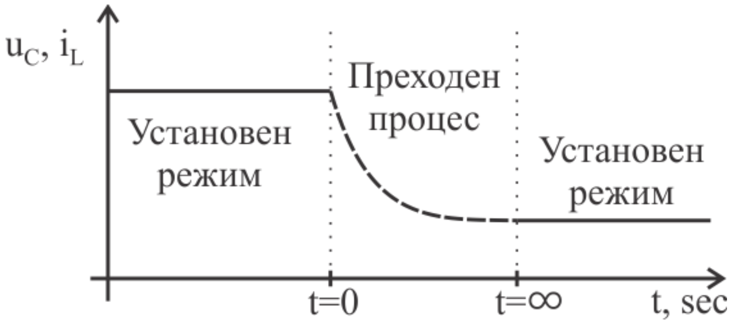
АНАЛИЗ НА ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ

1. Въведение

Когато една верига съдържаща бобини и кондензатори преминава от един установен режим в друг, в нея възникват преходни процеси.



Примери: включване към напрежение, изключване от напрежение, промяна големината на товара.

Те се дължат на връзките между ток и напрежение на бобини и кондензатори:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \qquad u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt + u_C(0+)$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad i_L = \frac{1}{L}\int u_L dt + i_L(0+)$$

При преходни процеси за бобините и кондензаторите са в сила следните независими начални условия:

$$u_C(0-) = u_C(0+)$$

$$i_L(0-) = i_L(0+)$$

Уравненията на преходните процеси на ток и напрежение имат следния вид:

$$i(t) = i(\infty) + i_{\text{ПС}}(t)$$

$$u(t) = u(\infty) + u_{\text{ПС}}(t)$$

където $i(\infty)$ и $u(\infty)$ са установените стойности след приключване на преходния процес;

$i_{\text{ПС}}(t)$ и $u_{\text{ПС}}(t)$ са преходните съставки.

При решаването на задачи от преходни процеси се изпълняват следните 5 стъпки:

Стъпка 1. Чертае се схемата на веригата в момент от времето $t < 0$, анализира се и се определят началните условия:

- Напрежението върху кондензатора $u_C(0-)$;
- Токът през бобината $i_L(0-)$.

Стъпка 2. Чертае се схемата за $t \geq 0$ и за нея се записва система уравнения по някой от изучените методи за анализ на вериги.

Стъпка 3. Намира се характеристичното уравнение на веригата. Това може да стане по няколко начина:

<u>Първи начин.</u> В записаната по-горе система се замества:

- $\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad p.i$

- $\int idt \quad \rightarrow \quad \frac{1}{p}i$

В новополучената система се определя детерминантата на матрицата с коефициентите и се приравнява на 0. Решението на полученото уравнение дава корените на характеристичното уравнение (p_1, p_2 и т.н.).

При 1 корен (p) решението за преходния процес на кой да е ток/напрежение във веригата има следния вид:

$$i(t) = i(\infty) + A.e^{pt}$$

където A е константа, а p е коренът на характеристичното уравнение.

<u>Втори начин.</u> Създава се операторна заместваща схема на веригата за $t \geq 0$:

- C се заменя с $\frac{1}{pC}$;
- L се заменя с pL.

След това схемата се пасивира (премахват се всички източници):

- Източниците на напрежение се заменят с късо съединение;
- Източниците на ток се заменят с прекъсната верига.

След това веригата се прекъсва на кое да е място и се търси входното съпротивление $Z(p)$. Характеристичното уравнение се определя от равенството:

$$\mathrm{Z(p)} = 0$$

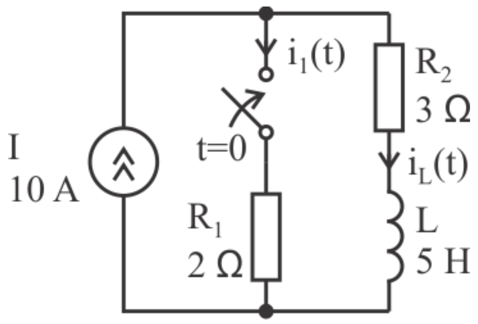
Стъпка 4. Решава се системата от стъпка 2 за момент от времето $t = \infty$, от където се изразява новата установена съставка $i(\infty)$;

Стъпка 5. Решава се уравнението на преходния процес за момент от времето $t = 0+$, за да се определи константата A.

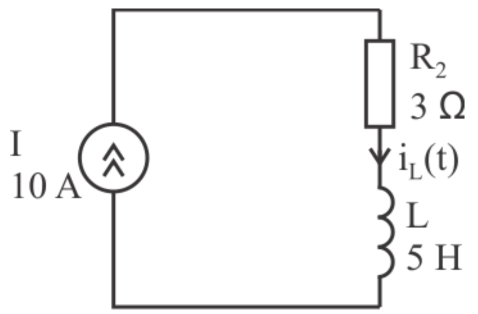
В случай, че величината $i(0+)$ не е известна е нужно предварително да се реши системата от стъпка 2 за момент от времето $t = 0+$.

2. Решени задачи

Задача 1. За дадената схема да се намери токът $i_L(t)$ за $t \geq 0$, ако ключът се затваря в момент от времето $\mathrm{t} = 0$.



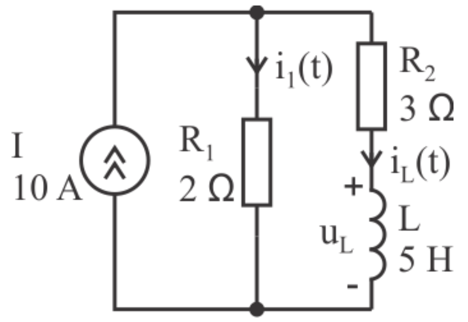
Стъпка 1. Чертаем схемата за $t < 0$ (ключът е отворен).



Решаваме схемата за $t = 0-$, за да определим $i_L(0-)$. Тъй като това е едноконтурна верига с източник на ток, токът през бобината е известен:

$$i_L(0-) = 10\ [\text{A}]$$

Стъпка 2. Чертаем схемата за $t \geq 0$ (ключът е затворен).



Записваме система уравнения по кой да е от изучените методи. Например по метода със законите на Кирхоф:

$$\left|\begin{aligned} 10 &= i_1 + i_L \\ 0 &= 3i_L + u_L - 2i_1 \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left|\begin{aligned} 10 &= i_1 + i_L \\ 0 &= 3i_L + 5\frac{di_L}{dt} - 2i_1 \end{aligned}\right.$$

Стъпка 3. Намираме характеристичното уравнение на веригата. За целта в горната система заменяме $\frac{di_L}{dt} \quad \rightarrow \quad pi_L$:

$$\left|\begin{aligned} 10 &= i_1 + i_L \\ 0 &= (3 + 5p)i_L - 2i_1 \end{aligned}\right.$$

Записваме системата в матричен вид:

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 + 5p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Характеристичното уравнение е:

$$Det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 + 5p \end{vmatrix} = 3 + 5p + 2 = 0$$

откъдето намираме корена му:

$$p = -1$$

Решението на задачата има следния вид:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + \text{A}e^{-1t}$$

Стъпка 4. Решаваме задачата за $t = \infty$, за да намерим $i_L(\infty)$.

Режимът е установен, т.е. токът е постоянен ($i_L = const$) и следователно падът на напрежението върху бобината е нула:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$$

Тогава системата става:

$$\left|\begin{aligned} 10 &= i_1 + i_L \\ 0 &= 3i_L + L\frac{di_L}{dt} - 2i_1 \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left|\begin{aligned} 10 &= i_1 + i_L \\ 0 &= 3i_L - 2i_1 \end{aligned}\right.$$

Решаваме системата и получаваме:

$$i_L(\infty) = 10\frac{2}{3+2} = 4\ [\mathrm{A}]$$

Стъпка 5. Решаваме уравнението на преходния процес за $t = 0+$.

За бобината е изпълнено:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 10\ [A]$$

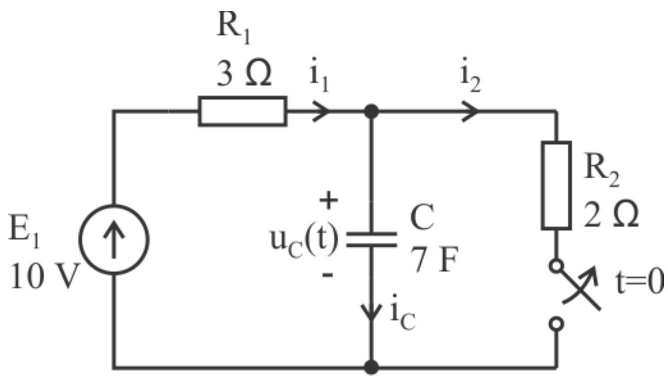
Решаваме уравнението на преходния процес за $t = 0+$ знаейки, че $i_L(0+) = i_L(0-)$:

$$i_L(t) = 4 + Ae^{-t} \quad \rightarrow \quad i_L(0+) = 10 = 4 + Ae^0 \quad \rightarrow \quad A = 6$$

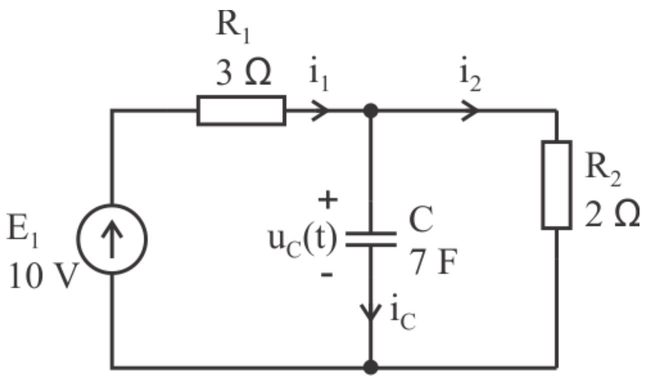
Следователно пълното решение за преходния процес на тока е:

$$i_L(t) = 4 + 6e^{-t}$$

Задача 2. За дадената схема да се определи напрежението $u_C(t)$ за $t \geq 0$, ако ключът се отваря в момент от времето $t = 0$.



Стъпка 1. Чертаем схемата за $t < 0$ (ключът е затворен).



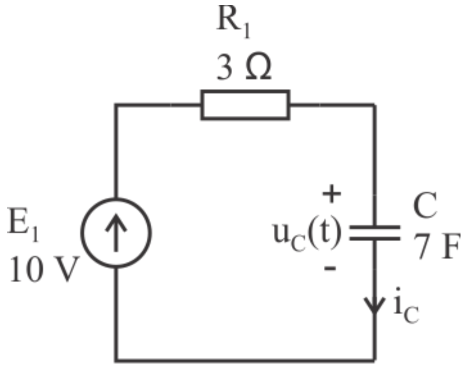
Решаваме схемата за $t = 0-$, за да определим $u_C(0-)$. Веригата е постояннотокова, т.е. през кондензаторът не минава ток. Следователно можем да определим тока във веригата съгласно закона на Ом:

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{10}{3+2} = 2\ [\text{A}]$$

C и R_2 са свързани паралелно, т.е. техните напрежения са равни:

$$u_C(0-) = 2.i_1(0-) = 4\ [V]$$

Стъпка 2. Чертаем схемата за $t \geq 0$ (ключът е отворен).

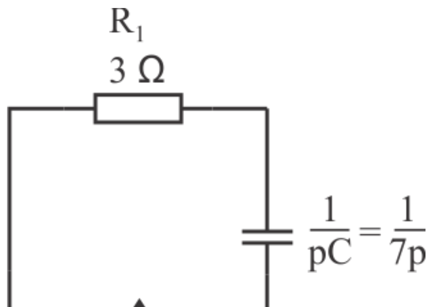


Записваме система уравнения по кой да е от изучените методи. В случая имаме едноконтурна верига, така че имаме само 1 уравнение по ВЗК:

$$10 = 3i_C + u_C(t) \quad \rightarrow \quad 10 = 3i_C + \frac{1}{C}\int i_C dt + u_C(0-)$$

където $u_C(0) = 4\ V$

Стъпка 3. Намираме характеристичното уравнение на веригата. Този път ще решим задачата като направим пасивна операторна заместваща схема:



Прекъсваме веригата и определяме входното съпротивление $Z(p)$:

$$Z(p) = 3 + \frac{1}{7p}$$

Характеристичното уравнение се определя с $\mathrm{Z(p)} = 0$:

$$3 + \frac{1}{7p} = 0$$

Следователно коренът на характеристичното уравнение е:

$$p = -\frac{1}{21} = -0{,}048$$

Решението на задачата има следния вид:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + Ae^{-0{,}048t}$$

Стъпка 4. Решаваме задачата за $t = \infty$, за да определим $u_C(\infty)$.

Режимът е установен, т.е. през кондензатора не тече ток ($i_C(\infty) = 0$). Тогава уравнението по ВЗК от стъпка 2 става:

$$10 = 3i_C(\infty) + u_C(\infty) = 0 + u_C(\infty) \;\; => \;\; u_C(\infty) = 10\ [V]$$

Стъпка 5. Решаваме уравнението за момент от времето $t = 0+$:

За кондензатора е изпълнено:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 4\ [V]$$

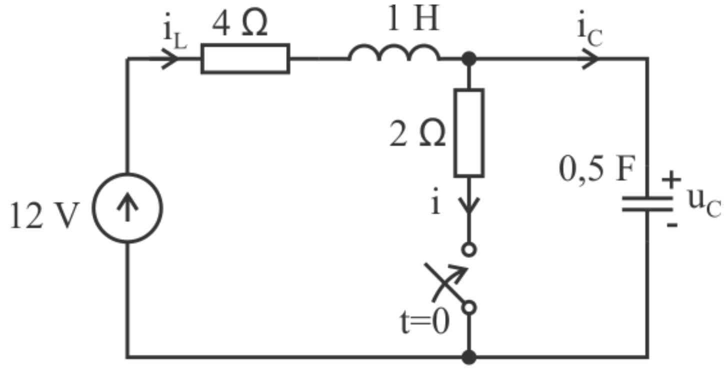
Заместваме в уравнението на преходния процес $t = 0+$:

$$u_C(t) = 10 + Ae^{-0.048t} \quad => \quad u_C(0+) = 4 = 10 + Ae^{0} \quad => \quad A = -6$$

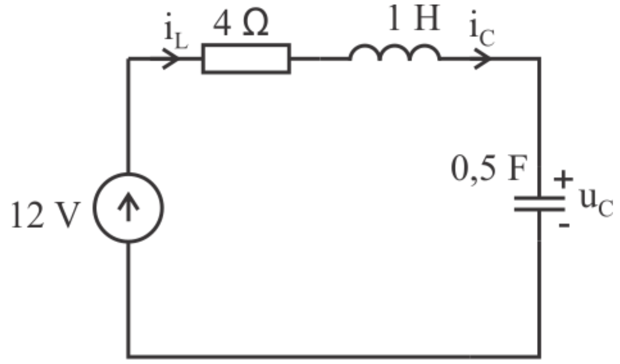
Следователно пълното решението е:

$$u_C(t) = 10 - 6e^{-0{,}048t}\ [V]$$

Задача 3. Да се определят напрежението на кондензатора $u_C(t)$ за веригата.



Стъпка 1. Чертаем схемата за $t < 0$ и определяме началните условия:



$$i_L(0-) = 0$$

От ВЗК определяме $u_C(0-)$:

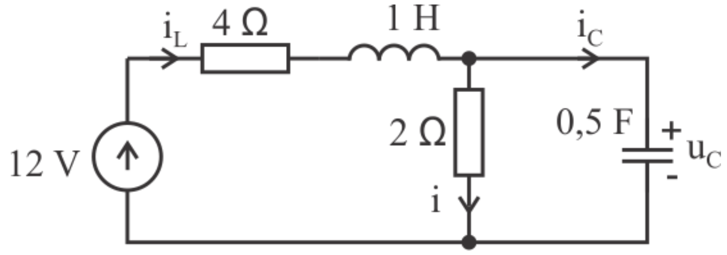
$$12 = i_L(t).R + u_L(t) + u_C(t)$$

Тъй като $i_L(0-) = 0$ и $u_L(0-) = 0$ получаваме:

$$u_C(0-) = 12\ [V]$$

$$i_L(0-) = 0\ [A]$$

Стъпка 2. Чертаем схемата за $t \geq 0$ и записваме системата уравнения по метода със законите на Кирхоф:



$$\begin{vmatrix} i_L(t) = i_C(t) + i(t) \\ 12 = 4i_L(t) + u_L(t) + 2i(t) \\ u_C(t) - 2i(t) = 0 \end{vmatrix}$$

Стъпка 3. Определяме характеристичното уравнение, като заместим:

$$\int idt \to \frac{1}{p}i \quad \text{и} \quad \frac{di}{dt} \to p.i$$

$$\begin{vmatrix} i_L = i_C + i \\ 12 = 4i_L + L\dfrac{di_L}{dt} + 2i \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C dt - 2i = 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} i_C + i - i_L = 0 \\ 4i_L + pi_L + 2i = 12 \\ \dfrac{2}{p}i_C - 2i = 0 \end{vmatrix}$$

Създаваме матрицата на коефициентите и приравняваме детерминантата и на 0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4+p & 0 & 2 \\ 0 & \dfrac{2}{p} & -2 \end{vmatrix} = (4+p)\frac{2}{p} + \frac{4}{p} + 2(4+p) = 0$$

$$4 + p + 2 + 4p + p^2 = 0 \ \to \ p^2 + 5p + 6 = 0$$

$$p_1 = -2, \quad p_2 = -3$$

Корените са реални, следователно решението има следния вид:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A_1.e^{-2t} + A_2.e^{-3t}$$

Стъпка 4. Решаваме системата за $t = \infty$. Знаем, че режимът е установен, т.е. $i_C(\infty) = 0$ и $u_L(\infty) = 0$:

$$\begin{vmatrix} i_L(t) = i_C(t) + i(t) \\ 12 = 4i_L(t) + u_L(t) + 2i(t) \\ u_C(t) - 2i(t) = 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} i_L(\infty) = 0 + i(\infty) \\ 12 = 4i_L(\infty) + 0 + 2i(\infty) \\ u_C(\infty) - 2i(\infty) = 0 \end{vmatrix}$$

Решенията са:

$$i_L(\infty) = i(\infty) = \frac{12}{6} = 2\ [A]$$

$$u_C(\infty) = 2i(\infty) = 4\ [V]$$

Стъпка 5. Има две неизвестни, т.е. ни е нужно второ уравнение. Определяме производната на първото.

$$\left| \begin{aligned} & u_C(t) = 4 + A_1.e^{-2t} + A_2.e^{-3t} \\ & \frac{du_C(t)}{dt} = -2A_1.e^{-2t} - 3A_2.e^{-3t} \end{aligned} \right.$$

За да решим горната система за момент от времето $t = 0 +$ е нужно да определим производната $\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t = 0 +}$. Това може да стане от уравнението по ПЗК:

$$i_L(0 +) = i(0 +) + i_C(0 +)$$

Тъй като резистора и кондензатора са свързани паралелно, токът през резистора и токът през кондензатора са:

$$i(0 +) = \frac{u_C(0 +)}{2}$$

$$i_C(0 +) = \frac{1}{2}\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t = 0 +}$$

Тогава уравнението по ПЗК става:

$$i_L(0 +) = i(0 +) + i_C(0 +) = \frac{u_C(0 +)}{2} + \frac{1}{2}\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t = 0 +}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{12}{2} + \frac{1}{2}\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t = 0 +} \rightarrow \frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t = 0 +} = -12\left[\frac{V}{s}\right]$$

Сега можем да решим системата за $t = 0 +$:

$$\left| \begin{aligned} & u_C(0 +) = 4 + A_1.e^{0} + A_2.e^{0} \\ & \frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t = 0 +} = -2A_1.e^{0} - 3A_2.e^{0} \end{aligned} \right. \rightarrow \left| \begin{aligned} & 12 = 4 + A_1 + A_2 \\ & -12 = -2A_1 - 3A_2 \end{aligned} \right.$$

Решенията са:

$$A_1 = 12 \text{ [V]}; \qquad A_2 = -4 \text{ [V]}$$

Следователно пълното решение за $u_C(t)$ е:

$$u_C(t) = 4 + 12.e^{-2t} - 4.e^{-3t}\ [V]$$