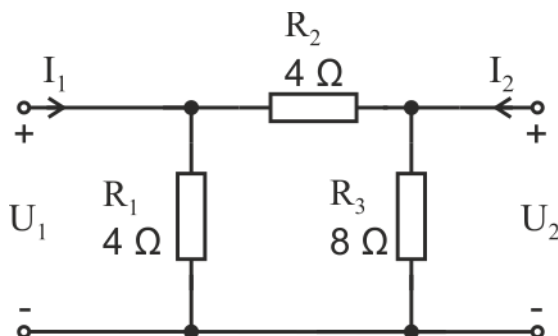


АНАЛИЗ НА ВЕРИГИ С ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

Задача 1. Да се определят H параметрите на четириполусника.



Системата с H параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

За да определим H параметрите е нужно да анализираме схемата при $I_1 = 0$ и $U_2 = 0$. **При $I_1 = 0$** системата с H параметрите става:

$$\begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2 \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = 0 + H_{12}U_2 \\ I_2 = 0 + H_{22}U_2 \end{cases}$$

Следователно 2 от параметрите са:

$$H_{12} = \frac{U_1}{U_2} \quad H_{22} = \frac{I_2}{U_2}$$

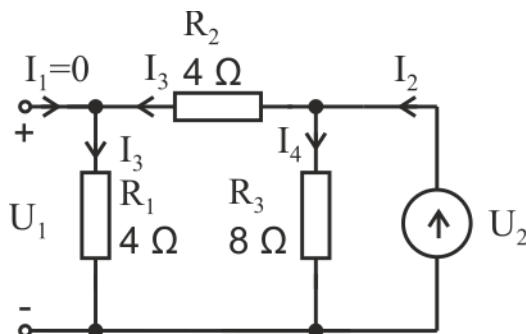
При $U_2 = 0$ системата добива следния вид:

$$\begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2 \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + 0 \\ I_2 = H_{21}I_1 + 0 \end{cases}$$

Следователно другите два параметъра са:

$$H_{11} = \frac{U_1}{I_1} \quad H_{21} = \frac{I_2}{I_1}$$

Нека първо да разгледаме четириполусника при празен ход на входа ($I_1 = 0$), като го захраним от към изхода с източник на напрежение U_2 :



Трябва да изразим U_1 и I_2 (U_2 е известно). R_1 и R_2 са свързани последователно, т.е. тяхното еквивалентно съпротивление е:

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 4 + 4 = 8 [\Omega]$$

R_{12} е свързано паралелно на източникът U_2 . Следователно токът I_3 е:

$$I_3 = \frac{U_2}{R_{12}} = \frac{U_2}{8}$$

U_1 е всъщност напрежението върху R_1 , т.е.:

$$U_1 = R_1 I_3 = 4 I_3 = 4 \frac{U_2}{8} = 0,5 U_2$$

Еквивалентното съпротивление на трите резистора, гледано от към източника, е:

$$R_{123} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 [\Omega]$$

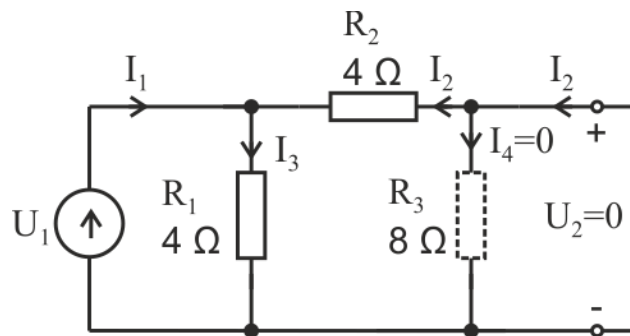
Следователно токът I_2 е:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_{123}} = 0,25 U_2$$

Вече можем да изразим два от H параметрите:

$$H_{12} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{0,5 U_2}{U_2} = 0,5 \quad H_{22} = \frac{I_2}{U_2} = \frac{0,25 U_2}{U_2} = 0,25 [S]$$

Сега ще анализираме четириполусника при късо съединение на изхода ($U_2 = 0$):



Напрежението U_1 е известно, а трябва да намерим I_1 и I_2 . Резисторът R_3 е шунтиран от късото съединение, така че във веригата остават само R_1 и R_2 . Следователно R_2 е свързано паралелно на U_1 и можем да запишем следното уравнение по ВЗК:

$$U_1 = -R_2 \cdot I_2 \rightarrow U_1 = -4 I_2 \rightarrow I_2 = -\frac{1}{4} U_1 = -0,25 U_1$$

Еквивалентното съпротивление на веригата, гледано от към източника, е:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2 [\Omega]$$

По закона на Ом токът I_1 е:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_{12}} = \frac{1}{2} U_1 = 0,5 U_1$$

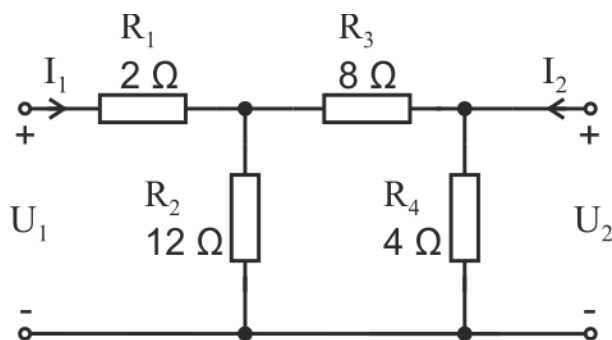
Следователно другите 2 параметъра са:

$$H_{11} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_1}{0,5 U_1} = 2 [\Omega] \quad H_{21} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-0,25 U_1}{0,5 U_1} = -0,5$$

H параметрите на четириполусника са:

$$H = \begin{bmatrix} 2 [\Omega] & 0,5 \\ -0,5 & 0,25 [S] \end{bmatrix}$$

Задача 2. Да се определят Z параметрите на четириполюсника.



Системата със Z параметри има следния вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

За да ги определим трябва да решим системата при $I_1 = 0$ и при $I_2 = 0$.

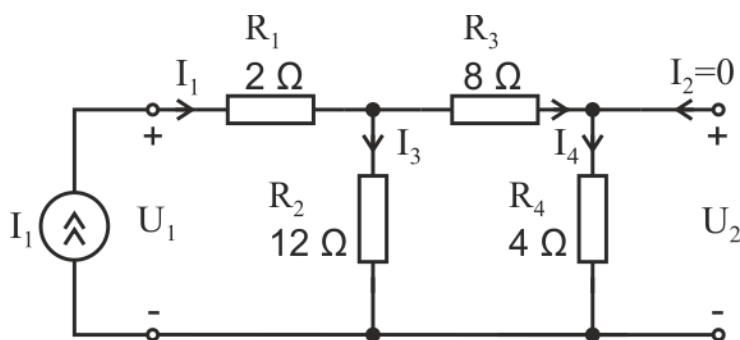
При $I_1 = 0$ от системата със Z параметрите определяме 2 от параметрите:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = 0 + Z_{12}I_2 \rightarrow Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = 0 + Z_{22}I_2 \rightarrow Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \end{aligned}$$

При $I_2 = 0$ от системата със Z параметрите определяме другите 2:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = Z_{11}I_1 + 0 \rightarrow Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = Z_{21}I_1 + 0 \rightarrow Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \end{aligned}$$

Първо ще разгледаме ситуацията на празен ход на изхода на четириполюсника ($I_2 = 0$), ако входът се захранва от източник на ток I_1 :



Нужно е да определим U_1 и U_2 . R_3 и R_4 са свързани последователно, така че еквивалентното съпротивление на R_2 , R_3 и R_4 е:

$$R_{234} = \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

За напрежението върху R_{234} се получава:

$$U_{234} = I_1 R_{234} = I_1 \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Следователно токовете I_3 и I_4 са:

$$I_3 = \frac{U_{234}}{R_2} = I_1 \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{R_2} = I_1 \frac{8 + 4}{12 + 8 + 4} = 0,5I_1$$

$$I_4 = \frac{U_{234}}{R_3 + R_4} = I_1 \frac{R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{(R_3 + R_4)} = I_1 \frac{12}{12 + 8 + 4} = 0,5I_1$$

За да определим напреженията U_1 и U_2 записваме 2 уравнения по ВЗК:

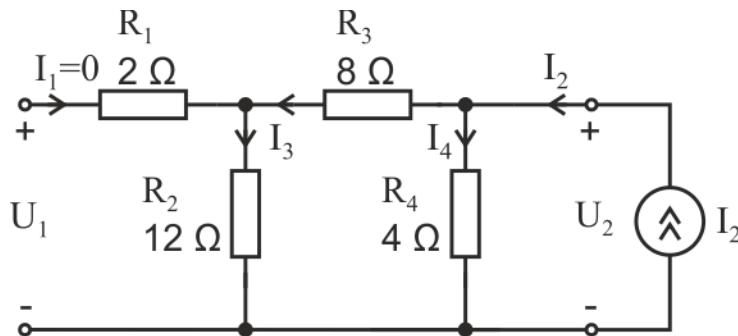
$$U_1 = R_1 I_1 + R_2 I_3 = 2I_1 + 12I_3 = 2I_1 + 12 \cdot 0,5I_1 = 8I_1$$

$$U_2 = R_4 I_4 = 4I_4 = 4 \cdot 0,5I_1 = 2I_1$$

Следователно 2 от Z параметрите са:

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{8I_1}{I_1} = 8 [\Omega] \quad Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{2I_1}{I_1} = 2 [\Omega]$$

Следваща стъпка е да анализираме схемата при празен ход на входа на веригата ($I_1 = 0$), ако изходът се захранва от източник на ток I_2 :



Отново е нужно да определим U_1 и U_2 . В случая R_2 и R_3 са свързани последователно, така че еквивалентното съпротивление на R_2 , R_3 и R_4 е:

$$R_{234} = \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

За напрежението върху R_{234} се получава:

$$U_{234} = I_2 R_{234} = I_2 \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Следователно токовете I_3 и I_4 са:

$$I_3 = \frac{U_{234}}{R_2 + R_3} = I_2 \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{(R_2 + R_3)} = I_2 \frac{4}{4 + 8 + 12} = 0,1667I_2$$

$$I_4 = \frac{U_{234}}{R_4} = I_2 \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{R_4} = I_2 \frac{8 + 12}{4 + 8 + 12} = 0,8333I_2$$

За да определим U_1 и U_2 записваме 2 уравнения по ВЗК:

$$U_1 = R_1 I_1 + R_2 I_3 = 2I_1 + 12I_3 = 0 + 12 \cdot 0,1667I_2 = 2I_2$$

$$U_2 = R_4 I_4 = 4I_4 = 4 \cdot 0,8333I_2 = 3,33I_2$$

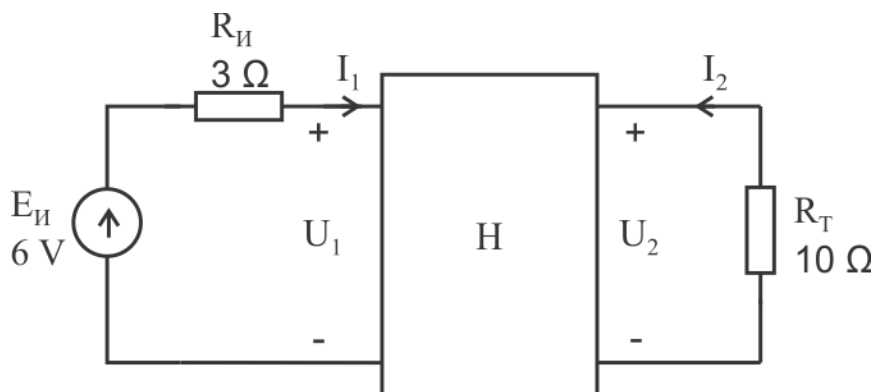
Вече можем да определим другите 2 параметъра:

$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} = \frac{2I_2}{I_2} = 2 [\Omega] \quad Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{3,33I_2}{I_2} = 3,33 [\Omega]$$

Следователно Z параметрите на четириполюсника са:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 [\Omega] & 2 [\Omega] \\ 2 [\Omega] & 3,33 [\Omega] \end{bmatrix}$$

Задача 3. Да се определят токът и мощността на товара R_T , ако четириполусникът е зададен с H параметрите си: $H = \begin{bmatrix} 100 [\Omega] & 0,01 \\ 10 & 200 [mS] \end{bmatrix}$.



Първо записваме система уравнения по законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} 6 = 3I_1 + U_1 \\ 0 = U_2 + 10I_2 \end{cases}$$

Знаем, че системата с хибридните параметри на четириполусника е:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = 100I_1 + 0,01U_2 \\ I_2 = 10I_1 + 0,200U_2 \end{cases}$$

Тогава нашата система по законите на Кирхоф става:

$$\begin{cases} 6 = 3I_1 + U_1 \\ 0 = U_2 + 10I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 = 3I_1 + 100I_1 + 0,01U_2 \\ 0 = U_2 + 10(10I_1 + 0,2U_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 = 103I_1 + 0,01U_2 \\ 0 = 3U_2 + 100I_1 \end{cases}$$

В матричен вид:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 103 & 0,01 \\ 100 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 103 & 0,01 \\ 100 & 3 \end{vmatrix} = 103 \cdot 3 - 100 \cdot 0,01 = 308$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 103 & 6 \\ 100 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 \cdot 100 = -600$$

Тогава напрежението върху товара е:

$$U_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-600}{308} = -1,95 [V]$$

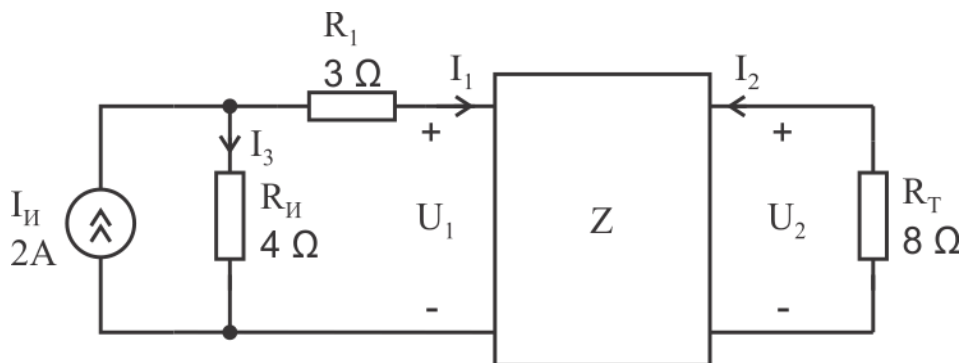
Токът I_2 можем да определим от уравнението по ВЗК за изхода на четириполусника:

$$0 = U_2 + 10I_2 \rightarrow I_2 = -\frac{U_2}{R_T} = -\frac{-1,95}{10} = 195 [mA]$$

Следователно мощността, разсейвана в товара, е:

$$P_{RT} = U_2 I_2 = (-1,95) \cdot (195 \cdot 10^{-3}) = 0,38 [W]$$

Задача 4. Да се определят токът и мощността на товара R_T , ако четириполюсният е дефиниран със Z параметрите си: $Z = \begin{bmatrix} 8 [\Omega] & -3 [\Omega] \\ -4 [\Omega] & 9 [\Omega] \end{bmatrix}$.



Първо ще запишем система уравнения по някой от методите (в случая по метода със законите на Кирхоф):

$$\begin{cases} I_{\text{И}} = I_1 + I_3 \\ U_2 = -R_T I_2 \\ U_1 = R_{\text{И}} I_3 - R_1 I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = I_1 + I_3 \\ U_2 = -8I_2 \\ U_1 = 4I_3 - 3I_1 \end{cases}$$

Знаем, че системата със Z параметрите е:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_1 = 8I_1 - 3I_2 \\ U_2 = -4I_1 + 9I_2 \end{cases}$$

Тогава системата по законите на Кирхоф става:

$$\begin{cases} 2 = I_1 + I_3 \\ U_2 = -8I_2 \\ U_1 = 4I_3 - 3I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = I_1 + I_3 \\ -4I_1 + 9I_2 = -8I_2 \\ 8I_1 - 3I_2 = 4I_3 - 3I_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = I_1 + I_3 \\ 0 = 4I_1 - 17I_2 \\ 0 = 3I_2 + 4I_3 - 11I_1 \end{cases}$$

В матричен вид:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 0 \\ -11 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 0 \\ -11 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -68 + 12 - 187 = -234$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -32$$

Тогава токът през товара е:

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-32}{-234} = 0,14 \text{ [A]},$$

а за мощността, разсейвана в него, се получава:

$$P_{RT} = I_2^2 R_T = 0,14^2 \cdot 8 = 0,15 \text{ [W]}$$