Преходни процеси в постояннотокови вериги

Преходни процеси от първи ред

Основни понятия

В предишната тема вече получихме, че в кондензаторите и бобините се съхранява енергия под формата съответно на електрическо и магнитно поле, съгласно:

$$W_C = \frac{1}{2}.C.{u_C}^2 \qquad W_L = \frac{1}{2}.L.{i_L}^2$$

Но всички процеси свързани с зареждане или разреждане на енергия (не зависимо под каква форма) не могат да приключат мигновено, а отнемат определено време. Това зареждане/разреждане води до появата на т.н. преходни процеси.

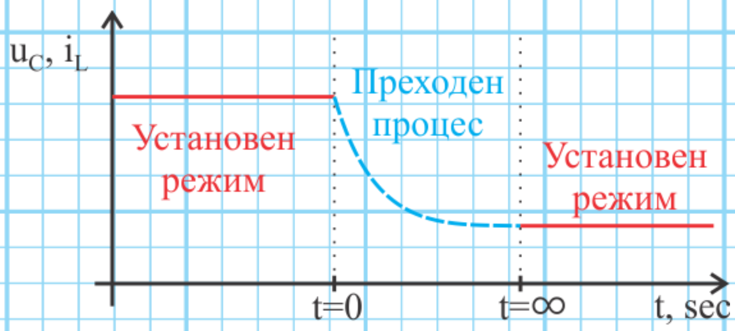
Преходните процеси възникват в електрически вериги, съдържащи бобини и кондензатори, когато веригата преминава от един установен режим в друг, което води до зареждане или разреждане на енергия.

Например, преходни процеси възникват когато:

- Веригата се свързва към източник;
- Веригата се разкача от източник;
- Възниква късо съединение;

- Възниква каквато и да е промяна във веригата.

Събитието, предизвикващо преходния процес, се нарича комутация, а моментът от времето, в който то се случва, се приема за $t = 0$.



Нека е нужно да се определи токът във веригата за даден преходен процес. Той се представя във следната форма:

$$i(t) = i(\infty) + i_{ПС}(t)$$

където $i(\infty)$ е установената съставка след приключване на преходния процес в момент от времето $t = \infty$;

$i_{ПС}(t)$ – преходната съставка, описваща преходния процес.

Същата зависимост е в сила за напреженията във веригата:

$$u(t) = u(\infty) + u_{ПС}(t)$$

За преходните процеси важат две основни правила, наричани независими начални условия:

$$u_C(0+) = u_C(0-)$$

$$i_L(0+) = i_L(0-)$$

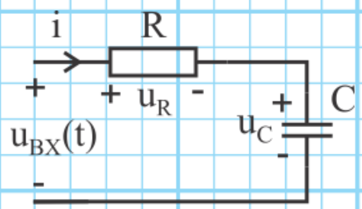
където моментите от времето $t = 0+$ и $t = 0-$ са съответно точно преди и веднага след комутацията ($t = 0$).

С други думи напрежението на кондензатора $u_C(t)$ и токът през бобината $i_L(t)$ запазват своите стойности в началния момент след комутацията (моментът $t = 0$).

Преходни процеси в последователна RC верига

Общи зависимости

Нека да разгледаме една последователна RC верига.



За нея можем да запишем следното уравнение по ВЗК:

$$u_{\text{BX}}(t) = u_R + u_C = i.R + u_C$$

Като се има предвид, че токът през кондензатора е $i = C\frac{du_C}{dt}$, горното уравнение добива вида:

$$u_{\text{BX}}(t) = R.C.\frac{du_C}{dt} + u_C$$

Всяка промяна във входното напрежение u_{BX} ще доведе до преходен процес. Решението на полученото обикновеното диференциално уравнение е:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C.e^{-\frac{t}{R.C}} = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C.e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

където $u_C(\infty)$ е установената съставка на напрежението след комутацията;

A_C е т.н. интеграционна константа;

$\tau_C = R.C$ е времеконстантата на веригата.

$$\boxed{u_C(t) = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C.e^{-\frac{t}{R.C}}}$$

Интеграционната константа A_C може да бъде определена чрез решаване на горното уравнение за момент от времето $\mathrm{t} = 0+$:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C.e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} \quad \rightarrow \quad u_C(0+) = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C.e^0$$

Като се има предвид, че $e^0 = 1$, интеграционната константа е:

$$A_C = u_C(0+) - u_C(\infty)$$

Законът за изменение на тока във веригата може да се определи съгласно:

$$i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt} = -C.\frac{1}{R.C}\mathrm{A}_C.e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{A_C}{R}.e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}},$$

т.е.

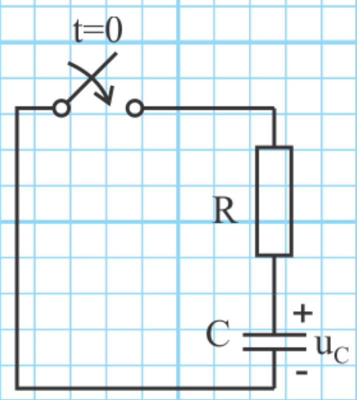
$$\boxed{i(t) = -\frac{A_C}{R}.e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}}$$

Изменението на напрежението на резистора се дава съгласно закона на Ом:

$$u_R(t) = \mathrm{i}(t).R$$

Разряд на кондензатор

Нека кондензаторът C е предварително зареден с напрежение $u_C(0-) = U_0$, след което той се разрежда през резистора R.



Началното условие, изпълнено за веригата е:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = U_0$$

Решението на преходния процес за напрежението на кондензатора е:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C . e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}$$

В случая установената съставка след приключване на преходния процес е $u_C(\infty) = 0\ [V]$, тъй като във веригата няма източници, а кондензаторът се разрежда.

Интеграционната константа A_C се определя при $t = 0+$:

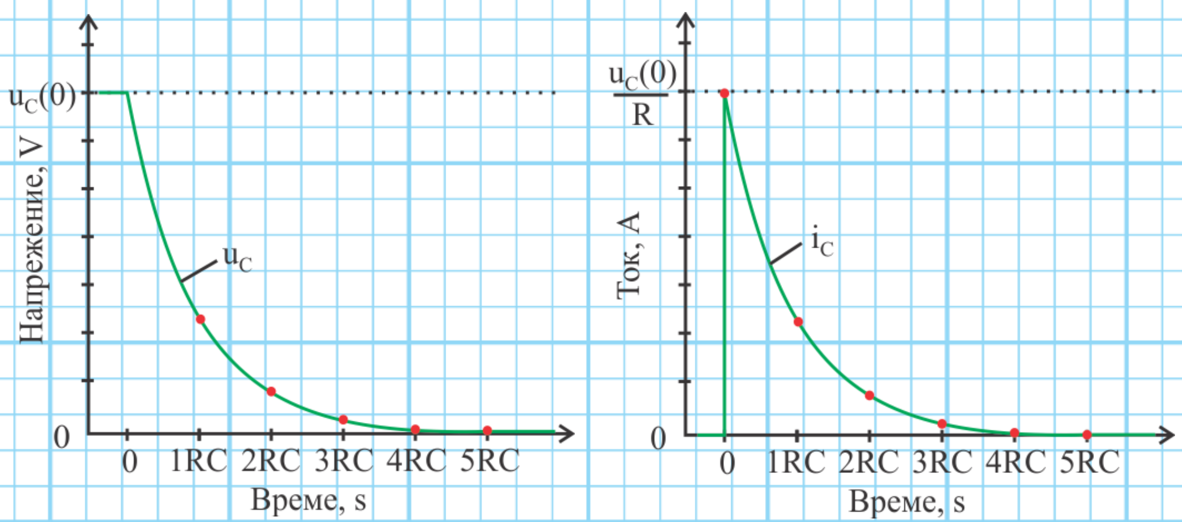
$$u_C(0+) = V_0 = \mathrm{A}_C . e^{0+} = A_C \quad => \quad A_C = U_0$$

Следователно пълното решение за напрежението на кондензатора и тока във веригата са:

$$u_C(t) = U_0 . e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}$$

$$i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{U_0}{R}.e^{-\frac{t}{RC}}$$

Получените зависимости са представени в графичен вид на фигурите отдолу, като и токът, и напрежението имат максимуми в момент от времето $t = 0+$.



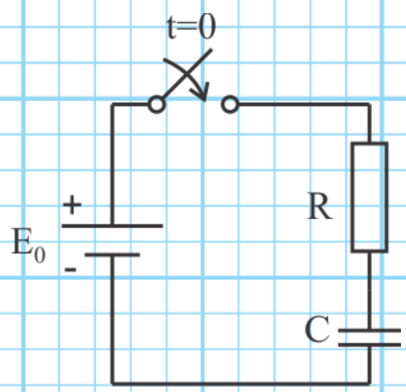
Процесът на разреждане на кондензатора е представен и в табличен вид, като преходният процес обикновено се смята за приключил след 3 или 5 времеконстанти.

Време	0	$1RC$	$2RC$	$3RC$	$4RC$	$5RC$
Зареденост на кондензатора	100%	37%	14%	5%	2%	1%
Напрежение на кондензатора	U_0	0,37 U_0	0,14 U_0	0,05 U_0	0,02 U_0	0,01 U_0

Зареждане на кондензатор

Нека да разгледаме последователна RC верига, която в момент от времето $t = 0$ се включва към източник на постоянно напрежение E_0. Също така приемаме, че кондензаторът не е бил първоначално зареден, т.е.:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0\ [V]$$



Уравнението по ВЗК е:

$$E_0 = u_R(t) + u_C(t) = i(t).R + u_C(t)$$

Законът за изменение на напрежението на кондензатора след комутацията е:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C.e^{-\frac{t}{RC}}$$

Установената съставка $u_C(\infty)$ след приключване на преходния процес може да се определи, като уравнението по ВЗК се реши за момент от времето $t = \infty$, и като се има предвид, че при установен режим токът през кондензатора е $i(\infty) = 0[A]$:

$$E_0 = i(\infty).R + u_C(\infty) = 0 + u_C(\infty) \quad \rightarrow \quad u_C(\infty) = E_0$$

Константата A_C може да се определи, като се реши преходния процес за момент от времето $t = 0+$:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0 = u_C(\infty) + \mathrm{A}_C.e^{-\frac{t}{RC}} = E_0 + \mathrm{A}_C e^0$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{A}_C = -E_0$$

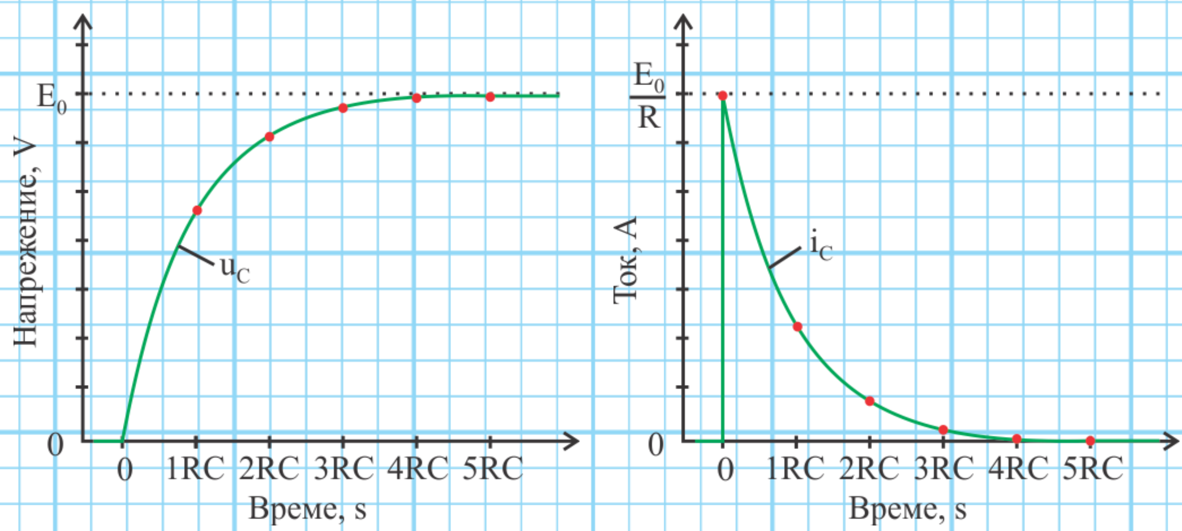
Пълното решение за преходния процес е:

$$u_C(t) = E_0 - E_0 . e^{-\frac{t}{RC}}$$

Тогава за токът във веригата се получава:

$$i(t) = C . \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E_0}{R} . e^{-\frac{t}{RC}}$$

Получените зависимости са представени в графичен вид на фигурите отдолу.



Процесът на разреждане на кондензатора е представен и в табличен вид, като преходният процес обикновено се смята за приключил след 3 или 5 времеконстанти.

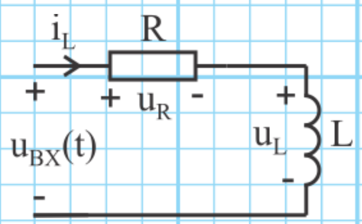
Време	0	1RC	2RC	3RC	4RC	5RC
Зареденост на кондензатора	0%	63%	86%	95%	98%	99%
Напрежение на кондензатора	0	$0{,}63E_0$	$0{,}86E_0$	$0{,}95E_0$	$0{,}98E_0$	$0{,}99E_0$

<u>Преходни процеси в последователна RL верига</u>

Общи зависимости

Нека разгледаме последователна RL верига, захранвана от напрежение $u_{\text{ВХ}}(t)$. Уравнението по ВЗК е:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = u_R(t) + u_L(t) = i_L(t).R + u_L(t)$$



Като се има предвид, че падът на напрежението е $u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$, горното уравнение става:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = i_L(t).R + L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{u_{\text{ВХ}}(t)}{L} = \frac{R}{L}.i_L(t) + \frac{di(t)}{dt}$$

Следователно всяка промяна във входното напрежение $u_{\text{ВХ}}(t)$, ще доведе до промяна в тока на веригата. Решението на това обикновено диференциално уравнение е:

$$\boxed{i_L(t) = i_L(\infty) + \mathrm{A}_L.e^{-\frac{R}{L}t}}$$

където $i_L(\infty)$ е установената съставка след приключване на преходния процес;

A_L е интеграционната константа;

$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$ е времеконстантата на веригата.

Интеграционната константа A_L може да бъде определена, чрез решаване на уравнението за момент от времето $t = 0 +$:

$$i_L(0+) = i_L(\infty) + A_L.e^0 \quad \rightarrow \quad A_L = i_L(0+) - i_L(\infty)$$

Падът на напрежението върху бобината може да бъде определен съгласно:

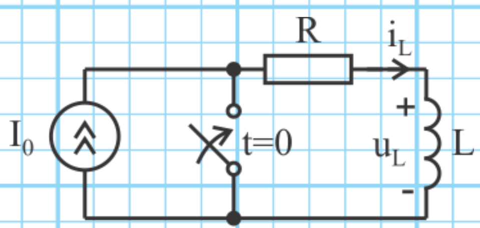
$$\boxed{u_L(t) = L.\frac{di_L(t)}{dt} = -RA_L e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Падът на напрежението върху резистора може да се изрази чрез закона на Ом:

$$u_R(t) = i_L(t).R$$

Късо съединение на бобина (разреждане на бобина)

Нека през бобината L тече ток $i_L(0-) = I_0$. В даден момент от времето $t = 0$ ключът се затваря, при което бобината се дава на късо.



Уравнението по ВЗК за веригата след комутацията е:

$$0 = u_R(t) + u_L(t) = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow 0 = i_L(t) + \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}$$

а решението му спрямо тока $i_L(t)$ е:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + \mathrm{A}_L . e^{-\frac{R}{L}t}$$

Като се има предвид, че източникът е даден на късо, към бобината няма свързан източник. Следователно установената съставка след комутацията е:

$$i_L(\infty) = 0\ [A]$$

Константата A_L може да се определи чрез решаване на уравнението за тока за момент от времето $t = 0+$:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = I_0 = i_L(\infty) + \mathrm{A}_L . e^0 \quad \rightarrow \quad A_L = I_0$$

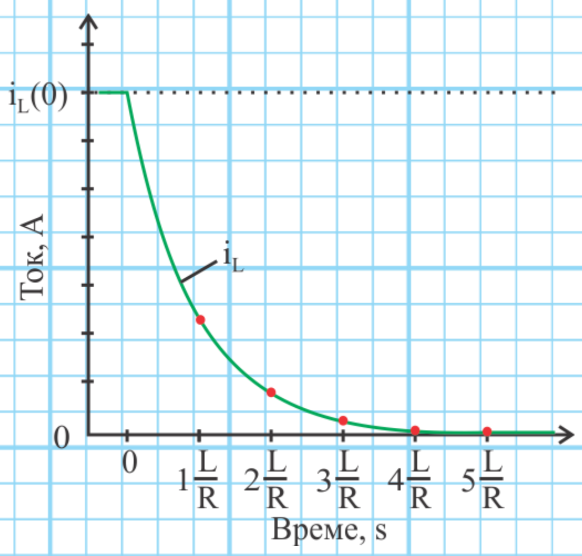
Тогава токът през бобината се изменя съгласно:

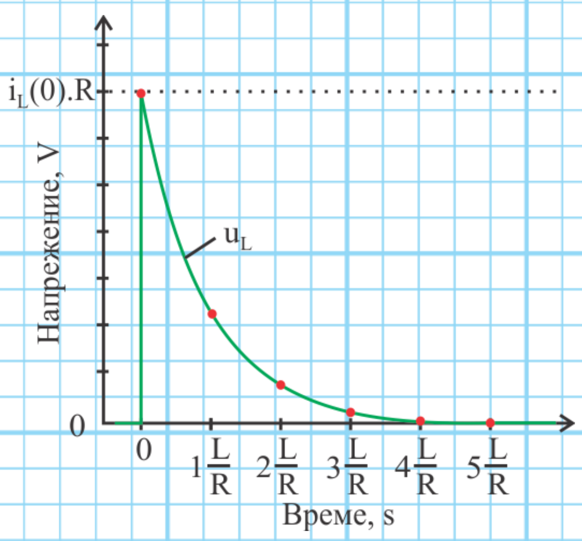
$$i_L(t) = I_0 . e^{-\frac{R}{L}t},$$

а за падът на напрежение върху бобината се получава:

$$u_L(t) = L . \frac{di_L(t)}{dt} = I_0 . R . e^{-\frac{R}{L}t}$$

Получените зависимости са представени в графичен и в табличен вид на фигурите и таблиците отдолу.

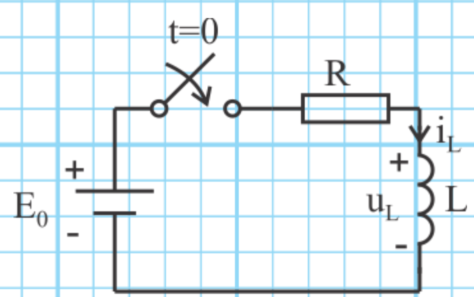




Време	0	$1\frac{L}{R}$	$2\frac{L}{R}$	$3\frac{L}{R}$	$4\frac{L}{R}$	$5\frac{L}{R}$
Зареденост на бобината	100%	37%	14%	5%	2%	1%
Ток на бобината	I_0	$0{,}37.I_0$	$0{,}14.I_0$	$0{,}05.I_0$	$0{,}02.I_0$	$0{,}01.I_0$

Включване на бобина към напрежение (зареждане на бобина)

Нека една последователна RL верига, през която първоначално не тече ток, се включи към източник на постоянно напрежение в моментът от времето $t = 0$.



Следователно началното условие за бобината е:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0\ [A]$$

Уравнението по ВЗК е:

$$E_0 = u_R(t) + u_L(t) = R.i_L(t) + L.\frac{di_L(t)}{dt},$$

а неговото решение е:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + A_L.e^{-\frac{R}{L}.t}$$

Установената съставка в момента от времето $t = \infty$ е:

$$i_L(\infty) = \frac{E_0}{R}$$

Интеграционната константа A_L може да се определи за момента от времето $t = 0+$:

$$i_L(0+) = 0 = i_L(\infty) + A_L . e^0 \quad \rightarrow \quad A_L = -\frac{E_0}{R}$$

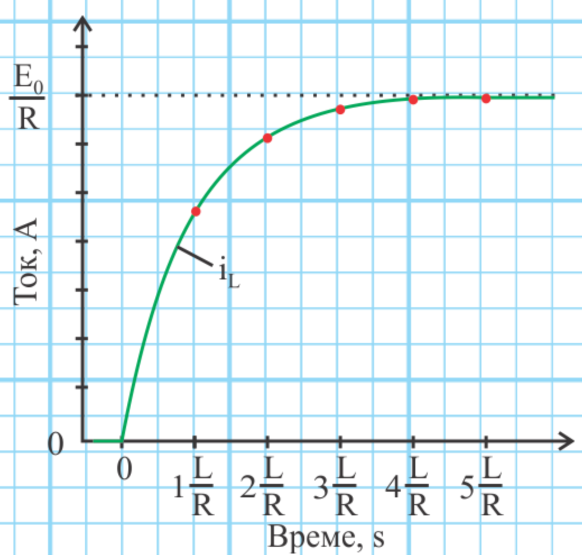
Следователно пълното решени за тока е:

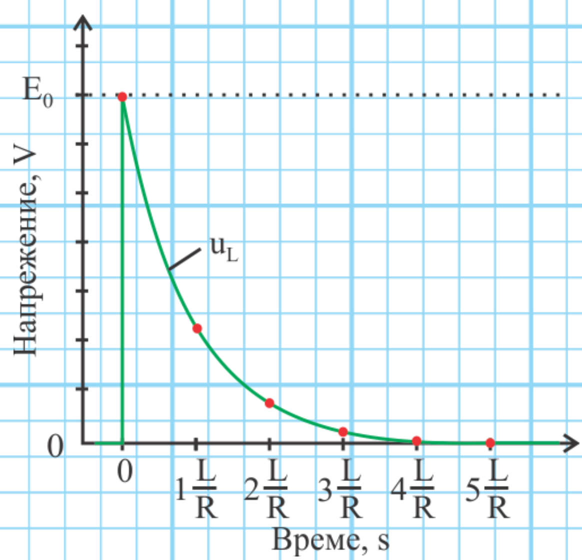
$$i_L(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} . e^{-\frac{R}{L}.t},$$

а падът на напрежение върху бобината се изменя съгласно:

$$u_L(t) = L.\frac{di_L(t)}{dt} = E_0 . e^{-\frac{R}{L}.t}$$

Получените зависимости са представени в графичен и табличен вид отдолу.

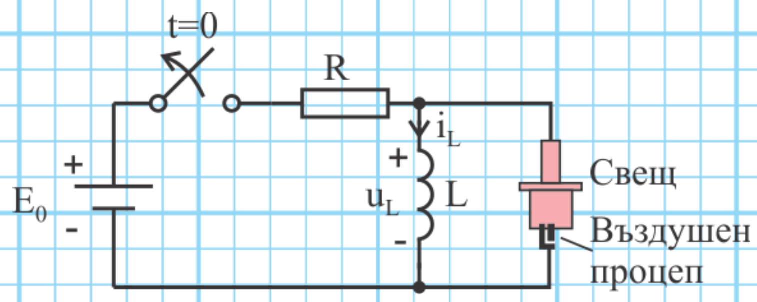




Време	0	$1\dfrac{L}{R}$	$2\dfrac{L}{R}$	$3\dfrac{L}{R}$	$4\dfrac{L}{R}$	$5\dfrac{L}{R}$
Зареденост на бобината	0%	63%	86%	95%	98%	99%
Ток на бобината	0	$0{,}63.\dfrac{E_0}{R}$	$0{,}86.\dfrac{E_0}{R}$	$0{,}95.\dfrac{E_0}{R}$	$0{,}98.\dfrac{E_0}{R}$	$0{,}99.\dfrac{E_0}{R}$

Пример: Система за запалване на автомобил.

Типична схема за запалване на автомобил е представена на фигурата:



Първоначално през бобината тече ток:

$$i_L(0-) = \frac{E_0}{R}$$

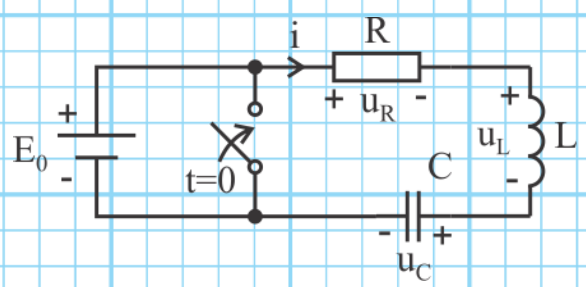
След това в моментът $t = 0$, захранването към бобината се прекъсва. Но тъй като за бобината е изпълнено условието $i_L(0+) = i_L(0-)$, при прекъсване на веригата, токът през бобината трябва да се запази. И тъй като първоначалната верига е прекъсната, токът ще протече от друго място. Това друго място са свещите на автомобила, които съдържат въздушна междина. При протичане на тока през въздушната междина се получава искра или дъга.

Преходни процеси от втори ред

Вериги от втори ред, са такива електрически вериги, които съдържат 2 елемента способни да задържат енергия (бобини или кондензатори). Такива вериги се характеризират с диференциално уравнение от втори ред.

Разряд на кондензатор в последователна RLC верига

Нека да разгледаме последователно съединение резистор R, бобина L и кондензатор С, които първоначално са били свързани към източник E_0.



Тъй като кондензаторът не пропуска постоянен ток, началните условия за веригата са:

$$u_L(0-) = u_L(0+) = 0\ [A]$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = E_0\ [V]$$

В момента от времето $t = 0$, ключът се затваря, при което RLC веригата се дава на късо. Тогава при $t \geq 0$ уравнението по ВЗК е:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = 0$$

$$\rightarrow\ i(t).R + L.\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)dt + u_C(0) = 0$$

За да премахнем интеграла, диференцираме уравнението:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{L.C}.i = 0$$

От веригите от първи ред вече знаем, че преходните процеси имат експоненциален характер, таке че нека да положим:

$$i = A.e^{pt}$$

За първата и втората производна на тока се получава:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(A.e^{pt})}{dt} = pA.e^{pt}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2(A.e^{pt})}{dt^2} = p^2 A.e^{pt}$$

Като заместим получените три зависимости, в диференциалното уравнение получаваме:

$$p^2 A.e^{pt} + \frac{R}{L}pA.e^{pt} + \frac{1}{L.C}A.e^{pt} = 0$$

или

$$\boxed{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{L.C} = 0}$$

Това уравнение се нарича характеристично на RLC контура и може да се представи в следния вид:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$$

където $\alpha = \frac{R}{2.L}$ се нарича коефициент на затихване.

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$ е кръговата честота на контура, наричана още резонансна честота.

Характеристичното уравнение има две решения:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Двете стойности p_{12} показват, че има два тока $i(t)$, които отчитат влиянието на двата реактивни елемента (бобина и кондензатор).

$$i_1 = A_1.e^{p_1 t}, \qquad i_2 = A_2.e^{p_2 t}$$

Като се има предвид, че разглеждаме линейна верига, принципът на наслагването (теоремата за суперпозицията) е в сила, т.е. пълното решение за тока във веригата е:

$$i(t) = A_1.e^{p_1 t} + A_2.e^{p_2 t}$$

В зависимост от вида на корените p_1 и p_2 са възможни три вида решения:

1. Ако $\alpha > \omega_0$ преходният процес е апериодичен;
2. Ако $\alpha < \omega_0$ преходния процес е псевдопериодичен;

3. Ако $\alpha = \omega_0$ преходният процес е критично апериодичен.

Апериодичен разряд

Ако $\alpha > \omega_0$ и двата корена p_1 и p_2 са отрицателни и реални числа. Това условие е изпълнено когато:

$$\frac{R}{2.L} > \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad \rightarrow \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Тогава преходния процес има следния вид:

$$\boxed{i(t) = A_1.e^{p_1 t} + A_2.e^{p_2 t}}$$

За да се определят интеграционните константи A_1 и A_2, уравнението трябва да бъде решено за момент от времето $t = 0+$. Но в случая има две неизвестни, и само едно уравнение. За целта се добавя второ уравнение, което представлява производната на първото:

$$\left| \begin{array}{l} i(t) = A_1.e^{p_1 t} + A_2.e^{p_2 t} \\ \dfrac{di(t)}{dt} = A_1.p_1.e^{p_1 t} + A_2.p_2.e^{p_2 t} \end{array} \right.$$

Сега трябва да решим тази система за $t = 0+$:

$$\left| \begin{array}{l} i(0+) = A_1.e^{0} + A_2.e^{0} \\ \left.\dfrac{di(t)}{dt}\right|_{t=0+} = A_1.p_1.e^{0} + A_2.p_2.e^{0} \end{array} \right.$$

Стойността на производната $\frac{di(t)}{dt}$ в момент от времето $t = 0+$ може да се определи от напрежението на бобината:

$$u_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{u_L(0+)}{L}$$

Уравнението по ВЗК за $t = 0 +$ е:

$$u_R(0+) + u_L(0+) + u_C(0+) = 0$$

$$\rightarrow \quad i(0+)R + u_L(0+) + u_C(0+) = 0$$

Знаем, че $i(0+) = i(0-) = 0$ и $u_C(0+) = u_C(0-) = E_0$, т.е.:

$$u_L(0+) = -u_C(0+) = -E_0$$

Следователно за производната на тока при $t = 0 +$ се получава:

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{u_L(0+)}{L} = -\frac{E_0}{L},$$

а нашата система става:

$$\left|\begin{matrix} 0 = A_1 + A_2 \\ -\dfrac{E_0}{L} = A_1.p_1 + A_2.p_2 \end{matrix}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\dfrac{E_0}{L} \end{vmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = Det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = p_2 - p_1$$

$$\Delta_1 = Det \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{E_0}{L} & p_2 \end{vmatrix} = p_2 + \frac{E_0}{L}$$

$$\Delta_1 = Det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & -\dfrac{E_0}{L} \end{vmatrix} = -\frac{E_0}{L} - p_1$$

Тогава решенията за A_1 и A_2 са:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p_2 + \frac{E_0}{L}}{p_2 - p_1}$$

$$A_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-\frac{E_0}{L} - p_1}{p_2 - p_1}$$

Падовете на напрежения върху елементите във веригата могат да се определят чрез тока:

$$u_R(t) = i(t).R = R.A_1.e^{p_1 t} + R.A_2.e^{p_2 t}$$

$$u_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} = L.A_1.p_1.e^{p_1 t} + L.A_2.p_2.e^{p_1 t}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt + u_C(0) = $$
$$= \frac{1}{p_1.C}A_1.e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2.C}A_2.e^{p_2 t} + E_0$$

Псевдо-периодичен разряд

Ако $\alpha < \omega_0$, корените p_1 и p_2 са комплексно-спрегнати числа:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + j\omega_D$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_D$$

където $j = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица, а $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ е честотата на затихването.

Токът във веригата отново има две съставки:

$$i(t) = A_1.e^{p_1 t} + A_2.e^{p_2 t}$$

Като заместим корените в горното уравнение получаваме:

$$i(t) = A_1.e^{(-\alpha+j\omega_D)t} + A_2.e^{(-\alpha-j\omega_D)t} = \\ = e^{-\alpha t}\left(A_1.e^{j\omega_D t} + A_2.e^{-j\omega_D t}\right)$$

Съгласно уравнението на Ойлер, $e^{\omega_D t}$ и $e^{-\omega_D t}$ могат да се запишат като:

$$e^{j\omega_D t} = \cos(\omega_D t) + j\sin(\omega_D t)$$

$$e^{-j\omega_D t} = \cos(\omega_D t) - j\sin(\omega_D t)$$

Тогава решението за тока е:

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1.e^{j\omega_D t} + A_2.e^{-j\omega_D t}\right) = \\ = e^{-\alpha t}(A_1\cos(\omega_D t) + jA_1\sin(\omega_D t) + A_2\cos(\omega_D t) \\ - jA_2\sin(\omega_D t))$$

За да опростим горното уравнение ще положим $B_1 = A_1 + A_2$ и $B_2 = j(A_1 - A_2)$:

$$\boxed{i(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos(\omega_D t) + B_2\sin(\omega_D t))}$$

Полученото уравнение е решението при псевдо-периодичен разряд. Константите B_1 и B_2 могат да бъдат определени аналогично на апериодичния разряд, като добавим второ уравнение, което е производна на първото.

$$\left| \begin{aligned} & i(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos(\omega_D t) + B_2\sin(\omega_D t)) \\ & \frac{di(t)}{dt} = -\alpha.e^{-\alpha t}(B_1\cos(\omega_D t) + B_2\sin(\omega_D t)) + \\ & \qquad +e^{-\alpha t}(-B_1\omega_D\sin(\omega_D t) + B_2\omega_D\cos(\omega_D t)) \end{aligned} \right.$$

Решаваме го за момент от времето $t = 0+$:

$$\left| \begin{array}{l} i(0+) = e^0(B_1\cos(0) + B_2\sin(0)) \\ \left.\dfrac{di(t)}{dt}\right|_{t=0+} = -\alpha.e^0(B_1\cos(0) + B_2\sin(0)) + \\ \qquad +e^0(-B_1\omega_D\sin(0) + B_2\omega_D\cos(0)) \end{array} \right.$$

като решенията са:

$$B_1 = i(0+) = i(0-) = 0$$

$$B_2 = \frac{E_0}{L\omega_D}$$

Критично-апериодичен разряд

В случай, че $\alpha = \omega_0$, двата корена са реални и равни: $p_1 = p_2$. Тази ситуация се нарича критично-апериодичен разряд, като характерно за него е, че преходния процес приключва най-бързо.

Условието за критично-апериодичен разряд е:

$$\frac{R}{2.L} = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad \rightarrow \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

За да установим решението на преходния процес, този път ще се върнем малко по-назад. Тъй като $\alpha = \omega_0$, ще пренапишем диференциалното уравнение по следния начин:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{d^2i}{dt^2} + \alpha\frac{di}{dt} + \alpha\frac{di}{dt} + \alpha^2 i =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) + \alpha\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}+\alpha i\right)+\alpha\left(\frac{di}{dt}+\alpha i\right)=0$$

Ако в горното уравнение положим $f=\frac{di}{dt}+\alpha i$, получаваме диференциално уравнение от първи ред

$$\frac{df}{dt}+\alpha f=0,$$

чието решение ни е известно:

$$f=A_1.e^{-\alpha t}$$

Знаем, че A_1 е константа. Заместваме $f=\frac{di}{dt}+\alpha i$:

$$\frac{di}{dt}+\alpha i=A_1.e^{-\alpha t}\quad\rightarrow\quad e^{\alpha t}\frac{di}{dt}+e^{\alpha t}\alpha i=A_1$$

Последното уравнение може да се запише по следния начин:

$$e^{\alpha t}\frac{di}{dt}+e^{\alpha t}\alpha i=e^{\alpha t}\frac{di}{dt}+i\frac{de^{\alpha t}}{dt}=\frac{d}{dt}(ie^{\alpha t})=A_1,$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}(ie^{\alpha t})=A_1$$

Ако интегрираме последното уравнение, получаваме:

$$ie^{\alpha t}=A_1.t+A_2$$

или

$$\boxed{i(t) = (A_1.t + A_2).e^{-\alpha t}}$$

където A_2 също е константа.

Константите A_1 и A_2 се определят аналогично на другите две ситуации, като решим долната система за $t = 0+$:

$$\left| \begin{array}{l} i(t) = (A_1.t + A_2).e^{-\alpha t} \\ \dfrac{di(t)}{dt} = A_1.e^{-\alpha t} - (A_1.t + A_2).\alpha.e^{-\alpha t} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} i(0+) = (A_1.0 + A_2).e^{0} \\ \left.\dfrac{di(t)}{dt}\right|_{t=0+} = A_1.e^{0} - (A_1.0 + A_2).\alpha.e^{0} \end{array} \right.$$

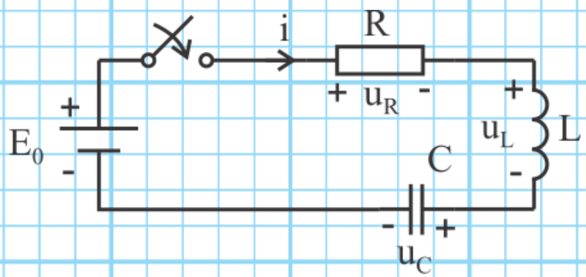
Решенията са:

$$A_2 = i(0+) = 0$$

$$A_1 = \left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{E_0}{L}$$

<u>Включване на последователна RLC верига към напрежение</u>

Нека разгледаме ситуацията, при която последователна RLC верига се включва към източник на напрежение E_0.



Като се има предвид, че за $t < 0$ бобината и кондензатора не са били свързани към източник, началните условия са нулеви:

$$u_C(0-) = u_C(0+) = 0$$

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 0$$

За $t \geq 0$ можем да запишем уравнение по ВЗК:

$$R.i + L.\frac{di}{dt} + u_C = E_0$$

Този път ще определим $u_C(t)$, така че заместваме $i = C\frac{du_C}{dt}$:

$$R.C\frac{du_C}{dt} + LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = E_0$$

т.е.

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E_0}{LC}$$

Решението на това уравнение има две съставки – преходната съставка $u_{\text{ПС}}(t)$ и установената съставка $u_C(\infty)$:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + u_{\text{ПС}}(t)$$

Установената съставка е:

$$u_C(\infty) = E_0$$

Преходната съставка е същата като при разряд на кондензатор в последователна RLC верига, т.е. характеристичното уравнение е същото:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{L.C} = 0$$

Това означава, че отново има три възможни решения, но този път $u_C(t)$ се стреми към установената си съставка E_0:

Решенията при трите вида преходни процеса са:

1. Апериодичен преходен процес:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_1 . e^{p_1 t} + A_2 . e^{p_2 t}$$

където $p_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

2. Псевдо-периодичен преходен процес:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + e^{-\alpha t}(B_1 \cos(\omega_D t) + B_2 \sin(\omega_D t))$$

където $p_{12} = -\alpha \pm j\omega_D = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

3. Критично-апериодичен преходен процес:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + (A_1 . t + A_2). e^{-\alpha t}$$

където $p_1 = p_2 = \alpha$.

Анализ на преходни процеси

Класически метод за анализ на преходни процеси

Класическия метод за анализ на преходния процес включва следните стъпки:

Стъпка 1. Чертае се схемата за $t < 0$ и се определят началните условия $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$;

Стъпка 2. Чертае се схемата за $t \geq 0$ и се записва система уравнения по кой да е от изучените методи;

Стъпка 3. Определя се характеристичното уравнение на веригата и се определят корените му.

Стъпка 4. Решава се системата от стъпка 2 за момент от времето $t = \infty$;

Стъпка 5. Решава се уравнението на преходния процес за момент от времето $t = 0+$ и ако е нужно предварително се решава системата от стъпка 2 за $t = 0+$.

Решението на **Стъпка 3** може да стане по 2 начина:

Първи начин: Създава се операторна заместваща схема на веригата за $t \geq 0$, като се замени:

$$C \quad \rightarrow \quad \frac{1}{pC}$$

$$L \quad \rightarrow \quad pL$$

След това схемата се пасивира (всички източници на напрежение се заместват с късо съединение, а източниците на ток – с прекъсната верига) и се прекъсва на кое да е място, като се търси входното и съпротивление $Z(p)$:

Характеристичното уравнение се определя чрез:

$$Z(p) = 0$$

Втори начин: В системата от стъпка 2 се замества:

$$\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad p.i$$

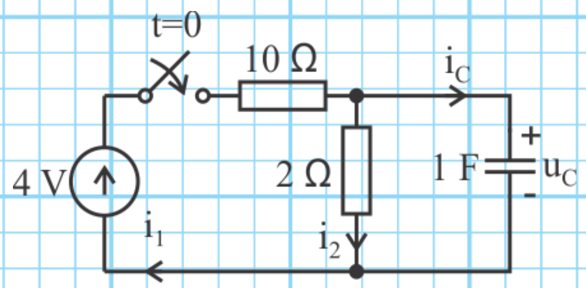
$$\int idt \quad \rightarrow \quad \frac{1}{p}i$$

В новополучената система се определя детерминантата на матрицата с коефициентите и се приравнява на 0:

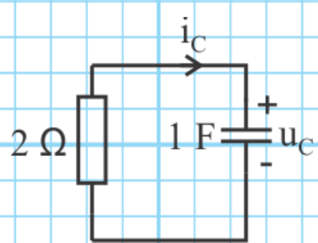
$$\Delta = 0$$

Решението дава корените на характеристичното уравнение.

Пример: Да се определят токът i_C и напрежението u_C на кондензатор за следната постояннотокова верига:

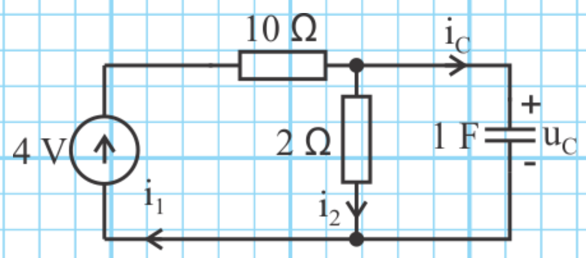


Стъпка 1. Чертаем схемата за $t < 0$ за да определим $v_C(0-)$.



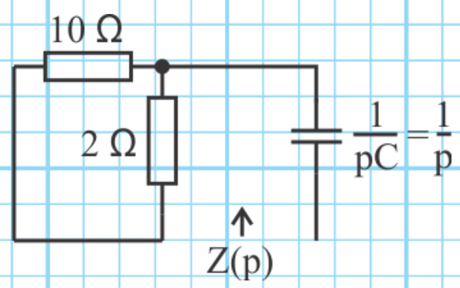
Кондензаторът не е свързан към напрежение, и следователно приемаме, че $u_C(0-) = 0\ [V]$.

Стъпка 2. Чертаем схемата за $t \geq 0$ и записваме система уравнения по някой от методите (в случая по метода със законите на Кирхоф).



$$\begin{vmatrix} i_1 = i_2 + i_C \\ 4 = 10i_1 + 2i_2 \\ u_C - 2i_2 = 0 \end{vmatrix}$$

Стъпка 3. Намираме характеристичното уравнение, като съставяме пасивна операторна заместваща схема и я прекъсваме на произволно място:



Входното съпротивление $Z(p)$ е:

$$Z(p) = \frac{10.2}{10+2} + \frac{1}{p} = 0 \quad \rightarrow \quad p = -\frac{12}{20} = -0{,}6\ [\mathrm{s}^{-1}]$$

Напрежението на кондензатора се изменя съгласно:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + Ae^{pt} = u_C(\infty) + Ae^{-0{,}6t}$$

Стъпка 4. Решаваме системата за $t = \infty$:

При $t = \infty$ режимът е установен, т.е. през кондензатора не тече ток: $i_C(\infty) = 0$ [A]

$$\left| \begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_C \\ 4 &= 10i_1 + 2i_2 \\ u_C - 2i_2 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \rightarrow \quad \left| \begin{aligned} i_1(\infty) &= i_2(\infty) + 0 \\ 4 &= 10i_1(\infty) + 2i_2(\infty) \\ u_C(\infty) - 2i_2(\infty) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Заместваме първото уравнение във второто:

$$\left| \begin{aligned} 4 &= 10i_2(\infty) + 2i_2(\infty) \\ u_C(\infty) - 2i_2(\infty) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Получаваме $i_2(\infty) = \frac{4}{12} \quad \rightarrow \quad u_C(\infty) = 2\frac{4}{12} = \frac{2}{3} = 0{,}67$ [V]

Стъпка 5. Решаваме задачата за $t = 0+$, за да определим A:

Знаем, че $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$. Следователно:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + Ae^{-0{,}6t} \quad \rightarrow \quad u_C(0+) = 0 = 0{,}67 + Ae^0$$

$$\rightarrow \quad A = -0{,}67 \text{ [V]}$$

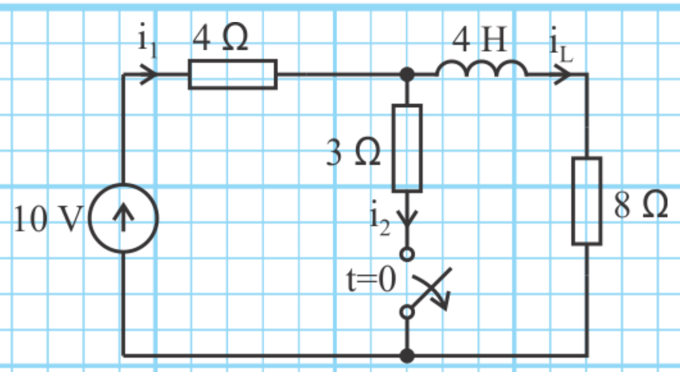
Следователно пълното решение е:

$$u_C(t) = 0{,}67 - 0{,}67e^{-0{,}6t} \text{ [V]}$$

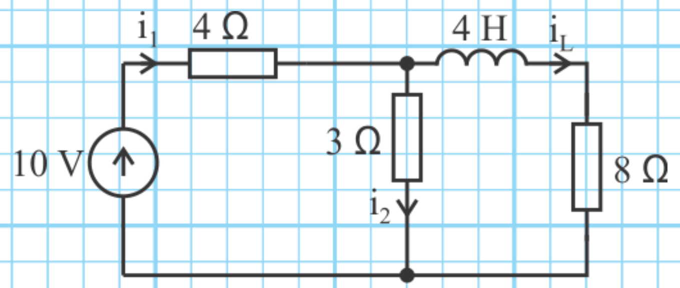
За тока на кондензатора се получава:

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = 0{,}402e^{-0{,}6t} \text{ [A]}$$

Пример: Да се определят токът i_L и напрежението u_L на бобината за следната постояннотокова верига:



Стъпка 1. Чертаем схемата за $t < 0$ за да определим $i_L(0-)$:



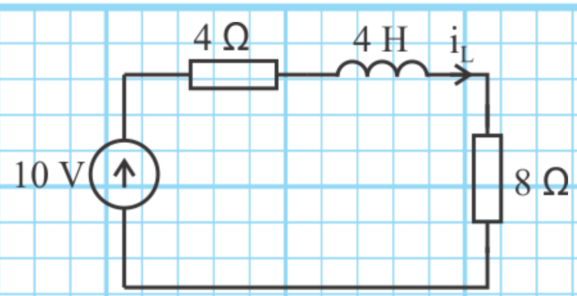
$$\left| \begin{array}{l} i_1 = i_2 + i_L \\ 10 = 4i_1 + 3i_2 \\ 8i_L - 3i_2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix}$$

В случая ни интересува единствено токът през бобината, така че определяме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 12 - 32 = -68$$

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -30 \quad \rightarrow \quad i_L(0-) = \frac{-30}{-68} = 0{,}44\ [\text{A}]$$

Стъпка 2. Чертаем схемата за $t \geq 0$ и записваме система уравнения по някой от методите:



$$|u_L + 4i_L + 8i_L = 10$$

Стъпка 3. Намираме характеристичното уравнение, като в системата заместваме $\frac{di_L}{dt} \quad \rightarrow \quad pi_L$.

$$\left| L\frac{di_L}{dt} + 12i_L = 10 \quad \rightarrow \quad |4pi_L + 12i_L = 10\right.$$

В случая матрицата на коефициентите е единична матрица:

$$|12 + 4p| = 12 + 4p = 10 \quad \rightarrow \quad p = -\frac{2}{4} = -\,0{,}5\ [A]$$

Решението на задачата има следната форма:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + Ae^{pt} = i_L(\infty) + Ae^{-0{,}5t}$$

Стъпка 4. Решаваме системата за момент от времето $t = \infty$

При $t = \infty$ режимът е установен, т.е. върху бобината няма пад и $u_L(\infty) = 0\ [V]$

$$u_L + 12i_L = 10 \quad \rightarrow \quad 0 + 12i_L(\infty) = 10 \quad \rightarrow \quad i_L(\infty) = 0{,}83\ [A]$$

Стъпка 5. Решаваме задачата за $t = 0+$ за да определим A:

За $t = 0+$ е известно $i_L(0+) = i_L(0-) = 0{,}44\ [A]$

$$i_L(0+) = 0{,}44 = 0{,}83 + Ae^0 \quad \rightarrow \quad A = -0{,}39\ [A]$$

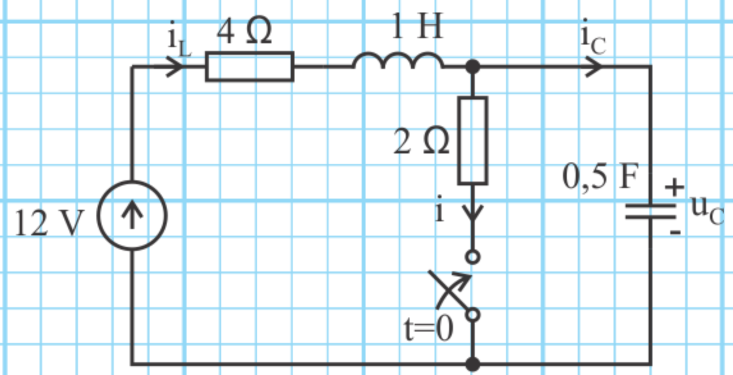
Следователно пълното решение е:

$$i_L(t) = 0{,}83 - 0{,}39e^{-0{,}5t}\ [A]$$

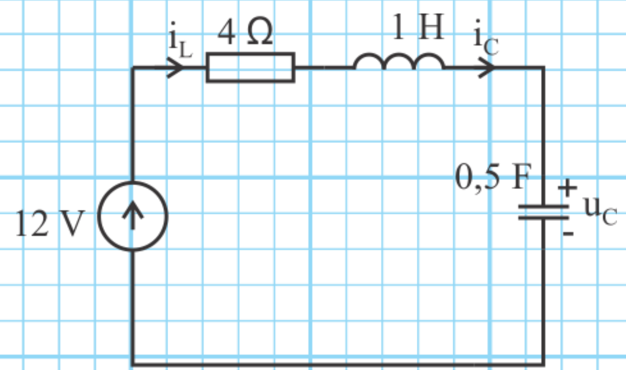
От там за напрежението върху бобината се получава:

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 4.0{,}39.0{,}5.e^{-0{,}5t} = 0{,}78e^{-0{,}5t}\ [V]$$

Пример: Да се определят напрежението на кондензатора $u_C(t)$ за веригата.



Стъпка 1. Чертаем схемата за $t < 0$ и определяме началните условия:



$$i_L(0-) = 0$$

От ВЗК определяме $u_C(0-)$:

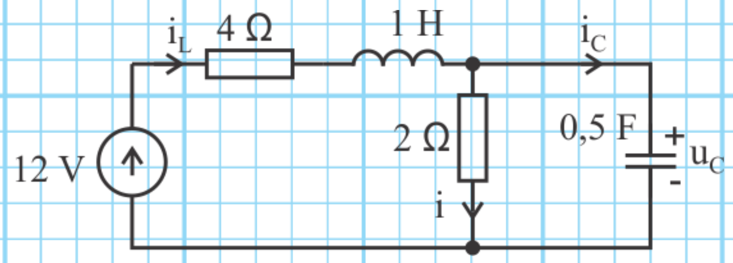
$$12 = i_L(t).R + u_L(t) + u_C(t)$$

Тъй като $i_L(0-) = 0$ и $u_L(0-) = 0$ получаваме:

$$u_C(0-) = 12\ [V]$$

$$i_L(0-) = 0\ [A]$$

Стъпка 2. Чертаем схемата за $t \geq 0$ и записваме системата уравнения по метода със законите на Кирхоф:



$$\left| \begin{array}{l} i_L(t) = i_C(t) + i(t) \\ 12 = 4i_L(t) + u_L(t) + 2i(t) \\ u_C(t) - 2i(t) = 0 \end{array} \right.$$

Стъпка 3. Определяме характеристичното уравнение, като заместим $\int i dt \rightarrow \frac{1}{p} i$ и $\frac{di}{dt} \rightarrow p.i.$

$$\left| \begin{array}{l} i_L = i_C + i \\ 12 = 4i_L + L\dfrac{di_L}{dt} + 2i \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C dt - 2i = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} i_C + i - i_L = 0 \\ 4i_L + pi_L + 2i = 12 \\ \dfrac{2}{p} i_C - 2i = 0 \end{array} \right.$$

Създаваме матрицата на коефициентите и приравняваме детерминантата и на 0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4+p & 0 & 2 \\ 0 & \dfrac{2}{p} & -2 \end{vmatrix} = (4+p)\frac{2}{p} + \frac{4}{p} + 2(4+p) = 0$$

$$4 + p + 2 + 4p + p^2 = 0 \rightarrow \quad p^2 + 5p + 6 = 0$$

$$p_1 = -2\ [s^{-1}], \quad p_2 = -3\ [s^{-1}]$$

Корените са реални, следователно решението има следния вид:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_1.e^{-2t} + A_2.e^{-3t}$$

Стъпка 4. Решаваме системата за $t = \infty$. Знаем, че режимът е установен, т.е. $i_C(\infty) = 0\ [A]$ и $u_L(\infty) = 0\ [V]$:

$$\left|\begin{array}{l} i_L(t) = i_C(t) + i(t) \\ 12 = 4i_L(t) + u_L(t) + 2i(t) \\ u_C(t) - 2i(t) = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{l} i_L(\infty) = 0 + i(\infty) \\ 12 = 4i_L(\infty) + 0 + 2i(\infty) \\ u_C(\infty) - 2i(\infty) = 0 \end{array}\right.$$

Решенията са:

$$i_L(\infty) = i(\infty) = \frac{12}{6} = 2\ [A]$$

$$u_C(\infty) = 2i(\infty) = 4\ [V]$$

Стъпка 5. Има две неизвестни, т.е. ни е нужно второ уравнение. Определяме производната на първото.

$$\left|\begin{array}{l} u_C(t) = 4 + A_1.e^{-2t} + A_2.e^{-3t} \\ \dfrac{du_C(t)}{dt} = -2A_1.e^{-2t} - 3A_2.e^{-3t} \end{array}\right.$$

За да решим горната система за момент от времето $t = 0+$ е нужно да определим производната $\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0+}$. Това може да стане от уравнението по ПЗК:

$$i_L(0+) = i(0+) + i_C(0+)$$

Тъй като резистора и кондензатора са свързани паралелно, токът през резистора и токът през кондензатора са:

$$i(0+) = \frac{u_C(0+)}{2}$$

$$i_C(0+) = \frac{1}{2}\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0+}$$

Тогава уравнението по ПЗК става:

$$i_L(0+) = i(0+) + i_C(0+) = \frac{u_C(0+)}{2} + \frac{1}{2}\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0+}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{12}{2} + \frac{1}{2}\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0+} \rightarrow \frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0+} = -12\left[\frac{V}{s}\right]$$

Сега можем да решим системата за $t = 0+$:

$$\left| \begin{array}{l} u_C(0+) = 4 + A_1.e^0 + A_2.e^0 \\ \frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0+} = -2A_1.e^0 - 3A_2.e^0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} 12 = 4 + A_1 + A_2 \\ -12 = -2A_1 - 3A_2 \end{array} \right.$$

Решенията са:

$$A_1 = 12\ [V]; \qquad A_2 = -4\ [V]$$

Следователно пълното решение за $u_C(t)$ е:

$$u_C(t) = 4 + 12.e^{-2t} - 4.e^{-3t}\ [V]$$

<u>Операторен метод за анализ на преходни процеси</u>

Очаквайте скоро!