Анализ на вериги при установен несинусоидален режим

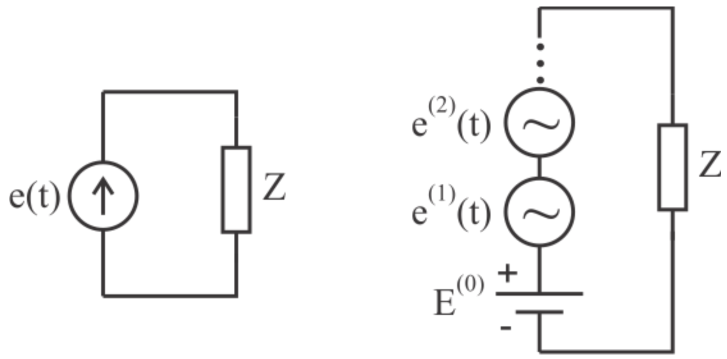
1. Въведение

Всеки периодичен несинусоидален сигнал може да бъде разложен в ред на Фурие, т.е. да се представи като сума от синусоидални съставки, наречени хармоници:

$$e(t) = E^{(0)} + E_m^{(1)}\sin\left(\omega t + \varphi^{(1)}\right) + E_m^{(2)}\sin\left(2\omega t + \varphi^{(2)}\right) + \cdots =$$
$$= E^{(0)} + e^{(1)}(t) + e^{(2)}(t) + \cdots$$

където E_0 е постоянната съставка, E_k - амплитудата на k-тия хармоник, а $\varphi^{(k)}$ – началната фаза на k-тия хармоник.

Можем да заменим източникът на напрежение $e(t) = E^{(0)} + e^{(1)}(t) + e^{(2)}(t) + \cdots$, с последователно съединени източници $E^{(0)}$, $e^{(1)}(t)$, $e^{(2)}(t)$ и т.н. Тъй като разглеждаме линейни вериги можем да приложим теоремата на Суперпозицията (принципът на наслагването) и да решим задачата за всеки източник (хармоник) по отделно.



Нека бобината и кондензатора са зададени съответно с техните индуктивност L и капацитет C. Техните съпротивления ще бъдат различни за всеки хармоник, т.е. $Z = R + j(X_L - X_C)$ ще има различна големина за всеки хармоник.

При честота f реактивните съпротивленията са:

$$X_L = 2\pi f L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C}$$

при честота $2f$ са:

$$X_L = 2\pi(2f)L = 2\omega L \qquad X_C = \frac{1}{2\pi(2f)C} = \frac{1}{2\omega C}$$

при честота $3f$ са:

$$X_L = 2\pi(3f)L = 3\omega L \qquad X_C = \frac{1}{2\pi(3f)C} = \frac{1}{3\omega C}$$

и т.н. Ефективната стойност на несинусоидалните токове и напрежения се определя с:

$$U = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \left(\frac{U_m^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_m^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots} = \sqrt{(U^{(0)})^2 + \frac{\left(U_m^{(1)}\right)^2 + \left(U_m^{(1)}\right)^2 + \cdots}{2}}$$

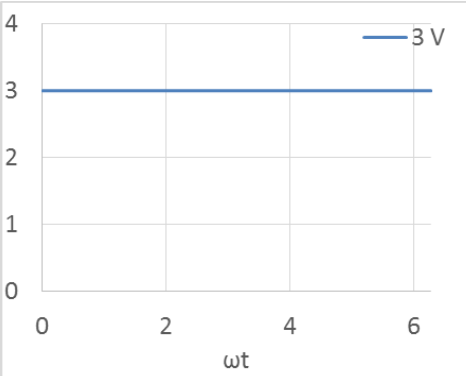
Активната мощност в несинусоидални вериги се определя с:

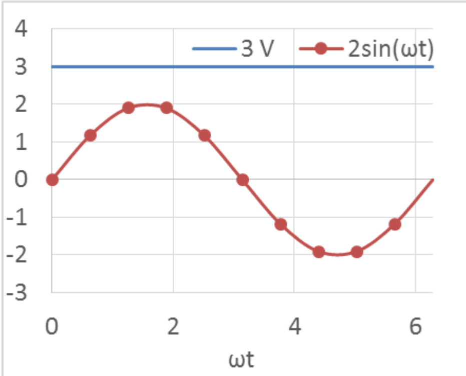
$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + \cdots$$

2. Решени задачи

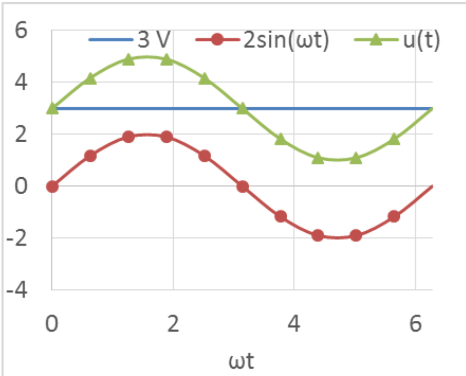
Задача 1. Да се начертае несинусоидалното напрежение $u(t) = 3 + 2\sin \omega t\ [V]$.

Първо ще начертаем постоянната съставка $3\,[V]$, а след това ще добавим хармоничната съставка $2\sin \omega t\ [V]$.





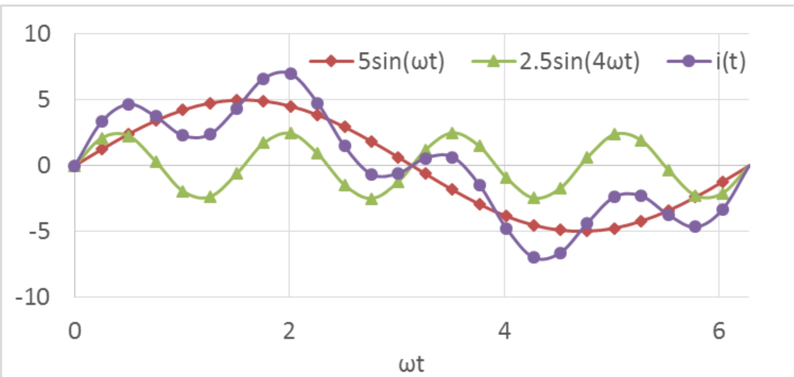
Накрая ще ги съберем графично за да получим $\mathrm{u(t)}$:



Вижда се, че като резултат $2\sin \omega t$ се изменя около $3\ V$, вместо около $0\ V$.

Задача 2. Да се начертае несинусоидалният ток $i(\mathrm{t}) = 5\sin \omega t + 2{,}5\sin 4\omega t$

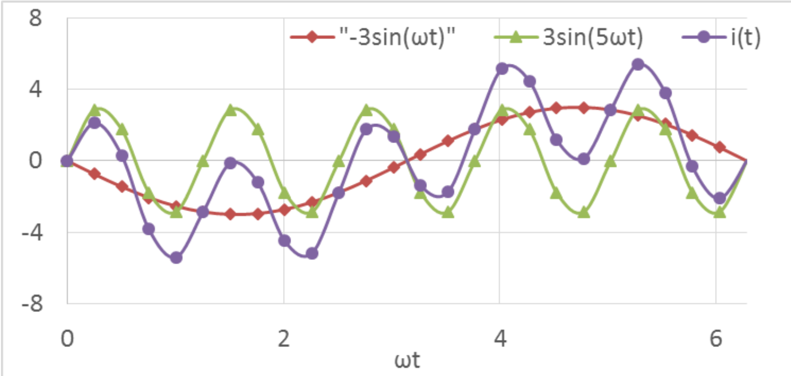
Отново първо се начертава основния хармоник $5\sin \omega t$, след това 4-ти хармоник $2{,}5\sin 4\omega t$ и накрая се събират графично.



Вижда се, че като резултат $2{,}5\sin 4\omega t$ се изменя около $5\sin \omega t$, вместо около 0 A.

Задача 3. Да се начертае несинусоидалният ток $i(t) = -3\sin \omega t + 3\sin 5\omega t$.

Първо се начертава първия хармоник $-3\sin\omega t$, след това 5-тия хармоник $3\sin 5\omega t$. Накрая двата сигнала се събират графично.



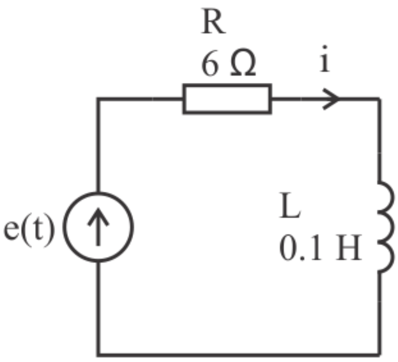
Вижда се, че като резултат $3\sin 5\omega t$ се изменя около $-3\sin\omega t$, вместо около $0\ A$.

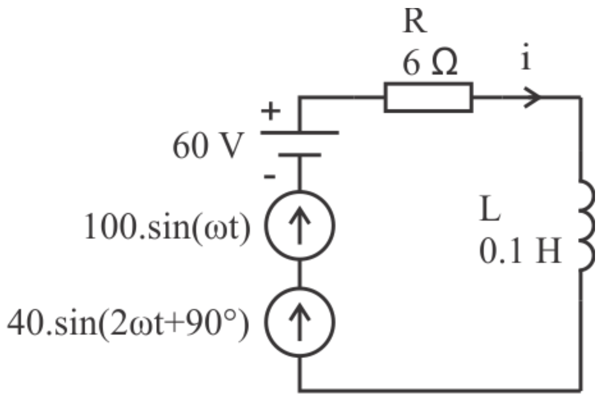
Задача 4. Дадена е схема, която се захранва от несинусоидален източник на напрежение $e(\mathrm{t}) = 60 + 100\sin(200t) + 40\sin(400t + 90°)\ V$:

а) За всяка от хармоничните съставки да се определят реактивните съпротивления, да се начертае еквивалентна заместваща схема и да се определи тока във веригата;

б) Да се определят моментната и ефективна стойност на тока $i(t)$ =? I =?

в). Да се определи активната мощност на резистора P_R =?



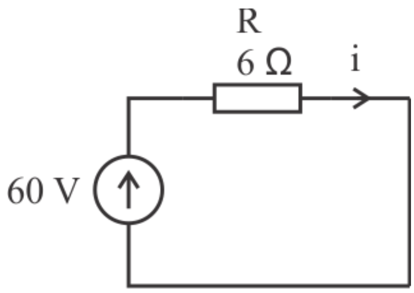


Решение а)

Тъй като схемата е линейна, прилагаме теоремата за Суперпозицията и решаваме задачата за всеки източник (хармоник) по отделно.

<u>Решаваме за постоянната съставка $E^{(0)} = 60\ [V]$</u>

В постояннотокови вериги бобината е късо съединение, т.е. заместващата схема е:



Определяме тока съгласно закона на Ом:

$$I^{(0)} = \frac{60}{6} = 10 \text{ [A]}$$

<u>Решаваме за напрежение $e^{(1)}(t) = 100\sin(200t)\ [V]$</u>

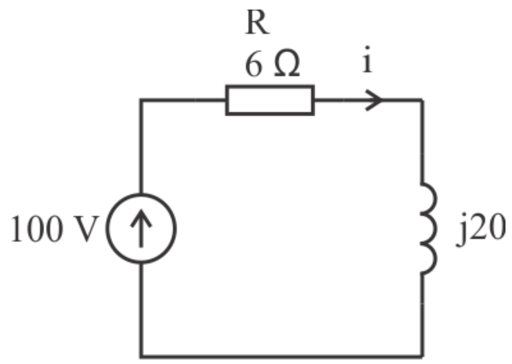
Тъй като ъгловата честота е $\omega = 200\ [rad/s]$, съпротивлението на бобината е:

$$X_L = \omega L = 200.0{,}1 = 20\ [\Omega]$$

Преобразуваме източника в комплексна форма:

$$e^{(1)}(t) = 100\sin(200t) \qquad \rightarrow \qquad \dot{E}^{(1)} = 100e^{j0^\circ} = 100\ [V]$$

Чертаем заместваща схема, в която съпротивлението на бобината е $j20\ [\Omega]$.



Определяме комплексния ток от ВЗК (или закон на Ом):

$$\dot{I} = \frac{100}{6 + j20} = \frac{100}{\sqrt{6^2 + 20^2}e^{j\ \mathrm{atan}\frac{20}{6}}} = \frac{100}{20{,}88e^{j73^\circ}} = 4{,}79e^{-j73^\circ}\ [A]$$

Преобразуваме комплексния ток в синусоидална форма:

$$\dot{I} = 4{,}79e^{-j73^\circ} \qquad \rightarrow \qquad i^{(1)}(t) = 4{,}79\sin(\omega t - 73^\circ)\ [A]$$

<u>Решаваме за третата съставка $e^{(2)}(t) = 40\sin(400t + 90^\circ)\ [V]$</u>

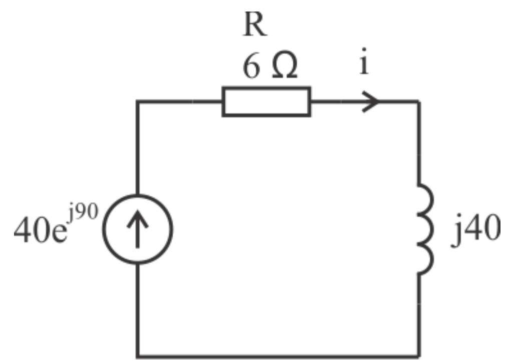
Ъгловата честота е $\omega = 400\ rad/s$, т.е. съпротивлението на бобината е:

$$X_L = \omega L = 400.0{,}1 = 40\ [\Omega]$$

Преобразуваме синусоидалния източник в комплексна форма:

$$e^{(2)}(t) = 40\sin(400t + 90^\circ) \qquad \rightarrow \qquad \dot{E}^{(2)} = 40e^{j90^\circ}$$

Чертаем заместваща схема в която съпротивлението на бобината е $j40\ [\Omega]$.



Определяме комплексния ток от ВЗК:

$$\dot{I} = \frac{40e^{j90^\circ}}{6+j40} = \frac{40e^{j90^\circ}}{\sqrt{6^2+40^2}e^{j\,\mathrm{atan}\frac{40}{6}}} = \frac{40e^{j90^\circ}}{40{,}45e^{j82^\circ}} = 0{,}99e^{j8^\circ}\ [A]$$

Преобразуваме тока в синусоидална форма:

$$\dot{I} = 0{,}99e^{j8^\circ} \qquad \rightarrow \qquad i^{(2)}(t) = 0{,}99\sin(\omega t + 8^\circ)\ [A]$$

Решение б)

Пълният ток във веригата определяме от принципа на наслагването:

$$\mathrm{i(t)} = I^{(0)} + i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) = 10 + 4{,}79\sin(\omega t - 73^\circ) + 0{,}99\sin(\omega t + 8^\circ)\ [A]$$

Ефективната стойност на тока е:

$$I = \sqrt{(I^{(0)})^2 + \frac{\left(I_m^{(1)}\right)^2 + \left(I_m^{(2)}\right)^2}{2}} = \sqrt{(10)^2 + \frac{(4{,}79)^2 + (0{,}99)^2}{2}} = 10{,}58\ [A]$$

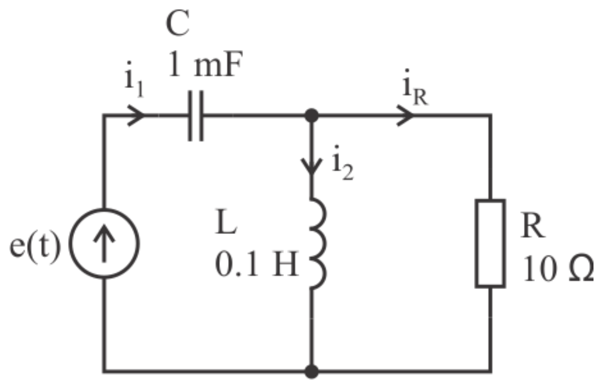
Решение в)

Моментната мощност, изразходвана в резистора, е:

$$P_R = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} = \left(I^{(0)}\right)R + \left(\frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 R + \left(\frac{I_m^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 R =$$

$$= 10^2.6 + \left(\frac{4{,}79}{\sqrt{2}}\right)^2 6 + \left(\frac{0{,}99}{\sqrt{2}}\right)^2 6 = 672\ [W]$$

Задача 5. Схемата се захранва от несинусоидално напрежение: $e(t) = 10 + 30\sin(100t) + 5\sin(300t)$



а) За всяка от хармоничните съставки да се определят реактивните съпротивления, да се начертае еквивалентна заместваща схема и да се определи токът през резистора;

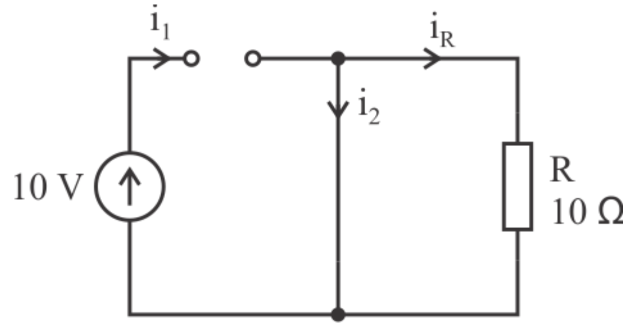
б) Да се определят моментната и ефективна стойност на тока през резистора $i_R(t) = ?$ $I_R = ?$

в) Да се определи активната мощност на резистора $P = ?$

Решение а)

Решаваме за постоянната съставка $E^{(0)} = 10\ [V]$

При постоянен ток кондензаторът прекъсва веригата, а бобината е късо съединение, така че еквивалентната схема е:



Следователно през резистора не тече ток:

$$I_R^{(0)} = 0\ [A]$$

<u>Решаваме за синусоидалната съставка $e^{(1)}(t) = 30\sin(100t)\ [V]$</u>

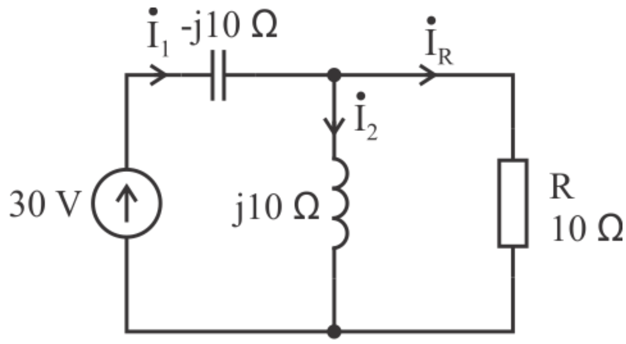
Ъгловата честота е $\omega = 100\ rad/s$. Следователно реактивните съпротивления на бобината и на кондензатора са съответно:

$$X_L = \omega L = 100.0{,}1 = 10\ [\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{100.1.10^{-3}} = 10\ [\Omega]$$

Преобразуваме синусоидата в комплексен вид и чертаем заместваща схема:

$$\dot{E}^{(1)} = 30e^{j0} = 30\ [V]$$



Решаваме задачата по метода със законите на Кирхоф:

$$\left|\begin{array}{c} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_R \\ 30 = -j10\dot{I}_1 + j10\,\dot{I}_2 \\ 10\dot{I}_R - j10\dot{I}_2 = 0 \end{array}\right.$$

Записваме в матричен вид:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -j10 & j10 & 0 \\ 0 & -j10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Детерминантите са:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -j10 & j10 & 0 \\ 0 & -j10 & 10 \end{vmatrix} = -j100 - 100 + j100 = -100$$

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -j10 & j10 & 30 \\ 0 & -j10 & 0 \end{vmatrix} = -j300$$

Следователно токът през резистора е:

$$\dot{I}_R^{(1)} = \frac{\Delta_R}{\Delta} = \frac{-j300}{-100} = j3 = 3.e^{j90^\circ}\ [A]$$

Преобразуваме в синусоидална форма:

$$i_R^{(1)}(t) = 3\sin(100t + 90^\circ)\ [A]$$

<u>Решаваме за синусоидалната съставка $e^{(2)}(t) = 5\sin(300t)\ [V]$</u>

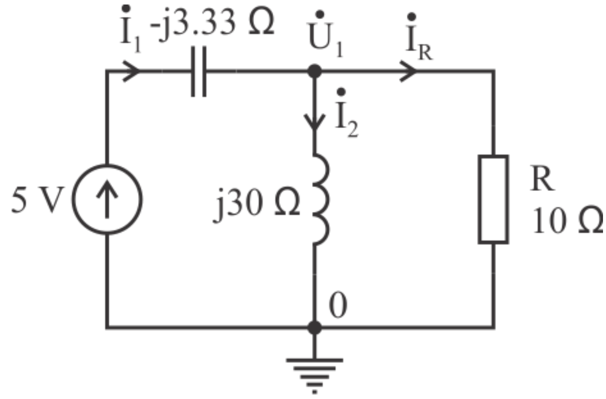
Ъгловата честота е $\omega = 300\ [rad/s]$. Следователно реактивните съпротивления на бобината и на кондензатора са:

$$X_L = \omega L = 300 * 0{,}1 = 30\ [\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{300 * 1 * 10^{-3}} = \frac{10}{3} = 3{,}33\ [\Omega]$$

Преобразуваме синусоидата в комплексен вид и чертаем заместваща схема:

$$\dot{E}^{(2)} = 5e^{j0} = 5\ [V]$$



Този път ще решим схемата по метода с възловите потенциали. Имаме 2 възела, така че заземяваме единия а вторият е неизвестен. Записваме уравнение по ПЗК:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_R$$

Изразяваме токовете чрез законът на Ом:

$$\dot{I}_1 = \frac{0 - \dot{U}_1 + 5}{-j3{,}33} = \frac{5 - \dot{U}_1}{-j3{,}33} = j1{,}5 - j0{,}3\dot{U}_1$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 - 0}{j30} = -j0{,}033\dot{U}_1$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_1 - 0}{10} = 0{,}1\dot{U}_1$$

Заместваме ги в уравнението по ПЗК:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_R \quad \rightarrow \quad j1{,}5 - j0{,}3\dot{U}_1 = -j0{,}033\dot{U}_1 + 0{,}1\dot{U}_1$$

От там изразяваме възловият потенциал:

$$\dot{U}_1 = \frac{j1{,}5}{0{,}1 + j0{,}267} = \frac{1{,}5e^{j90}}{0{,}285e^{j70}} = 5{,}26e^{j20}$$

Следователно токът през резистора е:

$$\dot{I}_R = 0{,}1\dot{U}_1 = 0{,}526e^{j20}$$

В синусоидална форма:

$$\dot{I}_R^{(2)} = 0{,}526e^{j20} \quad \rightarrow \quad i_R^{(2)}(t) = 0{,}526\sin(300t + 20°)\ [A]$$

Решение б)

Моментната стойност на тока през резистора е:

$$i_{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = I_R^{(0)} + i_R^{(1)}(t) + i_R^{(2)}(t) = 0 + 3\sin(100t + 90°) + 0{,}526\sin(300t + 20°)\ \ [A]$$

Ефективната стойност на тока се определя с:

$$I_R = \sqrt{(0)^2 + \frac{(3)^2 + (0{,}526)^2}{2}} = 2{,}15\ [A]$$

Решение в)

Разсейваната от резистора мощност е:

$$P_R = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} = \left(I^{(0)}\right)^2 R + \left(\frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 R + \left(\frac{I_m^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 0 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 .10 + \left(\frac{0{,}526}{\sqrt{2}}\right)^2 .10 = 0 + 45 + 1{,}38 = 46{,}38\ [W]$$