Г)^2+(X_Т+X_Г)^2}\,e^{j\,atan\frac{X_Т+X_Г}{R_Т+R_Г}}$$

където $\varphi=atan\dfrac{X_Т+X_Г}{R_Т+R_Г}$ е ъгълът на фазовата разлика, а

$z=\sqrt{(R_Т+R_Г)^2+(X_Т+X_Г)^2}$ е пълното съпротивление (импеданса) на веригата.

Комплексният ток във веригата е:

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}_Г}{Z_Т+Z_Г}=\frac{\dot{E}_Г}{(R_Т+R_Г)+j(X_Т+X_Г)}=\frac{\dot{E}_Г}{Z_E}$$

т.е. разсейваната в товара активната мощност е:

$$P=I^2.R_Т=\left|\frac{\dot{E}_Г}{Z_E}\right|^2.R_Т=\frac{E_Г^2}{z^2}R_Т=\frac{E_Г^2}{\dfrac{(R_Т+R_Г)^2+(X_Т+X_Г)^2}{R_Т}}$$

където $E_Г$ и I са ефективните стойности на източника и тока във веригата.

Вижда се, че за да бъде мощността максимална, знаменателят следва да е минимален, т.е.:

$$\frac{\left(R_T+R_Г\right)^2+\left(X_T+X_Г\right)^2}{R_T}=MIN$$

Очевидно е, че едно от условията за минималност на знаменателя, е реактивната мощност да е нулева:

$$X_T=-X_Г$$

След заместване в горното уравнение, получаваме:

$$\frac{\left(R_T+R_Г\right)^2+\left(X_T+X_Г\right)^2}{R_T}=\frac{\left(R_T+R_Г\right)^2}{R_T}=R_T+2R_Г+\frac{R_Г^2}{R_T}=MIN$$

Намираме условието за минималност чрез решаване на следната производна:

$$\frac{d\left(R_T+2R_Г+\frac{R_Г}{R_T}\right)}{dR_T}=0 \quad \rightarrow \quad 1-\frac{R_Г^2}{R_T^2}=0 \quad \rightarrow \quad R_T=R_Г$$

Следователно условието за достигане на максимална мощност до товара е R_T=$R_Г$ и X_T=-$X_Г$ или:

$$R_T+jX_T=R_Г-jX_Г$$

т.е. съпротивлението на товара трябва да е равно на комплексно-спрегнатата стойност на съпротивлението на генератора:

$$\boxed{\dot{Z}_T=\overset{*}{Z}_Г}$$

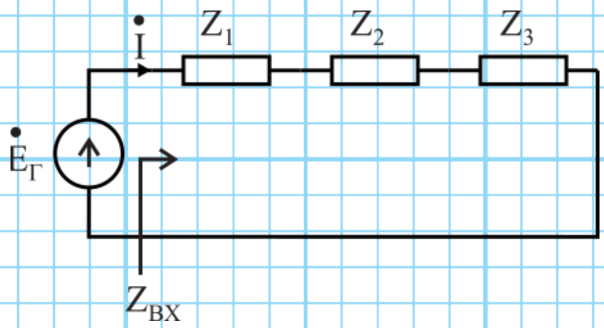
Анализ на вериги при установен синусоидален режим

Анализът на вериги при установен синусоидален режим включва следните основни стъпки:

1. Преобразуване на синусоиди и съпротивления в комплексна форма;
2. Анализ на еквивалентната комплексна верига;
3. Преобразуване на получените комплексни числа в синусоидална форма.

Еквивалентно комплексно съпротивление

Всички правила за линейни постояннотокови вериги важат и при анализ на синусоидални вериги. Нека да разгледаме последователно съединение на три комплексни съпротивления:



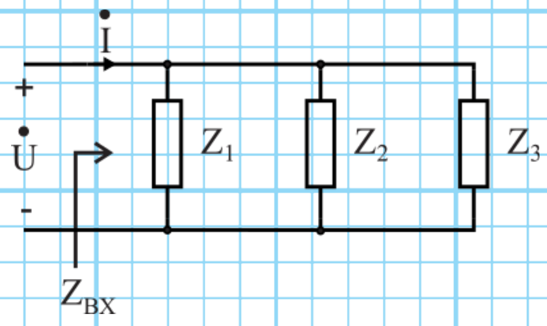
Уравнението по ВЗК е:

$$\dot{E}_{\Gamma}=\dot{U}_1+\dot{U}_2+\dot{U}_3=\left(Z_1+Z_2+Z_3\right)\dot{I}=Z_{BX}\dot{I}$$

С други думи еквивалентното комплексно съпротивление на последователни товари е:

$$Z_{BX}=\sum Z_k$$

Аналогично при паралелно свързани комплексни товари, можем да запишем уравнение по ПЗК:

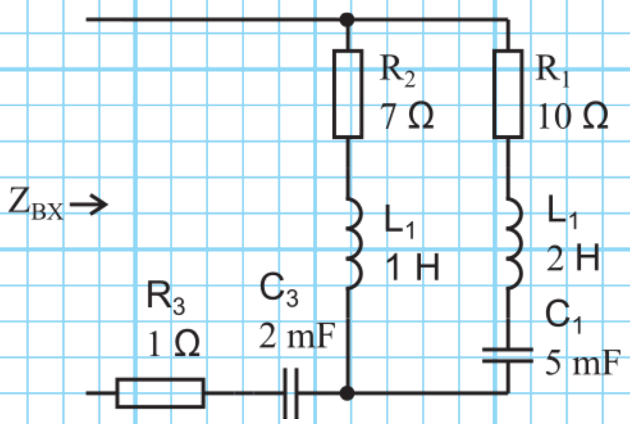


$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=\frac{\dot{U}}{Z_1}+\frac{\dot{U}}{Z_2}+\frac{\dot{U}}{Z_3}=\dot{U}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)=\dot{U}\frac{1}{Z_{BX}}$$

т.е.

$$Z_{BX}=\frac{1}{\sum\frac{1}{Z_k}}=\frac{1}{\sum Y_k}$$

Пример: Да се определи входното съпротивление на веригата ако $\omega=100$ [*rad/s*].



Капацитивните и индуктивни съпротивления във веригата са:

$$X_{L1}=\omega L_1=100[\Omega]$$

$$X_{L2}=\omega L_2=200[\Omega]$$

$$X_{C1}=\frac{1}{\omega C_1}=2[\Omega]$$

$$X_{C3}=\frac{1}{\omega C_3}=5[\Omega]$$

Комплексните съпротивления на трите клона са:

$$Z_1=R_1+jX_{L1}-jX_{C1}=10+j100-j2=10+j98[\Omega]$$

$$Z_2=R_2+jX_{L2}=7+j200[\Omega]$$

$$Z_3=R_3-jX_{C3}=1-j5[\Omega]$$

Следователно входното съпротивление на веригата е:

$$Z_{BX}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}+Z_3=\frac{(10+j98)(7+j200)}{10+j98+7+j200}+1-j5=6,26+j60,8[\Omega]$$

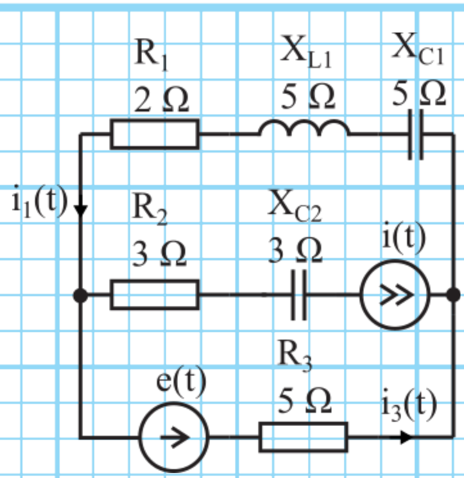
Анализ по метода със законите на Кирхоф

Методът е аналогичен на този при постояннотоковите вериги, но се работи с комплексни числа. Целта е да се запише и реши система уравнения, в която неизвестните величини са неизвестните клонови токове във веригата.

Проблем: За веригата са дадени големините на източниците:

$$e(t)=3,54.\sin(\omega t+45°)[V]; \qquad i(t)=\sin(\omega t)[A]$$

Да се определят токовете във веригата и комплексната мощност на консуматорите.



Първо трябва да представим източниците в комплексна форма:

$$\dot{E}=3{,}54\,e^{j45^\circ}=2{,}5+j\,2{,}5\,[V]$$

$$\dot{I}=1\,e^{j0}=1\,[A]$$

Във веригата има два неизвестни тока, така че системата уравнения ще съдържа едно уравнение по ПЗК и едно по ВЗК:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{I}+\dot{I}_3=\dot{I}_1\\ \dot{E}=\dot{I}_3 Z_3+\dot{I}_1 Z_1\end{array}\right.$$

където $Z_1=R_1+j\left(\omega L_1-\dfrac{1}{\omega C_1}\right)=2+j(5-5)=2\,[\Omega]$ и $Z_3=R_3=5\,[\Omega]$.

Записана в матрична форма, системата става:

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2{,}5+j\,2{,}5\end{bmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = 1{,}5 + 1{,}2 = 7$$

$$\Delta_1 = 5 + 2{,}5 + j\,2{,}5 = 7{,}5 + j\,2{,}5$$

$$\Delta_3 = 2{,}5 + j\,2{,}5 - 2 = 0{,}5 + j\,2{,}5$$

Следователно решенията за токовете са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7{,}5 + j\,2{,}5}{7} = 1{,}07 + j\,0{,}36 = 1{,}13\,e^{j\,18.6°}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0{,}5 + j\,2{,}5}{7} = 0{,}07 + j\,0{,}36 = 0{,}37\,e^{j\,79°}$$

Преобразуваме ги в синусоидална форма:

$$i_1(t) = 1{,}13\sin(\omega t + 18.6°)[A]$$

$$i_3(t) = 0{,}37\sin(\omega t + 79°)[A]$$

Мощността на консуматорите може да се определи с:

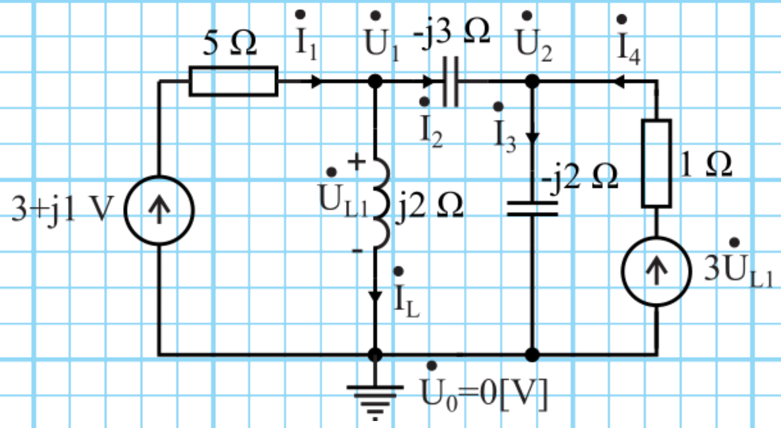
$$\dot{S}_{KOHC} = I_1^2.Z_1 + I_2^2.Z_2 + I_3^2.Z_3 = \left(\frac{1{,}13}{\sqrt{2}}\right)^2.2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.(3 - j\,3) + \left(\frac{0{,}37}{\sqrt{2}}\right)^2.5 =$$
$$= 1{,}28 + 1{,}5 - j\,1{,}5 + 0.34 = 3{,}12 - j\,1{,}5\,[VA]$$

Метод с възловите потенциали

Методът с възловите потенциали също е приложим при синусоидалните вериги. Отново единият възел на веригата се заземява, а неизвестните са другите възли. Броят на уравненията във системата е равен на броя на възлите минус едно.

За целта всеки ток се изразява чрез възловите потенциали съгласно разширения закон на Ом.

Пример: Да се определи комплексният ток $\dot{I}_L$ през бобината.



Във веригата има три възела, така че ще заземим единия ($\dot{U}_0=0[V]$). Възловите потенциали на другите два са $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$. Големината на зависимия източник на напрежение е три пъти по-голямо от напрежението на бобината $\dot{U}_{L1}$, т.е.:

$$3\dot{U}_{L1}=3\left(\dot{U}_1-\dot{U}_0\right)=3\dot{U}_1$$

Записваме две уравнения по ПЗК за възли 1 и 2:

$$\left|\begin{array}{l}\dot{I}_1=\dot{I}_L+\dot{I}_2\\ \dot{I}_2+\dot{I}_4=\dot{I}_3\end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{l}\dfrac{3+j1-\dot{U}_1}{5}=\dfrac{\dot{U}_1-\dot{U}_2}{-j3}+\dfrac{\dot{U}_1}{j2}\\ \dfrac{\dot{U}_1-\dot{U}_2}{-j3}+\dfrac{3\dot{U}_1-\dot{U}_2}{1}=\dfrac{\dot{U}_2}{-j2}\end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left| \begin{aligned} &\frac{3+j1}{5} = \dot{U}_1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{j2}+\frac{1}{-j3}\right)+\dot{U}_2\frac{1}{j3} \\ &0=\dot{U}_1\left(\frac{1}{-j3}+3\right)+\dot{U}_2\left(\frac{1}{j3}-1+\frac{1}{j2}\right) \end{aligned} \right.$$

Записваме системата в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2-j0,167 & j0,33 \\ 3+j0,33 & -1-j0,83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6+j0,2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тъй като търсим единствено тока през бобината, определяме само две от детерминантите:

$$\Delta = (0,2-j0,167)(-1-j0,83)-(j0,33)(3+j0,33) = -0.229-j0.99$$

$$\Delta_1 = (0,6+j0,2)(-1-j0,83) = -0,434-j0,698$$

Следователно потенциала на възел 1 е:

$$\dot{U}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-0,434-j0,698}{-0,229-j0,99} = 0,766-j0,261\,[V]$$

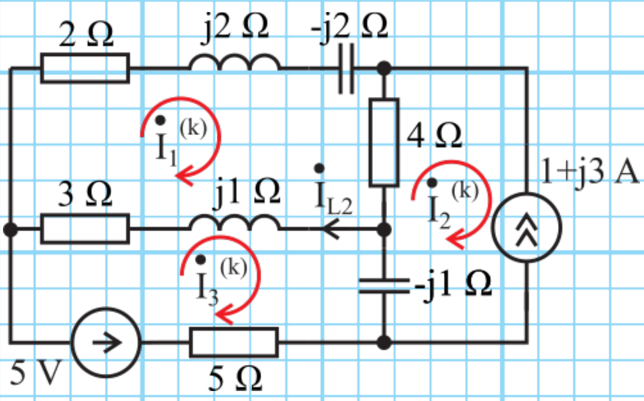
За комплексния ток през бобината се получава:

$$\dot{I}_{L1} = \frac{\dot{U}_1}{j2} = \frac{0,766-j0,261}{j2} = -0,131-j0,383\ [A]$$

<u>Анализ по метода с контурните токове</u>

За синусоидални вериги, методът е аналогичен на използваният при постояннотокови вериги. Съгласно него схемата се обхожда с достатъчно на брой контура, като всички се въртят в една и съща посока. Приема се, че по всеки контур тече контурен ток, като всеки клонов ток е алгебрична сума от контурните токове през него. В случай, че контура минава през източник на ток, големината на контура е известна и равна на големината на източника на ток.

Пример: Да се определи токът през бобината $\dot{I}_{L2}$.



Елементите на веригата могат да се обходят с три контурни тока. Тъй като $\dot{I}_2^k$ минава през източник на ток, с противоположна посока, неговата големина е известна:

$$\dot{I}_2^k = -(1+j3)[A]$$

Записваме уравнения по ВЗК за другите два контура, като отчитаме насрещните контурни токове:

$$\left| \begin{array}{l} 0 = \dot{I}_1^k(2+j2-j2+4+3+j1) - 4\dot{I}_2^k - \dot{I}_3^k(3+j1) \\ -5 = \dot{I}_3^k(3+j1-j1+5) - \dot{I}_1^k(3+j1) - \dot{I}_2^k(-j1) \end{array} \right.$$

заменяме $\dot{I}_2^k = -(1+j3)$ и преобразуваме:

$$\left|\begin{aligned} -4-j12 &= \dot{I}_1^k(9+j1)-\dot{I}_3^k(3+j1) \\ -8+j1 &= -\dot{I}_1^k(3+j1)+\dot{I}_3^k.8 \end{aligned}\right.$$

Записваме системата в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1^k \\ \dot{I}_3^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9+j1 & -(3+j1) \\ -(3+j1) & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4-j12 \\ -8+j1 \end{bmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta=\begin{bmatrix} 9+j1 & -(3+j1) \\ -(3+j1) & 8 \end{bmatrix}=72+j8-8-j6=64+j2$$

$$\Delta_1=\begin{bmatrix} -4-j12 & -(3+j1) \\ -8+j1 & 8 \end{bmatrix}=$$
$$=(-4-j12)(8)+(3+j1)(-8+j1)=-57-j101$$

$$\Delta_3=\begin{bmatrix} 9+j1 & -4-j12 \\ -(3+j1) & -8+j1 \end{bmatrix}=$$
$$=(9+j1)(-8+j1)-(4+j12)(3+j1)=-73-j39$$

Тогава за контурните токове получаваме:

$$\dot{I}_1^k=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{57+j101}{64+j2}=-0{,}94-j1{,}55$$

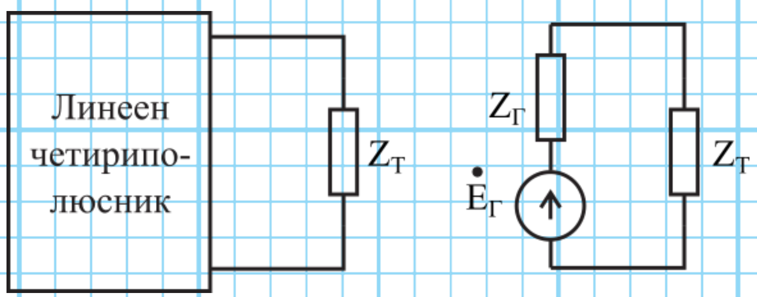
$$\dot{I}_3^k=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-\frac{73+j39}{64+j2}=-1{,}16-j0{,}57$$

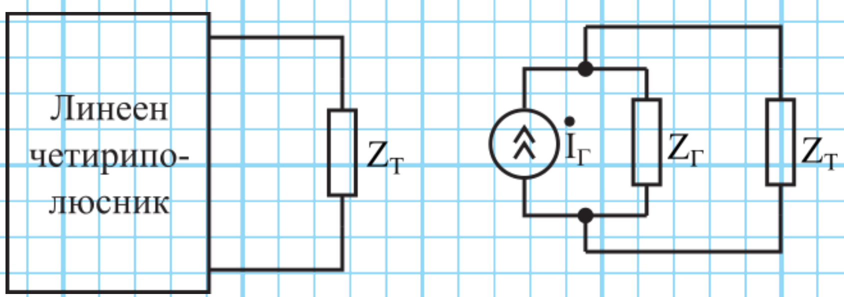
Токът $\dot{I}_{L2}$ през бобината се изразява като алгебрична сума от контурните токове, минаващи през него:

$$\dot{I}_{L2} = \dot{I}_1^k - \dot{I}_3^k = -0{,}94 - j1{,}55 + 1{,}16 + j0{,}57 = 0{,}22 - j0{,}98 \ [A]$$

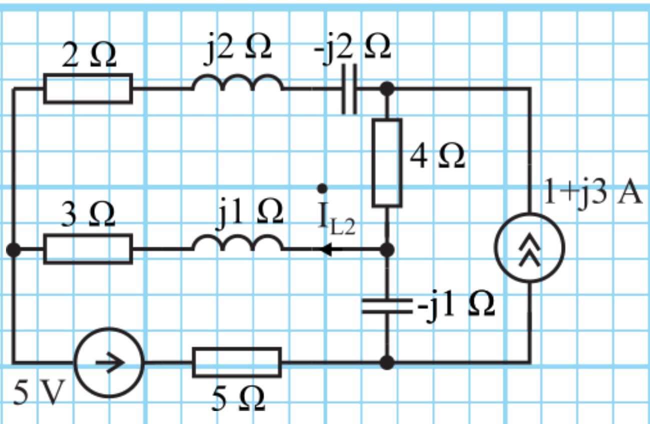
Анализ чрез теореми на Тевенен и Нортън

Теоремата за еквивалентния генератор (теореми на Тевенен и Нортън) могат да бъдат приложени и за синусоидални вериги. Еквивалентните източници на ток и напрежение са представени отдолу, като $Z_Г$ е еквивалентното комплексно съпротивление на двуполюсника, а $\dot{E}_Г$ и $\dot{I}_Г$ - съответно напрежението на празен ход и токът на късо съединение на двуполюсника.

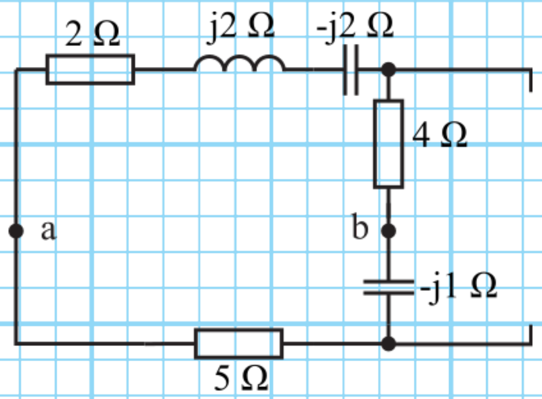




Пример: За дадената схема да се определи тока $\dot{I}_{L2}$, чрез теоремата на Тевенен.

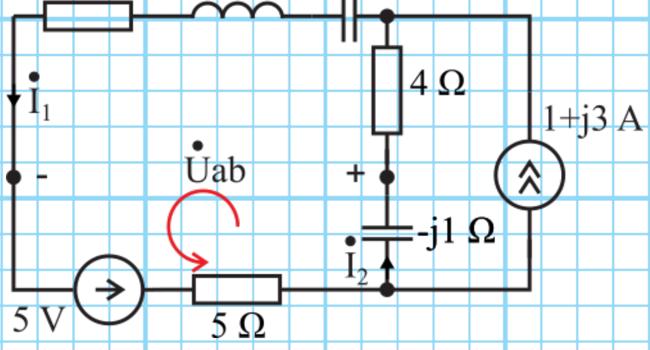


Първо ще определим входното комплексно съпротивление на мястото на товара, като премахнем клона на товара, и пасивираме веригата (източникът на напрежение се заменя с късо съединение, а източникът на ток – с прекъсната верига).:



$$Z_Г = Z_{ab} = \frac{(2+j2-j2+4)(5-j1)}{2+j2-j2+4+5-j1} = \frac{30-j6}{11-j1} = 2{,}75-j0{,}3 \;\; [\Omega]$$

След това ще определим напрежението на празен ход на двуполюсника, като разкачим клона, чийто ток търсим:



За тази верига можем да запишем едно уравнение по ПЗК и едно по ВЗК:

$$\dot{I}_2 + (1 + j3) = \dot{I}_1$$

$$5 = \dot{I}_1(5 + 2 + j2 - j2) + \dot{I}_2(4 - j1)$$

Записваме ги в матрична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 4 - j1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Определяме детерминантите:

$$\Delta = 4 - j1 + 7 = 11 - j1$$

$$\Delta_1 = 4 - j1 + j12 + 3 + 5 = 12 + j11$$

$$\Delta_2 = 5 - 7 - j21 = -2 - j21$$

Следователно токовете са:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12 + j11}{11 - j1} = 0{,}99 + j1{,}09 \quad [A]$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2 - j21}{11 - j1} = -0{,}01 - j1{,}91 \quad [A]$$

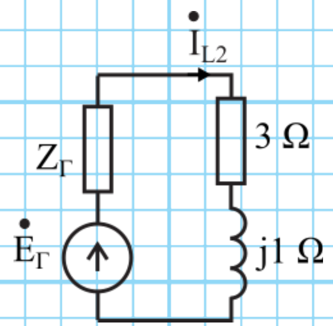
За да определим напрежението на празен ход $\dot{U}_{ab}$ ще запишем едно уравнение по ВЗК за отбелязания затворен контур на последната схема:

$$5 = 5.\dot{I}_1 + (-j1).\dot{I}_2 + \dot{U}_{ab}$$

$$\rightarrow \quad 5=5(0{,}99+j1{,}09)-j(-0{,}01-j1{,}91)+\dot{U}_{ab}$$

$$\rightarrow \quad \dot{E}_{\Gamma}=\dot{U}_{ab}=5-4{,}95-j5{,}45-0{,}01j+1{,}91=1{,}96-j5{,}46\ [V]$$

Вече можем да съставим схема с еквивалентен източник на напрежение:



От тук определяме токът през бобината $\dot{I}_{L2}$ по ВЗК:

$$\dot{I}_{L2}=\frac{\dot{E}_{\Gamma}}{Z_{\Gamma}+3+j1}=\frac{1{,}96-j5{,}46}{2{,}73-j0{,}3+3+j1}=0{,}22-j0{,}98\ [A]$$

Вижда се, че получаваме същия отговор, както и по метода с контурните токове.